Az állapotmódszer alapjai

Dr. CSÁKI FRIGYES, Budapest*
A Magyar Elektrotechnikai Egyesület tagja

DK 62-50

A korszerű elektrotechnikában, különösen pedig a szabályozástechnikában egyre inkább terjed az állapotmódszer és felhasználása. Különösen az optimalizáláshoz és a nemlineáris stabilitás-vizsgálathoz elengedhetetlennek látszik a dinamikus rendszereknek az állapottérben való leírása és vizsgálata. De egyéb esetekben is előnyös lehet az állapot egyenletek felhasználása, különösen digitális számítógépek alkalmazásakor, de némelykor az analóg számítástechnikában is. Ugyanakkor hangsúlyozni kell, hogy az állapotmódszer nem helyettesítheti a lineáris szabályozási rendszerek tárgyalására használt frekvenciatartománybeli módszereket (NYQUIST diagram, BODE-diagram, LAPLACE-transzformáció), hanem inkább kiegészítőjüknek tekintendő.

Ebben a cikkben az állapotmódszer rövid összefoglalását kíséreljük megadni, a legfontosabb és a leglényegesebb tárgykörökre szorítkozva. A nagyobb elmélyülést kívánó olvasók számára az irodalomjegyzékben összeállítottuk a tárgykörre vonatkozó alapvető könyvek jegyzékét.

Az állapottér-módszer

1. Állapotváltozók, állapotegyenletek

A dinamikus rendszerek, az átviteli tagok, főleg pedig a szabályozott szakaszok leírására újabban gyakran használják az állapottér-módszert.

A kétdimenziós fázissík módszer elvileg kiterjeszthető többdimenziós fázistér módszerre. A fázisváltozók helyett pedig általánosabb állapotváltozókat használva az állapottér-módszer áll elő. Az állapottér-módszer azonban nem geometriai szerkesztéseket, hanem analitikus összefüggéseket használ fel. Az állapotmódszer jelentőségét kiemeli, hogy sok korszerű szabályozástechnikai elv mint pl. a LJAPUNOV-féle stabilitásvizsgálat, a PONTRJAGIN-féle maximum elv, a BELLMAN-féle dinamikus programozás az állapottérre fogalmazódott meg.

A dinamikus rendszerek leírására alkalmasan megválasztott állapotváltozók használhatók fel. Például egy soros *RLC* rezgőkör leírására a töltés és az áram, vagy a töltés és az ellenálláson keletkező feszültségesés, vagy a kapacitív feszültségesés és az ellenállás feszültségesése használható fel. Az áram és az ellenállás feszültségesése azonban nem alkalmas változópár, mert lineárisan nem függetlenek egymástól. A másodrendű rendszerek leírásához két állapotváltozót kell felhasználni.

Az előzőekből kitűnik, hogy ugyanaz a dinamikus rendszer többféleképpen is leírható és tárgyalható, mert az állapotváltozók többféleképpen is megválaszthatók.

Állapotváltozóknak nevezzük a dinamikus rendszerek leírására alkalmas minimális számú változó összességét. Az állapotváltozókat rendszerint állapotvektorba foglaljuk össze.

Dr. CSÁKI FRIGYES okl. gépészmérnök, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, egyetemi tanár, a Budapesti Műszaki Egyetem Automatizálási Tanszékének vezetője (Budapest XI., Garami E. tér 3.)

1.1. Folytonos-folyamatos működésű rendszerek állapotegyenletei

A nemlineáris, nemautonom szabályozott szakaszok állapotegyenletei:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$
$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \qquad (1-1)$$

Itt $\mathbf{x}$ az állapotvektor, $\mathbf{u}$ a szabályozott szakasz bemenőjeleiből (a beavatkozó jelekből, vagy a módosított jellemzőkből) alkotott vektor, $\mathbf{x}_s$ a szabályozott szakasz kimenőjeleiből, a szabályozott jellemzőkből alkotott vektor. [Így $\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_b(t)$ és $\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}_k(t)$.] Az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ vektorfüggvényeket folytonosnak tételezzük fel. A lineáris nemautonom rendszerek, illetve szakaszok általános állapotegyenletei:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \qquad (1-2)$$

Itt $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ és $\mathbf{D}(t)$ időben változó mátrix.

A leggyakrabban előforduló állandó paraméterű lineáris szabályozott szakasz egyenletei

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (1-3)$$

vagy rövidített formában:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{x}_s = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (1-4)$$

Itt $\mathbf{x}$ $n\times 1$-es, $\mathbf{u}$ $r\times 1$-es, $\mathbf{x}_s$ $q\times 1$-es oszlopvektor (oszlopmátrix), míg $\mathbf{A}$ $n\times n$-, $\mathbf{B}$ $n\times r$-, $\mathbf{C}$ $q\times n$- és $\mathbf{D}$ $q\times r$-méretű állandó mátrix.

Végül megemlítjük, hogy az egyváltozós állandó paraméterű lineáris szabályozott szakasz egyenletei:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$x_s = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}u \qquad (1-5)$$

ahol $\mathbf{b}$ $n\times 1$ dimenziós oszlopvektor (oszlopmátrix) $\mathbf{c}^T$ $1\times n$ dimenziós sorvektor (sormátrix) d pedig skalár. Most u és x_s is skalár.

A nemlineáris rendszer hatásvázlatát az 1—1. ábra mutatja be. Az 1—2. ábrán pedig a lineáris változóparaméterű rendszer jelfolyam-ábráját rajzoltuk meg, itt a

$$Q = \int_{t_0}^{t} (\quad)\, dt$$

integráloperátort jelent. Ez $\dot{\mathbf{x}}(t)$-ből $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$ értékét állítja elő $\mathbf{x}(t)$ meghatározásához még az $\mathbf{x}(t_0)$ kezdeti értéket kell hozzáadni. Ha a mátrixok állandók, az állandó paraméterű rendszer jelfolyam ábráját kapjuk meg.

1.2. Az állapotegyenletek meghatározása a differenciálegyenletből

Induljunk ki legelőször az

$$\frac{X_s(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_n s^n + \ldots a_1 s + a_0} \qquad (1-6)$$

alakú átviteli függvényből. Az általánosság megszorítása nélkül $a_n = 1$ vehető. (Ellenkező esetben ugyanis a számláló és a nevező végigoszthatók a_n-nel.)
Az átviteli függvénynek a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i x_s(t)}{dt^i} = b_0 u(t); \quad (a_n = 1) \qquad (1-7)$$

differenciálegyenlet felel meg. Bevezetve az $x_i = d^{(i-1)}x_s/dt^{(i-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ összefüggésekkel az ún. fázisváltozókat, (1—5)-ben az egyes mátrixok alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\,1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0\,]; \quad d = 0 \qquad (1-8)$$

(Ha $a_n = 1$, akkor az **A** mátrixban $-a_i$ helyén $-a_i/a_n$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ a **b** vektorban b_0 helyén b_0/a_n áll.)
Határozzuk meg most az

$$\frac{X_s(s)}{U(s)} = \frac{b^n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}; \quad (a_n = 1) \qquad (1-9)$$

átviteli függvényű szabályozott szakasz állapotegyenleteit. Feltételezzük, hogy a pólusok és a zérushelyek száma megegyezik. Ha n számú pólus $m < n$ számú zérushely van, akkor a későbbiekben $b_n = b_{n-1} = \ldots = b_{m+1} = 0$; $b_m \neq 0$ választandó. A megfelelő differenciálegyenlet

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i x_s(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}; \quad (a_n = 1) \qquad (1-10)$$

Vezessünk be

$$x_i(t) = x_s^{(i-1)}(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{i-k-1} u^{(k)}(t) =$$

$$= \dot{x}_{i-1}(t) - \beta_{i-1} u(t) \qquad (1-11)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (\dot{x}_0 = x_s)$$

összefüggésekkel állapotváltozókat. Behelyettesítve az eredeti differencálegyenletbe ($a_n = 1$ figyelembevételével) és rendezve

$$x_n = -[a_0 x_1 + a_1 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_n] +$$

$$+ (b_n - \beta_0) u^{(n)}(t) + (b_{n-1} - \beta_1 - a_{n-1}\beta_0) u^{(n-1)}(t) + \ldots$$

vagy

$$\dot{x}_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} + (b_n - \beta_0) u^{(n)}(t) -$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k - \beta_{n-k} - \sum_{i=0}^{n-k-1} a_{i+k}\beta_i\right) u^{(k)}(t) +$$

$$+ \left(b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_i\right) u(t) \qquad (1-12)$$

Tegyük az $u^{(k)}(t)$ deriváltak együtthatóit sorra zérussá, így az állapotváltozók (16.1—11) definíciós egyenlete és az utolsó egyenlet segítségével

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \\ \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [\,1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ 0\,]; \quad d = [\beta_0] \qquad (1-13)$$

ahol

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_n \\ \beta_1 &= b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 &= b_{n-2} - a_{n-2}\beta_0 - a_{n-1}\beta_1 \qquad (1-14) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= b_0 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \beta_i \end{aligned}$$

egymás után következő helyettesítésekkel könnyen meghatározható. (Ha $a_n \neq 1$, akkor a_i helyett a_i/a_n, b_k helyett b_k/a_n lép fel.)

Az előző számítások alapján az 1—3. ábrán bemutatott jelfolyam-ábra rajzolható fel, ahol $s^{-1} = 1/s$ integráloperátort jelképez.

Természetesen nem ez az egyetlen lehetőség. Az 1—4. ábra egy másik megoldást mutat. Az **A** és **b** mátrix ugyanaz mint (1—8)-ban, míg

$$\mathbf{c}^T = [b_0 - a_0 b_n, \ \ldots, \ b_{n-1} - a_{n-1} b_n]; \quad d = b_n$$

Az 1—4. ábrán zárójelbe téve beírtuk az $(1/a_n)$ reciprok együtthatót is. Ha $a_n \neq 1$, akkor ez használandó az 1 helyett, és a jelfolyamábrából így írandó fel az állapotegyenlet.

1.3. Az állapotváltozók meghatározása az átviteli függvényből

Az állapotváltozókat, mint láttuk, ugyanarra a rendszerre többféleképpen is meghatározhatjuk. Ugyanaz a rendszer tehát többfajta módon is leírható. Most az átviteli függvény tényezőkre bontott alakjából indulunk ki. (Mindezek az eljárások jól felhasználhatók az analóg számítógépek programozásához is.)

A különféle módszereket egy példán szemléltetjük. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a pólusok és zérushelyek egyszeresek. Legyen az átviteli függvény

$$\frac{X_s(s)}{U(s)} = K\frac{(s-z_1)}{s(s-p_1)(s-p_2)} \qquad (1-15)$$

Feltételezzük, hogy a valós pólusokra és zérushelyre fennáll a $0>p_1>z_1>p_3$ egyenlőtlenség.

1.3.1. Közvetlen programozás

Az átviteli függvényt átrendezve:

$$\frac{X_s(s)}{U(s)} = K\frac{s^{-2}-z_1s^{-3}}{1-(p_1+p_2)s^{-1}+p_1p_2s^{-2}}$$

bevezetünk egy segédváltozót:

$$V(s) = \frac{KU(s)}{1-(p_1+p_2)s^{-1}+p_1p_2s^{-2}} = \frac{X_s(s)}{s^{-2}-z_1s^{-3}}$$

Ezzel

$$V(s) = KU(s)+(p+p_2)s^{-1}V(s)-p_1p_2s^{-2}V(s)$$

és

$$X_s(s) = s^{-2}V(s)-z_1s^{-3}V(s).$$

Így az 1—5. ábrán bemutatott jelfolyamábra szerkeszthető meg. Bevezetve az $X_1(s) = s^{-1}X(s) = s^{-3}V(s)$, $X_2(s) = s^{-1}X_3(s) = s^{-2}V(s)$, $X_3(s) = s^{-1}V(s)$ állapotváltozókat, visszatranszformálással megállapíthatók az állapotegyenletekben előforduló mátrixok értékei:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_1p_2 & p_1+p_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} \qquad (1-16)$$

$$\mathbf{c}^T = [\,-z_1 \quad 1 \quad 0\,]; \qquad d = 0$$

1.3.2. Párhuzamos programozás

Az átviteli függvény eredeti formáját részlettörtekre bontjuk:

$$\frac{X_s(s)}{U(s)} = K\frac{-z_1}{p_1p_2s} + K\frac{p_1-z_1}{p_1(p_1-p_2)(s-p_1)} + K\frac{p_2-z_1}{p_2(p_2-p_1)(s-p_2)}$$

Ezzel az 1—6. ábrán látható jelfolyam-ábra szerkeszthető meg. Ismét bevezetve az $X_1(s)$, $X_2(s)$, $X_3(s)$ állapotváltozókat, visszatranszformálás után megállapíthatók az állapotegyenletekben szereplő mátrixok kifejezései:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \end{bmatrix} \qquad (1-17)$$

$$\mathbf{c}^T = \left[\frac{z_1}{p_1p_2}, \frac{p_1-z_1}{p_1(p_1-p_2)}, \frac{p_2-z_1}{p_2(p_2-p_1)}\right]; \quad d = 0$$

Egy másik változat

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1-18)$$

$$\mathbf{c}^T = \left[K\frac{-z_1}{p_1p_2}, K\frac{p_1-z_1}{p_1(p_1-p_2)}, K\frac{p_2-z_1}{p_2(p_2-p_1)}\right]; \quad d = 0$$

Az állapotegyenleteknek ezt a formáját Lurje-féle kanonikus alaknak nevezik.

1.3.3. Iterativ programozás

Ilyenkor a szabályozott jellemző LAPLACE-transzformáltját tényezőkre bontjuk. Többféle tényezőre bontás is lehetséges. Vigyázni kell azonban arra, hogy az $x_s(t)$ kimenőjelet differenciálás nélkül kapjuk meg. (Az analóg gép programozásakor is el kell kerülni a differenciálást.)

Az egyik lehetséges megoldás:

$$X_s(s) = K\frac{U(s)}{p}\frac{1}{s-p_1}\frac{1}{s-p_2}(s-z_1)$$

Legyen

$$X_3(s) = K\frac{U(s)}{s}; \qquad \dot{x}_3 = Ku$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s-p_1}X_3(s); \qquad \dot{x}_2 = p_1x_2+x_3$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s-p_2}X_2(s); \qquad \dot{x}_1 = p_2x_1+x_2$$

$$X_s(s) = (s-z_1)X_1(s); \qquad x_s = \dot{x}_1-z_1x_1 = (p_2-z_1)x_1+x_2$$

Így az 1—7. ábrán látható jelfolyamábra szerkeszthető meg. A keresett mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_2 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [(p_2-z_1), 1, 0]; \qquad d = 0$$

Egy másik változat szerint változatlan $\mathbf{A}$ és d mellett

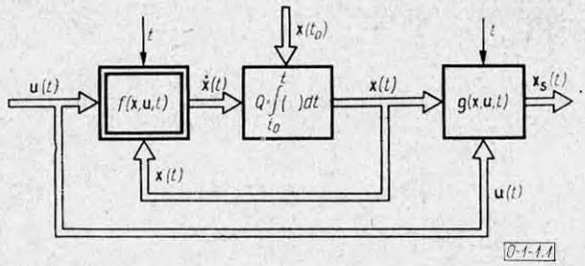
$$\mathbf{c}^T = [K(p_2-z_1), K, 0]; \mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$$

1.4. Az állapotegyenletek meghatározása fizikai megfontolások alapján

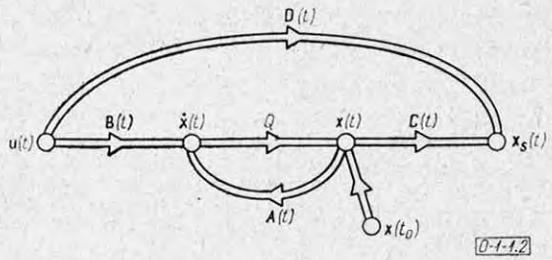
A rövidség kedvéért csak egy példát mutatunk be. Tételezzük fel, hogy a szabályozott szakasz állandó külső gerjesztésű (lineáris) egyenáramú motor. (Lásd az 1.4—1. ábrát.)

A feszültségegyenlet

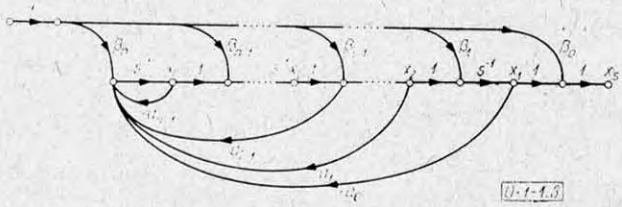
$$u_k = R_A i_a + L_A\frac{di_a}{dt} + K_V\frac{d\gamma_m}{dt},$$



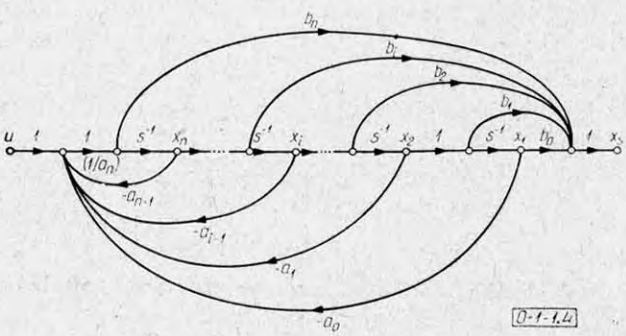
1–1. ábra



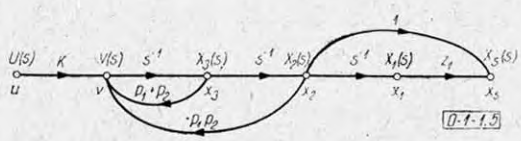
1–2. ábra



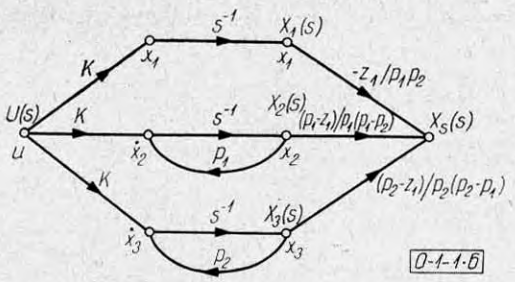
1–3. ábra



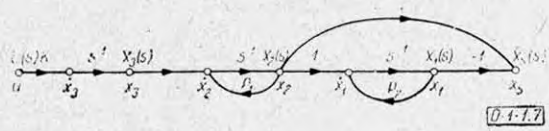
1–4. ábra



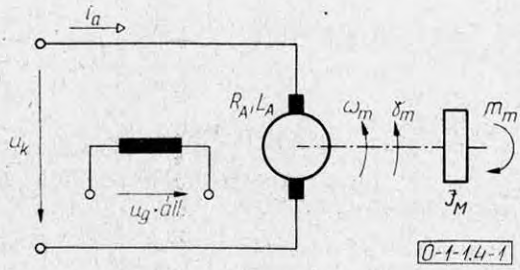
1–5. ábra



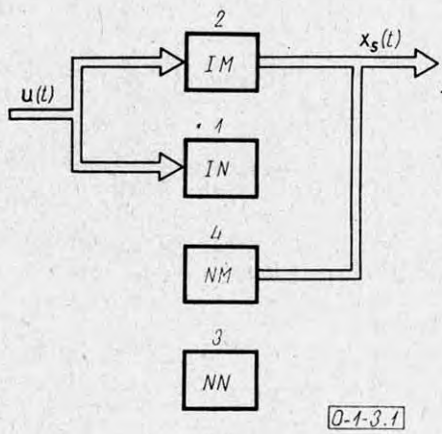
1–6. ábra



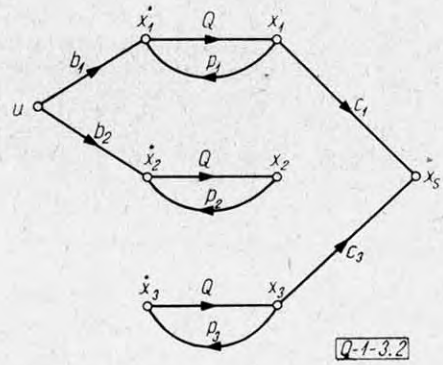
1–7. ábra



1. 4–1. ábra



3–1. ábra



3–2. ábra

a nyomatékegyenlet pedig a csillapítás figyelembevételével

$$K_M i_a = J_M \frac{d^2\gamma_m}{dt^2} + D_M \frac{d\gamma_m}{dt} + m_m$$

Legyenek az állapotváltozók $x_1 = \gamma_m$, $x_2 = \dot{\gamma}_m$, $x_3 = i$, míg a bemenőjelek $u_1 = u_k$, $u_2 = m_m$, végül a kimenőjelek $x_{s1} = \gamma$, $x_{s2} = i$. Így megállapítható, hogy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D_M/J_M & K_M/J_M \\ 0 & -K_V/L_A & -R_A/L_A \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J_M \\ 1/L_A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Az állapotegyenletek megoldása

Először a változó paraméterű homogén lineáris egyenletek megoldásával foglalkozunk, majd az inhomogén egyenletek megoldására térünk ki. Az állandó paraméterű rendszerek megoldását speciális esetként kapjuk.

2.1. A változó paraméterű lineáris differenciálegyenlet megoldása

Vezessük be a **Q** integrálási vagy kvadratúra mátrixoperátort. Ezzel

$$\mathbf{QA}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau = [Qa_{ij}(t)] \qquad (2-1)$$

vagyis egy mátrix integrálján az elemeinek integráljából álló mátrixot értjük.

Először a homogén

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \qquad (2-2)$$

differenciálegyenlet megoldását keressük. Ez formálisan

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{Q}[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)]$$

alakban adható meg. Minthogy azonban a keresett $\mathbf{x}(t)$ a jobb oldalakon is szerepel, az integrálegyenlet megoldására iterációs eljárást választunk, vagyis a jobb oldalon $\mathbf{x}(t)$ helyébe ismételten behelyettesítjük kifejezését. Így egy NEUMAN-sort kapunk:

$$\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{I} + Q[\mathbf{A}] + Q[\mathbf{A}\,Q[\mathbf{A}]] + \ldots\}\,\mathbf{x}(t_0) = \\ = \Omega_{t_0}^{t}[\mathbf{A}]\mathbf{x}(t_0) \qquad (2-3)$$

Az $\Omega_{t_0}^{t}$ [**A**]* végtelen sorról kimutatható, hogy abszolút módon és egyenletesen konvergens, ha az $\mathbf{A}(t)$ mátrix elemei az integrálási tartományban végesek. A konvergens végtelen sor által meghatározott mátrixot (amelyet sokszor matrizánsnak is szoktak nevezni), $\Phi(t,t_0)$-val* is szokás jelölni, az utóbbit átmeneti vagy alapmátrixnak nevezik. Így a megoldás

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) \qquad (2-4)$$

Bizonyítás nélkül összefoglaljuk az alapmátrix tulajdonságait:

1° $\Phi(t_0,t_0) = \mathbf{I}$

2° $d\,\Phi(t,t_0)/dt = \mathbf{A}(t)\,\Phi(t,t_0)$

(Az alapmátrix kielégíti a homogén differenciálegyenletet.)

3° $\mathbf{A}(t) = d\Phi(t,t_0)/dt\,|_{t_0 = t}$

4° $\Phi(t,t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$

ahol az $\mathbf{X}(t)$ mátrix n oszlopát a homogén differenciálegyenlet lineárisan független megoldásai képezik.

5° $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)$

6° $[\Phi(t,t_0)]^{-1} = \Phi(t_0,t)$

$$7°\ \det \Phi(t,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \sum_{D} \mathbf{A}(\tau)d\tau\right]$$

ahol

$$\sum_{D} \mathbf{A}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

az $\mathbf{A}(t)$ mátrix ún. nyoma, a főátlóban álló elemek összege.

8° Állandó paraméterű rendszerekre

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t-t_0) = \exp\,[(t-t_0)\,\mathbf{A}]$$

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\,\Phi(\tau)$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

Ilyenkor a homogén differenciálegyenlet megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \left[\exp\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}\,d\tau\right]\mathbf{x}(t_0) \qquad (2-5)$$

A változó paraméterű rendszerekre azonban

$$\mathbf{x}(t) \neq \left[\exp\int_{t_0}^{t} \mathbf{A}(\tau)d\tau\right]\mathbf{x}(t_0)$$

Csupán akkor vehető $\neq$ helyett $=$, ha pl. az $\mathbf{A}(t)$ mátrix átlós, vagy ha $\mathbf{A}(t_1)\,\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\,\mathbf{A}(t_1)$.

Most rátérünk az inhomogén differenciálegyenlet megoldására. Ehhez a LAGRANGE-féle állandók variálásának módszerét használjuk fel, vagyis feltételezzük, hogy a homogén egyenlet

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{c}$$

* Nyomdatechnikai okokból a görög betűket félkövér álló helyett dőlt szedéssel szedtük. (*A szerk.*)

megoldásában az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$ kezdeti állapot $\mathbf{c}$ állandója az idő függvénye $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$.

Az inhomogén (1—3) egyenlet megoldását tehát

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{c}(t) \qquad (2-6)$$

alakban keressük. Deriválva

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t,t_0)\mathbf{c}(t) + \Phi(t,t_0)\dot{\mathbf{c}}(t)$$

és a 2° tulajdonság figyelembevételével

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\ \Phi(t,t_0)\mathbf{c}(t) + \Phi(t,t_0)\dot{\mathbf{c}}(t)$$

Másrészt a feltételezett megoldást az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{c}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

Az utóbbi két összefüggést összehasonlítva

$$\Phi(t,t_0)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

Az inverz alapmátrixszal végigszorozva és a 6° tulajdonságot figyelembevéve

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \Phi(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

Az idő szerint integrálva, továbbá (2—6)-ból a $t = t_0$ helyettesítéssel keletkező $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ összefüggés figyelembevételével

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (2-7)$$

Visszahelyettesítve a feltételezett (2—6) megoldásba és az 5° tulajdonságot tekintetbe véve végül is

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (2-8)$$

A szabályozott jellemző vektora pedig

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \qquad (2-9)$$

2.2 Az állandó paraméterű rendszer állapotegyenleteinek megoldása

Állandó paraméterű rendszerre az állapotvektor (2—8)-ból a 8° tulajdonság figyelembevételével:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (2-10)$$

illetve

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (2-11)$$

alakban fejezhető ki. Ilyenkor gyakran $t_0 = 0$ vehető.

Maga a szabályozott jellemző vektora pedig

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}\Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (2-12)$$

illetve

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (2-13)$$

2.3 Az állandó paraméterű rendszer alapmátrixának meghatározása

Az állandó paraméterű rendszerek alapmátrixa a matrizáns módszer helyett egyszerűbben is meghatározható.

2.3.1 Az alapmátrix meghatározása sorbafejtéssel

Az alapmátrix előállítható végtelen sor formájában:

$$\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k \qquad (2-14)$$

Kiszámítása azonban (még véges tagszám figyelembevételével is) fáradságos, mert mátrixhatványozást kell végrehajtani.

2.3.2 Az alapmátrix kiszámítása SYLVESTER képlettel

Egyszeres s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sajátértékek (karakterisztikus gyökök) esetére bizonyítás nélkül adjuk meg SYLVESTER képletét

$$\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \frac{[\mathbf{A} - s_j\mathbf{I}]}{(s_i - s_j)} \qquad (2-15)$$

2.3.3 Az alapmátrix meghatározása LAPLACE transzformációval

A homogén differenciálegyenlet LAPLACE-transzformáltja

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

Ha $s \neq s_i$, akkor

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) = \Phi(s)\mathbf{x}(0)$$

Visszatranszformálva

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}]\,\mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]\,\mathbf{x}(0)$$

Mivel a differenciálegyenletnek az ún. LIPSCHITZ feltételek teljesülésekor csak egyetlen megoldása van, ezért

$$\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}} = \mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] \qquad (2-16)$$

Igy az alapmátrix kifejezése ugyancsak zárt alakban kapható meg. Ez a módszer többszörös sajátértékek esetében is használható.

2.3.4 A szabályozott jellemzők kiszámítása LAPLACE transzformációval

Állandó paraméterű rendszer kimenőjele a LAPLACE transzformáció segítségével is meghatározható. Így ugyanis az

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\,\mathbf{U}(s)$$
$$\mathbf{X}_s(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s) \qquad (2-17)$$

egyenleteket kapjuk. Az elsőből

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,[\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{x}(0)]$$

és így

$$\mathbf{X}_s(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\,\mathbf{U}(s)+\mathbf{C}[s\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) \qquad (2-18)$$

Visszatranszformálva (konvolúciós integrált képezve) és rendezve

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}\,\Phi(t)\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)\,\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (2-19)$$

Ez az eredmény természetesen megegyezik a korábbi (2—12) eredménnyel, ha abban a $t_0 = 0$ helyettesítést használjuk fel.

Az előzőekből az is látszik, hogy az átviteli mátrix

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad (2-20)$$

3. A megfigyelhetőség és az irányíthatóság

A megfigyelhetőség és az irányíthatóság KALMAN által bevezetett fogalma fontos szerepet játszik az állapotmódszerben.

3.1. A megfigyelhetőség

Lineáris rendszerekre szorítkozva azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}(t_0)$ *állapot* megfigyelhető, ha $\mathbf{u}(t)$ és $\mathbf{x}_s(t)$ ismerete a $t_0 \leqq t \leqq t_v < \infty$ időközben elegendő $\mathbf{x}(t_0)$ meghatározásához. Ha ez minden $\mathbf{x}(t_0)$ állapotra igaz, akkor a *rendszert* megfigyelhetőnek mondjuk a t_0 időpontban. Ha minden $\mathbf{x}(t_0)$ állapot minden t_0 időpontra megfigyelhető, akkor a rendszert teljesen megfigyelhetőnek (vagy röviden megfigyelhetőnek) nevezzük.

Az állandó paraméterű rendszer megfigyelhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$[\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, \ldots, [\mathbf{A}^T]^{n-1}\,\mathbf{C}^T] \qquad (3-1)$$

$n\times nq$ hipermátrix rangja $R = n$ legyen (ahol n az $\mathbf{A}$ mátrix méretét jellemzi, hiszen $\mathbf{A}$ $n\times n$ mátrix), vagyis található legyen n számú egymástól lineárisan független oszlopvektor.

Ha $\mathbf{A}$ átlós mátrix, mégpedig egymástól eltérő sajátértékekkel, akkor a szakasz megfigyelhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{C}$ mátrixnak ne legyen zérus oszlopvektora.

Végül ha a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{c}^T$ sorvektorrá fajul el, tehát egyetlen $\mathbf{x}_s(t)$ szabályozott jellemző van, például a szabályozott szakasz egyváltozós, akkor a rendszer megfigyelhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$[\mathbf{c}, \mathbf{A}^T\mathbf{c}, \ldots, [\mathbf{A}^T]^{n-1}\mathbf{c}] \qquad (3-2)$$

$n\times n$ típusú mátrix ne legyen szinguláris, vagyis a determinánsa ne legyen zérus.

3.2. Az irányíthatóság

Ha a rendszer az $\mathbf{x}(t_0)$ kezdeti állapotból az $\mathbf{x}(t_v)$ végállapotba hozható az $\mathbf{u}$ korlátozatlan irányítással véges t_v-t_0 idő alatt, akkor az $\mathbf{x}(t_0)$ állapotot a t_0 időpontban irányíthatónak nevezzük. Ha ez minden $\mathbf{x}(t_0)$ állapotra teljesül, a *rendszert* a t_0 időpontban irányíthatónak nevezzük. Ha minden $\mathbf{x}(t_0)$ állapot minden t_0 időpontra irányítható, akkor a rendszert teljesen irányíthatónak (röviden irányíthatónak) nevezzük.

Az állandó paraméterű rendszer irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$[\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \qquad (3-3)$$

$n\times n$ hipermátrix rangja $R = n$ legyen, vagyis található legyen n egymástól lineárisan független oszlopvektor.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix egymástól különböző elemű átlós mátrix, akkor a rendszer irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix egyik sorának sem szabad zérusnak lennie.

Végül, ha $\mathbf{B} = \mathbf{b}$, vagyis $\mathbf{u}(t) = u(t)$, akkor a rendszer irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$[\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \qquad (3-4)$$

$n\times n$-es hipermátrix ne legyen szinguláris.

3.3. A KALMAN-féle kanonikus alakzat

Az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \qquad (3-5)$$

rendszert a 3—1. ábra szerint bonthatjuk fel kanonikus alakzatra. Itt

1. *IN* az irányítható, de megfigyelhetetlen
2. *IM* az irányítható, de megfigyelhető
3. *NN* az irányíthatatlan és megfigyelhetetlen és
4. *NM* az irányíthatatlan, de megfigyelhető

alrendszert jelenti.

Minden egyes t időpontra van olyan koordináta rendszer az állapottérben, amelyre vonatkozólag az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ összetevő vektorokra bontható.

Ez a felbontás többféleképpen is elvégezhető, de az összetevők n_1, n_2, n_3, n_4 száma mindig ugyanaz.

Az említett koordináta rendszerben az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ (változó vagy állandó) mátrix alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3-6)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4]$$

Állandó paraméterű rendszer dinamikus viselkedésének leírásához az átviteli mátrix (amely a súlyfüggvény mátrix LAPLACE transzformáltja) is felhasználható. A 3–1. ábrából nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{X}_s(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s)$$

Az átviteli függvény (és a súlyfüggvény) tehát csak akkor adja meg teljesen és helyesen a rendszer viselkedését, ha és csak ha a rendszer irányítható és megfigyelhető.

A rendszer felosztását alrendszerekre legkönnyebb az ún. normális vagy diagonális kanonikus alakon elvégezni [lásd pl. a (1–17) vagy az (1–18) alakot], amikor is az **A** mátrix átlós mátrix, a főátlójában álló elemek éppen a valós karakterisztikus gyökök (komplex gyökök esetén a normális alak mátrixa nem tisztán átlós). Felbontás előtt a rendszert célszerű ilyen alakra transzformálni.

Példaként tekintsük a

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{x}_s = [\, c_1 \; 0 \; c_2 \,]\, \mathbf{x}$$

állapotegyenleteket. Legyen p_1, p_2, p_3 és b_1, b_2, c_1, c_3 valós. A rendszer hatásvázlatát a 3–2. ábra mutatja, ahol az integráloperátort Q jelöli. Az átviteli függvény megállapításához Q helyett $1/s = s^{-1}$ veendő. Az átviteli függvény nyilván

$$Y(s) = \frac{b_1 c_1}{s - p_1}$$

és így például $u(t) = 1(t)$ bemenőjelre

$$x_s(t) = -\frac{b_1 c_1}{p_1}(1 - e^{p_1 t})$$

Ez azonban nem adja meg helyesen a teljes harmadrendű rendszer viselkedését, hanem csak az elsőrendű irányítható és megfigyelhető alrendszerét.

A teljes rendszer átmeneti folyamatának számításához az alapmátrix

$$\Phi(t) = e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & & \\ & e^{p_2 t} & \\ & & e^{p_3 t} \end{bmatrix}$$

és így zérus kezdeti feltételek felvételével $u(t) = 1(t)$ bemenőjelre az állapotváltozók

$$x_1(t) = \int_0^t e^{p_1(t-\tau)} b_1 d\tau = -\frac{1}{p_1}(1 - e^{p_1 t}) b_1$$

$$x_2(t) = \int_0^t e^{p_2(t-\tau)} b_2 d\tau = -\frac{1}{p_2}(1 - e^{p_2 t}) b_2$$

$$x_3(t) = 0$$

Ha $p_2 > 0$, akkor a második állapotváltozó: $x_2(t)$ az idő növekedésével minden határon túl nő. Erről az átviteli függvény, vagy a súlyfüggvény nem tájékoztat. A labilitás azonban $x_2(t)$ megfigyelhetetlensége miatt nem jut kifejezésre a kimenő jelben. Valóban, a szabályozott jellemző:

$$x_s(t) = [c_1, \; 0, \; c_3] \int_0^t \begin{bmatrix} e^{p_1(t-\tau)} & & \\ & e^{p_2(t-\tau)} & \\ & & e^{p_3(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

vagyis

$$x_s(t) = -\frac{c_1}{p_1}(1 - e^{p_1 t}) b_1$$

és ez ugyanaz az eredmény, mint amit az átviteli függvénytől kaptunk.

3.4. Néhány megjegyzés a változó paraméterű rendszerekre

A változó paraméterű rendszerek súlyfüggvénymátrixa $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}(t_0) = 0$ feltételezésével (2–9)-től nyilván

$$\mathbf{W}(t, t_0) \begin{cases} = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{B}(t_0), & t \geqq t_0 \\ = \mathbf{0}, & t < t_0 \end{cases} \qquad (3-7)$$

Így az állapotegyenletek alapján könnyen meghatározható a súlyfüggvény-mátrix. A fordított feladat, a rendszer identifikálása a súlyfüggvénymátrix ismeretében már nehezebb feladat.

A $\mathbf{W}(t_1 t_0)$ súlyfüggvény-mátrix (matematikai) megvalósításán (realizálásán) az állapotegyenleteket szokták érteni. Redukálhatatlan, minimális megvalósításon olyan megvalósítást értenek, amelyre az állapottér dimenziója minimális.

Két rendszer egyenértékű, ha egyik állapotvektora a másikba

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}(t)$$

koordinátatranszformációval átvihető, ahol $\mathbf{T}(t)$ nem szinguláris folytonosan differenciálható négyzetes mátrix.

A két rendszer *szigorúan egyenértékű*, ha a **T** mátrix állandó (és nem szinguláris).

A teljes rendszer súlyfüggvénymátrixa a 2. alrendszerével egyezik meg

$$\mathbf{W}(t, t_0) = \mathbf{C}_2(t)\Phi_{22}(t, t_0)\mathbf{B}_2(t_0) = \mathbf{W}_2(t, t_0) \qquad (3-8)$$

A $\mathbf{W}(t, t_0)$ súlyfüggvény-mátrix irányítható és megfigyelhető megvalósítása egyenértékű.

A megvalósítás irreducibilis (minimális), ha és csak ha a 2. alrendszerre vonatkozik. Így minden redukálhatatlan megvalósítása a $\mathbf{W}(t, t_0)$ súlyfüggvény-mátrixnak irányítható és megfigyelhető.

A $\mathbf{W}(t, t_0)$ súlyfüggvény-mátrix tehát az, és csak az irányítható és megfigyelhető alrendszer identifikálását engedi meg. Ez az alrendszer a lehető legkisebb dimenziójú.

KALMAN elmélete szerint tehát az impulzusválasz – vagy súlyfüggvény-mátrix egy rendszert akkor és csak akkor képviselhet teljesen és helyesen, ha a rendszer (teljesen) irányítható és megfigyelhető.

4. Szakaszos-szaggatott működésű rendszerek állapotegyenletei

A mintavételező és digitális, a szakaszos-szaggatott működésű rendszerek állapotegyenletei a folytonos-folyamatos működésű rendszerekéhez hasonló alakban adható meg.

4.1. Az állapotegyenletek alakja

Az egyszerűség kedvéért vezessük be t_k helyett a k, $\mathbf{x}(t_k)$ helyett az x_k, $\mathbf{A}(t_k)$ helyett az $\mathbf{A}_k$ jelölésmódot.

Megemlítjük, hogy általános esetben a T mintavételezési időköz változhat is.

A nemlineáris szakaszos-szaggatott rendszer állapotegyenletei:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k,k) \\ \mathbf{x}_{sk} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k,k) \end{aligned} \qquad (4-1)$$

ahol $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ egyértékű.

A változó paraméterű lineáris rendszer állapotegyenletei:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{F}(k)\mathbf{x}_k+\mathbf{G}(k)\mathbf{u}_k \\ \mathbf{x}_{sk} &= \mathbf{F}(k)\mathbf{x}_k+\mathbf{K}(k)\mathbf{u}_k \end{aligned} \qquad (4-2)$$

Szemléltetésül a 4—1. ábra rajzolható meg. Az ábrán $\Delta(k)$ egy (esetleg változó késleltetési idejű) többváltozós késleltető tagot jelképez.

Az állandó paraméterű lineáris rendszer állapotegyenletei:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{F}\mathbf{x}_k+\mathbf{G}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{x}_{sk} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k+\mathbf{K}\,\mathbf{u}_k \end{aligned} \qquad (4-3)$$

4.2. A változó paraméterű folytonos-folyamatos rendszer átalakítása szakaszos-szaggatottá

A folytonos-folyamatos működésű rendszerek állapotegyenleteit elsősorban a digitális számítógépen való számítás céljára, de a mintavételező rendszerek tárgyalása céljából is szakaszos-szaggatott alakra kell hozni. Más szóval a differenciálegyenletet differenciaegyenletté kell átalakítani.

A (2—2) homogén vektor differenciálegyenletet könnyen átalakíthatjuk, ha a (t_k,t_{k+1}) időközre az $\mathbf{A}(t)$ mátrixot megközelítőleg az $\mathbf{A}(t_k) = \mathbf{A}_k$ állandó értékkel vesszük egyenlőnek. Így ugyanis (2—5)-ből

$$\mathbf{x}_{k+1} = [\exp[(t_{k+1}-t_k)\,\mathbf{A}_k]]\,\mathbf{x}_k \qquad (4-4)$$

Az átmeneti mátrix értéke az $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ állapotból az $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(t_{k+1})$ állapotba való áttérésére vonatkozólag (4—2) első egyenletéből $\mathbf{u}_k = 0$ figyelembevételével tehát

$$\mathbf{F}(k) = \mathbf{F}_k = \Phi_*(t_{k+1},t_k) = \exp\,[(t_{k+1}-t_k)\,\mathbf{A}_k] \qquad (4-5)$$

A csillagos megkülönböztetéssel egyrészt az $\mathbf{A}_k$ = állandó közelítésre utalunk, másrészt azt is ki kívánjuk fejezni, hogy két mintavételezett $\mathbf{x}_{k+1}$ és $\mathbf{x}_k$ vektorérték kapcsolatáról van szó.

Megjegyzendő, ha az EULER-módszerrel alakítjuk át a differenciálegyenletet, akkor az

$$\frac{\mathbf{x}(t_{k+1})-\mathbf{x}(t_k)}{t_{k+1}-t_k} = \mathbf{A}_k\,\mathbf{x}(t_k)$$

összefüggésből az

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = [\mathbf{I}+(t_{k+1}-t_k)\,\mathbf{A}_k]\,\mathbf{x}(t_k)$$

egyenletet kapjuk meg. Szemmel láthatóan a szögletes zárójelben álló kifejezés az átmeneti mátrix sorbafejtésének első két tagja. Fejlettebb numerikus módszerekkel jobb közelítések érhetők el.

5. Az állapotegyenletek megoldása

Az állapot differenciaegyenletet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k\mathbf{x}_k+\mathbf{G}_k\mathbf{u}_k \qquad (5-1)$$

alakban írjuk fel, és az általánosság kedvéért változó mintavételezési időközt is megengedünk.

5.1. A homogén differenciaegyenlet megoldása

Induljunk ki az

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k\mathbf{x}_k \qquad (5-2)$$

egyenletből, itt $\mathbf{F}_k = \Phi_*(t_{k+1},t_k)$, amelyet az egyszerűség kedvéért $\mathbf{Fk} = \Phi_*(k+1,k)$ alakban is jelölhetünk.

A csillag indexszel, mint említettük, a szakaszos-szaggatott működésű rendszer alapmátrixát különböztetjük meg a folytonos működésűétől. A $\Phi^*(k+1,k)$ mátrix csak az $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{x}_{k+1}$ állapotok között létesít kapcsolatot, de semmit sem mond a közbenső állapotokról. Mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k_0}+1 &= \mathbf{F}_{k_0}\mathbf{x}_{k_0} \\ \mathbf{x}_{k_0+2} &= \mathbf{F}_{k_0+1}\mathbf{x}_{k_0+1} = \mathbf{F}_{k_0+1}\mathbf{F}_{k_0}\mathbf{x}_{k_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

könnyen belátható, hogy

$$\Phi_*(k_1,k_0) = \mathbf{F}_{k_1-1}\mathbf{F}_{k_1-2}\ldots\mathbf{F}_{k_0+1}\mathbf{F}_{k_0} \qquad (5-3)$$

és

$$\mathbf{x}_{k_1} = \Phi_*(k_1,k_0)\,\mathbf{x}_{k_0} \qquad (5-4)$$

A szakaszos-szaggatott működésű rendszerek áttérési mátrixának tulajdonságai hasonlóak a folytonos-folyamatos működésű rendszerekéhez.

5.2. Az inhomogén differenciaegyenlet megoldása

A megoldás ugyancsak az iterációs módszerrel határozható meg.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k_0+1} &= \mathbf{F}_{k_0}\mathbf{x}_{k_0}+\mathbf{G}_{k_0}\mathbf{x}_{k_0} \\ \mathbf{x}_{k_0+2} &= \mathbf{F}_{k_0+1}\mathbf{x}_{k_0+1}+\mathbf{G}_{k_0+1}\mathbf{u}_{k_0+1} = \\ &= \mathbf{F}_{k_0+1}\mathbf{F}_{k_0}\mathbf{x}_{k_0}+\mathbf{G}_{k_0}\mathbf{u}_{k_0}+\mathbf{G}_{k_0+1}\mathbf{u}_{k_0+1} \end{aligned}$$

$$= \Phi_*(k_0+2, k_0)\,\mathbf{x}_{k_0} + \Phi_*(k_0+2, k_0+1)\,\mathbf{G}_{k_0}\,\mathbf{u}_{k_0} + \\ + \mathbf{G}_{k_0+1}\,\mathbf{u}_{k_0+1}$$

Folytatva az iterációt a végeredmény:

$$\mathbf{x}_{k_0+m} = \Phi_*(k_0+m, k_0)\,\mathbf{x}_{k_0} + \\ + \sum_{i=0}^{m-1} \Phi_*(k_0+m, k_0+i+1)\,\mathbf{G}_{k_0+i}\,\mathbf{u}_{k_0+i} \qquad (5-5)$$

(4—2) második egyenletébe helyettesítve a szabályozott jellemző vektora is meghatározható.

5.3. Állandó paraméterű rendszer állandó mintavételezési időközzel

Ebben a különleges esetben

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT) \quad \text{és} \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{F} \qquad (5-6)$$

így az átmeneti mátrix kifejezése

$$\Phi_*(k, k_0) = \mathbf{F}^{(k-k_0)} \qquad (5-7)$$

Az előző általános megoldásban a $k_k + m = k$ helyettesítéssel a megoldás

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^{k-k_0}\,\mathbf{x}_{k_0} + \sum_{i=0}^{k-k_0-1} \mathbf{F}^{k-k_0-i-1}\,\mathbf{G}\mathbf{u}_{k_0+i}$$

vagy $j = k - k_0 - i$ bevezetésével

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^{k-k_0}\,\mathbf{x}_{k_0} + \sum_{j=1}^{k-k_0} \mathbf{F}^{j-1}\,\mathbf{G}\mathbf{u}_{k-j}$$

vagy még $l = k - j$ bevezetésével

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^{k-k_0}\,\mathbf{x}_{k_0} + \sum_{l=k_0}^{k-1} \mathbf{F}^{k-l-1}\,\mathbf{G}\mathbf{u}_l \qquad (5-8)$$

Az utóbbi összefüggés bizonyos hasonlóságot mutat a folytonos-folyamatos működésű rendszerek megoldásához, az ottani konvolúciós integrált itt egy konvolúciós szumma váltja fel.

A (4—3) második egyenletéből a szabályozott jellemző vektora is megkapható.

5.4. Egy kiegészítő megjegyzés

A folytonos-folyamatos működésű állandó paraméterű homogén rendszer megoldása, mint (2—5)-ben láttuk:

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(t_0)$$

Helyettesítsünk be $t = kT$, $t_0 = k_0 T$ értékeket, így

$$\mathbf{x}(kT) = \mathrm{e}^{(k-k_0)\,T\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(k_0 T)$$

Eszerint

$$\mathbf{F} = \mathrm{e}^{T\mathbf{A}} = \Phi(T) \qquad (5-9)$$

ahol $\Phi(T) = \Phi(t)\big|_{t=T}$, vagyis a folytonos-folyamatos működésű rendszer mátrixának értéke a $t = T$ helyettesítéssel.

Ha az egyszerűség kedvéért $k_0 = 0$, akkor

$$\mathbf{x}(kT) = \mathrm{e}^{kT\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{F}^k\mathbf{x}(0)$$

illetve

$$\mathbf{x}(kT) = \Phi^k(T)\mathbf{x}(0) = \Phi(kT)\mathbf{x}(0)$$

Így megállapítható, hogy

$$\Phi^*(k,0) = \mathbf{F}^k = \Phi(kT) \qquad (5-10)$$

6. Az irányíthatóság és megfigyelhetőség

Az irányíthatóság és a megfigyelhetőség fogalma kiterjeszthető a szakaszos-szaggatott működésű rendszerekre is.

6.1. A megfigyelhetőség

A szakaszos-szaggatott működésű állandó paraméterű rendszer $\mathbf{x}_0$ állapota megfigyelhető, ha $\mathbf{x}_0$ meghatározható bizonyos számú $\mathbf{x}_{si}$ szabályozott jellemző értékből.

Az állandó paraméterű lineáris rendszer megfigyelhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\,\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{H}\,\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (6-1)$$

$qn \times n$ hipermátrix rangja $R = n$ legyen, vagyis ki lehessen választani a hipermátrix sorainak felhasználásával egy $n \times n$-es zérustól különböző determinánst.

6.2. Az irányíthatóság

A szakaszos-szaggatott működésű rendszert irányíthatónak mondjuk, ha minden k_0 értékre vonatkozó minden $\mathbf{x}_0$ kezdeti állapot az x_v végállapotba hozható a korlátozatlan $\mathbf{u}$ irányítási vektor véges sorozata által.

Az állandó paraméterű rendszer irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy a

$$[\mathbf{G}, \mathbf{F}\,\mathbf{G}, \ldots, \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G}] \qquad (6-2)$$

$n \times nr$ hipermátrix rangja $R = n$ legyen, vagyis a hipermátrix oszlopaiból ki legyen választható egy $n \times n$-es zérustól különböző értékű determináns.

7. Az állapotegyenletek és az impulzus átviteli függvény kapcsolata

Először az állapotegyenletekből az átviteli függvényt határozzuk meg, majd a fordított feladatra mutatunk be néhány példát.

7.1. Az impulzus átviteli függvény meghatározása

Az állandó paraméterű és állandó mintavételezési időközű rendszer (4—3) alakú állapotegyenletein hajtsunk végre z-transzformációt. Vegyük tekintetbe, hogy

$$\mathcal{Z}[f(t+T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+T)z^{-n} =$$

$$= z \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+T)z^{-(n+1)} =$$

$$= z\left[\sum_{n_1=0}^{\infty} f(n_1 T)z^{-n_1} - f(0T)\right] = z\,[F(z)-f(0T)]$$

Ezt a szabályt felhasználva:

$$z\mathbf{X}(z)-z\mathbf{x}(0) = \mathbf{F}\mathbf{X}(z)+\mathbf{G}\mathbf{U}(z)$$
$$\mathbf{X}_s(z) = \mathbf{H}\mathbf{X}(z)+\mathbf{K}\mathbf{U}(z) \qquad (16.7-1)$$

Az első egyenletből:

$$\mathbf{X}(z) = [z\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{G}\mathbf{U}(z)+[z\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}z\mathbf{x}(0) \qquad (16.7-2)$$

A második egyenletbe helyettesítve

$$\mathbf{X}_s(z) = [\mathbf{H}[z\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{G}+\mathbf{K}]\mathbf{U}(z)+\mathbf{H}\,[z\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1} z\mathbf{x}(0) \qquad (16.7-3)$$

Az átviteli függvény kifejezése:

$$\mathbf{Y}_s(z) = \mathbf{H}\,[z\mathbf{I}-\mathbf{F}]^{-1}\,\mathbf{G}+\mathbf{K} \qquad (16.7-4)$$

7.2. Az állapotegyenletek meghatározása

A folytonos-folyamatos működésű rendszerek állapotegyenleteinek meghatározására bemutatott módszerek felhasználhatók a szakaszos-szaggatott működésű rendszerekben is.

Tekintsük például az

$$\frac{X_s(z)}{U(z)} = K\frac{z-z_1^*}{z^2-(p_1^*+p_2^*)z+p_1^*\,p_2^*} \qquad (7-5)$$

alakú átviteli függvényt. Az állapotegyenletek alakja (csupán a végeredmények megadására szorítkozva):

7.2.1 Közvetlen programozás

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_1^*\,p_2^* & p_1^*+p_2^* \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}\mathbf{u}_k$$

$$x_{sk} = [-z_1^*,\ 1,\ 0\ ]\ \mathbf{x}_k$$

7.2.2 Párhuzamos programozás

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1^* & 0 \\ 0 & 0 & -p_2^* \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \end{bmatrix}u_k$$

$$x_{sk} = \left[\frac{-z_1^*}{p_1^*\,p_2^*},\ \frac{p_1^*-z_1^*}{p_1^*(p_1^*-p_2^*)},\ \frac{p_2^*-z_1^*}{p_2^*(p_2^*-p_1^*)}\right]\mathbf{x}_k$$

7.2.3. Iterativ programozás

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} p_2^* & 1 & 0 \\ 0 & p_1^* & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}u_k$$

$$x_{sk} = [(p_2^*-z_1^*),\ 1,\ 0]\,\mathbf{x}_k$$

8. Összefoglalás

Az állapotváltozós szemléletmód új megvilágításba helyezi a szabályozási rendszerek vizsgálatát. Az n-edrendű differenciálegyenlettel megadható rendszerben n jellemző, független változót vezetünk be állapotváltozóként. Az állapotváltozók segítségével az n-edrendű differenciálegyenlet n elsőrendű differenciálegyenletre bontható szét, és ily módon a rendszer vizsgálata leegyszerűsödik.

Megtárgyaltuk az állapotváltozók fogalmát, az állapotegyenletek alakját mind folytonos-folyamatos, mind szakaszos-szaggatott működésű rendszerekben az általános, nemlineáris, neautonóm, illetve ennek egyszerűsítéseképpen az állandó paraméterű lineáris esetre. Több eljárást mutatunk be az állapotegyenletek meghatározására, részben a rendszer fizikai működéséből, részben matematikai leírásából kiindulva.

Bemutattuk az állapotegyenletek megoldási módját. Kitértünk olyan fogalmakra is, mint a megfigyelhetőség és az irányíthatóság.

Az állapotváltozós módszer a nemlineáris rendszerek vizsgálatakor alkalmazott fázissík módszer általánosításának is tekinthető. Különösen a szabályozáselmélet újabb elveinek, optimalizálási módszereinek megfogalmazásakor és alkalmazásakor került előtérbe egyszerűbb és áttekinthetőbb felépítése miatt.

Függelék

Egy szemléltető példa

Induljunk ki a lengő rendszer általános másodrendű lineáris differenciálegyenletéből

$$a_2\ddot{x}_s+a_1\dot{x}_s+a_0x_s = u.$$

Ilyen a differenciálegyenlete egy mechanikai haladó vagy forgó mozgást végző rendszernek, vagy egy soros vagy párhuzamos villamos rezgőkörnek *(F–1. ábra)*. Bevezetve az $x_1 = x_s$; $x_2 = \dot{x}_s$ állapotváltozókat és kimenőjelnek az x_s mennyiséget tekintve, az állapotegyenletek:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a_2 \end{bmatrix}u,$$

$$x_s = [1,\ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $a_0/a_2 = ab$ és $a_1/a_2 = a+b$, ahol a és b $(b>a)$ pozitív valós állandó. Így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -a-b \end{bmatrix} \text{ és } [s\mathbf{I}-\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ ab & a+b \end{bmatrix}$$

A determinánst zérussal egyenlővé téve a karakterisztikus egyenlet:

$$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \det\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}] = s^2+(a+b)s+ab = 0$$

A gyökök $-a$ és $-b$. Az inverz mátrix

$$[s\,\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} = \frac{\mathbf{Adj}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}{\det\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]} = \frac{1}{(s+a)(s+b)}\begin{bmatrix} s+a+b & 1 \\ -ab & s \end{bmatrix}$$

Az átmeneti mátrix ebből (2 – 16) szerint inverz LAPLACE transzformációval kapható meg:

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{b-a}\begin{bmatrix} b\,\mathrm{e}^{-at}-a\,\mathrm{e}^{bt} & \mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt} \\ -ab\,\mathrm{e}^{-at}+ab\,\mathrm{e}^{-bt} & -a\mathrm{e}^{-at}+b\mathrm{e}^{-bt} \end{bmatrix}$$

Ugyanerre az eredményre juthatunk a bemutatott többi módszerrel is.

Sorbafejtéssel (2–14) szerint például

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\frac{t}{1!} + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -a-b \end{bmatrix}\frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} -ab & -a-b \\ ab(a+b)(a+b)^2 - ab \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!} + \dots$$

Ebből több-kevesebb fáradsággal kielemezhető az állapotmátrix zárt alakja.

Egyszerűbben érünk célhoz a (2–15) SYLVESTER féle kifejtési tétellel:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \frac{e^{-at}}{a-b}\begin{bmatrix} b & 1 \\ -ab & -a \end{bmatrix} + \frac{e^{-bt}}{a-b}\begin{bmatrix} a & 1 \\ -ab & -b \end{bmatrix}$$

Kiegészítőleg bemutatjuk a CAYLEY–HAMILTON-módszert. Egyrészt

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & e^{-at} \\ 1 & -b & e^{-bt} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

alapján

$$(b-a)\,e^{\mathbf{A}t} = (be^{-at} - ae^{-bt})\,\mathbf{I} \pm (e^{-at} - e^{-bt})\,\mathbf{A}$$

Ebből

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -a-b \end{bmatrix}$$

és ez természetesen ismét az előző eredményt adja. Eljárhatunk azonban a CAYLEY–HAMILTON-tétel szerint maradékpolinomok felhasználásával is:

$$R(s) = r_0 + r_1 s$$

Mivel a

$$r_0 - r_1 a = e^{-at}$$

$$r_0 - r_1 b = e^{-bt}$$

egyenletrendszer megoldása

$$r_0 = \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{b-a}; \quad r_1 = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

Az alapmátrix

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = r_0\mathbf{I} + r_1\mathbf{A}$$

formában is kiszámítható.

A homogén differenciálegyenlet megoldása $x_1(0) = x_s(0)$, $x_2(0) = \dot{x}_s(0)$ figyelembe vételével

$$x_{h1}(t) = \frac{1}{b-a}\left((be^{-at} - ae^{-bt})\,x_1(0) + (e^{-at} - e^{-bt})\,x_2(0)\right)$$

$$x_{h2}(t) = \frac{1}{b-a}\left(ab(e^{-bt} - e^{-at})\,x_1(0) + (be^{-bt} - ae^{-at})\,x_2(0)\right)$$

Ugrásfüggvény $u(t) = U1(t)$ bemenőjelet, vagyis $u(t) = U$, $t \geq 0$; $u(t) = 0$, $t < 0$ feltételezve a partikuláris megoldás:

$$x_{p1}(t) = \frac{U}{a_2}\frac{1}{b-a}\int_0^t (e^{-a(t-\tau)} - e^{-b(t-\tau)})\,d\tau$$

$$x_{p2}(t) = \frac{U}{a_2}\frac{1}{b-a}\int_0^t (be^{-b(t-\tau)} - ae^{-a(t-\tau)})\,d\tau$$

vagyis

$$x_{p1}(t) = \frac{U}{a_2}\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a(b-a)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt}\right)$$

$$x_{p2}(t) = \frac{U}{a_2}\left(\frac{1}{a-b}e^{-at} - \frac{1}{b-a}e^{-bt}\right)$$

A teljes megoldás $x_1(0) = x_s(0)$; $x_2(0) = \dot{x}_s(0)$ figyelembe vételével

$$x_s(t) = x_{h1}(t) + x_{p1}(t) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left((be^{-at} - ae^{-bt})x_s(0) + (e^{-at} - e^{-bt})\dot{x}_s(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{U}{a_2}\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a(b-a)}e^{-at} + \frac{1}{b(b-a)}e^{-bt}\right)\right.$$

Meg kell jegyezni, hogy ugyanezt az eredményt valamivel egyszerűbben is megkaphatjuk a differenciálegyenlet LAPLACE-transzformációjával:

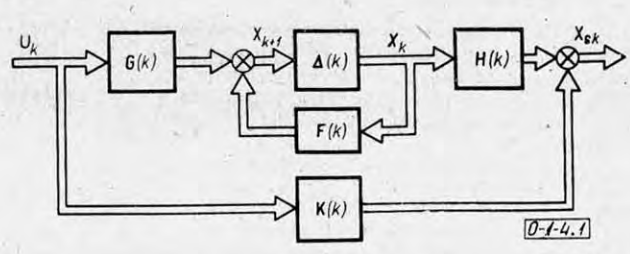
$$a_2 s^2 X_s(s) - a_2 s x_s(0) - a_2 \dot{x}_s(0) + a_1 s X_s(s) - a_1 x_s(0) + a_0 X_s(s) = \frac{U}{s}$$

Ebből az a, b állandók felhasználásával

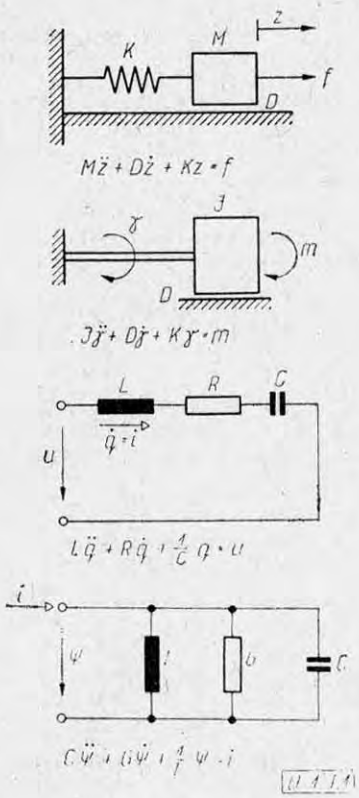
$$X(s) = \frac{(s+a+b)\,x_s(0) + \dot{x}_s(0)}{(s+a)\,(s+b)} + \frac{U}{a_2 s(s+a)\,(s+b)}$$

Visszatranszformálással az előző végeredményre jutunk.

Amint ez az egyszerű példa is mutatja, lineáris állandó és koncentrált paraméterű rendszerek átmeneti folyamatainak kiszámítására általában a LAPLACE-transzformáció szolgáltatja a legegyszerűbb módszert. Változó paraméterű, továbbá nemlineáris rendszerekre azonban a LAPLACE-transzformáció alig, illetve egyáltalán nem alkalmazható. Ilyenkor tehát egyedül az állapotmódszerhez fordulhatunk. Előnyös továbbá az állapotmódszer az elvi vizsgálatokhoz – még az állandó és koncentrált paraméterű rendszerek esetében is.



4–1. ábra



F—1. ábra

IRODALOM

[1] Csáki F.: Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, 1970. Budapest.

[2] Csáki F.—Bars R.: Automatika (Második, bővített kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[3] Csáki F.: Szabályozások dinamikája (Második, javított kiadás) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[4] Zadeh, L. A.—Desoer, C. A.: Linear System Theory. McGraw—Hill, 1963.

[5] Pontrjagin, L. S.—Boltjanszkij, V. G.—Gamkrelidze, R. V.—Miscenko, E. F.: Optimális folyamatok matematikai elmélete. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1969.

[6] Dorf, R.: Time Domain Analysis and Design of Control Systems. Addison-Wesley, 1965.

[7] Athans, M.—Fakb, P. L.: Optimal Control. McGraw-Hill, 1966.

[8] DeRusso, P. M.—Roy, R. J.—Close, Ch. M.: State Variables for Engineers, John Wiley, 1966.

[9] Elgerd, O.: Control Systems Theory. Mc. Graw-Hill, 1967.

[10] Schultz, D.—Melsa, J.: State Functions and Linear Control Systems. McGraw-Hill, 1967.

[11] Ogata, K.: State Space Analysis of Control Systems. Prentice Hall, 1969.

[12] Savely, Y.: Systèmes et asservissements linéaires échantillonnes. Dunod, 1969.

Érkezett: 1971. I.

KÜLFÖLDI HÍREK

Tovább növelik a generátorok és a távvezetékek feszültségszintjét. A turbogenerátorokat eddig maximálisan 21 kV kapocsfeszültségre gyártották, újabban a *Szovjetunióban* egy vízturbinával hajtott generátort 110 kV üzemfeszültségre készítettek és így az transzformátor nélkül szolgáltat (közvetlenül) energiát a 110 kV-os távvezeték-hálózatba.

A próbaüzemnél a hidrogenerátort 120 kV-ra gerjesztették fel, amit a gép állórészének különleges, újfajta elrendezésű tekercselése tett lehetővé.

A Szovjetunióban jelenleg 220 kV kapocsfeszültségű hidrogenerátor tervezésével is foglalkoznak.

A villamos energia váltakozóáramú átvitelénél az *USA*-ban már építettek 765 kV-os távvezetéket kipróbálásra, az *angol*, a *francia* és az *olasz* állami villamos művek pedig együttműködnek a 765 kV-os feszültségszint kutatásában.

Angliában most megkezdték az 1000—1500 kV feszültségű energiaátvitelre vonatkozó kutatásokat, ami a vizsgálatok új fázisát jelenti.

Leatheroead-ben jelenleg új kísérleti berendezést létesítenek, kb. 76 km hosszú távvezetékszakasszal, a különböző oszlopok, vezetékek és szigetelők kipróbálása céljára. A kísérleteket 5,2 millió voltos lökőgenerátorral fogják végezni. Ezt a kb. 20 m magas generátort használatkor kigördítik a szabadtérre.

A vizsgálatok fő problémái: a szikraközök átívelése a hosszú homlokidejű kapcsolási túlfeszültségek miatt, és a védekezés a szigetelők szennyeződése ellen. A túlfeszültségeket a névleges feszültség 1,5—1,6-szorosára kívánják korlátozni. További megvizsgálandó kérdések közé tartozik a koronaveszteség és a rádiózavarás.

A távvezetékek feszültségszintjének növelésével az átviteli teljesítmény, és egyben a rendszer stabilitása is, hatékonyan növelhető, de csak jelentős költségek árán. Ezért a Szovjetunióban az eredetileg 400 kV-ra tervezett távvezetékek feszültségét 500—525 kV-ra emelik fel. Ma már a meglevő 500 kV-os távvezetékek hossza több mint 10 000 km.

Az igen nagy feszültségű távvezetékek hazai viszonylatban is érdekesek, mert azt tervezik, hogy a *KGST országok* Prágából irányított egyesített villamosenergia rendszerét, amelyben hat ország saját rendszere jár párhuzamos üzemben, most egy 750 kV-os feszültségű távvezeték útján összekötik a Szovjetunió európai rendszerével. Ezáltal mintegy 4000 MW teljesítőképesség beépítése lenne megtakarítható.

(Energy International, 1970. II.)

*

A gyorsszaporító reaktorok fejlesztésében jelenleg a Szovjetunió vezet Nagy-Britannia, az USA, Franciaország és az NSZK előtt.

A BR-1 és BR-5 ($5MW_{term.}$) kísérleti reaktorok után — amelyekkel számos sugárzási és üzemi tapasztalot szereztek — sótalanító berendezéssel kapcsolt BN 350 jelű atomerőművet helyezték üzembe a Káspi-tenger partján. A BOR—60 jelű 60 MW-os kísérleti reaktor kritikussá vált.

A BN 350 prototípus üzemi eredményeinek bevárása nélkül Moszkvában már is bejelentették, hogy megkezdik egy 600 MW villamos teljesítőképességű gyorsszaporító reaktor építését.

(Atompraxis, 1970.)

Byl