MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 25/1982

ХРОМАТИЧЕСКИЕ НАБОРЫ И КЛАССЫ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Густав Бурош, Дитлинде Лау, Эберхард Шмидт

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе обобщается одна теорема, установленная К. Бензакеном [1]

Бензакен рассматривает биекцию ϕ между множеством всех конечных Шпернеровых гиперграфов H и множеством M_1 всех непостоянных монотонных булевых фнкций f. Его рассмотрения были связаны с интервалом

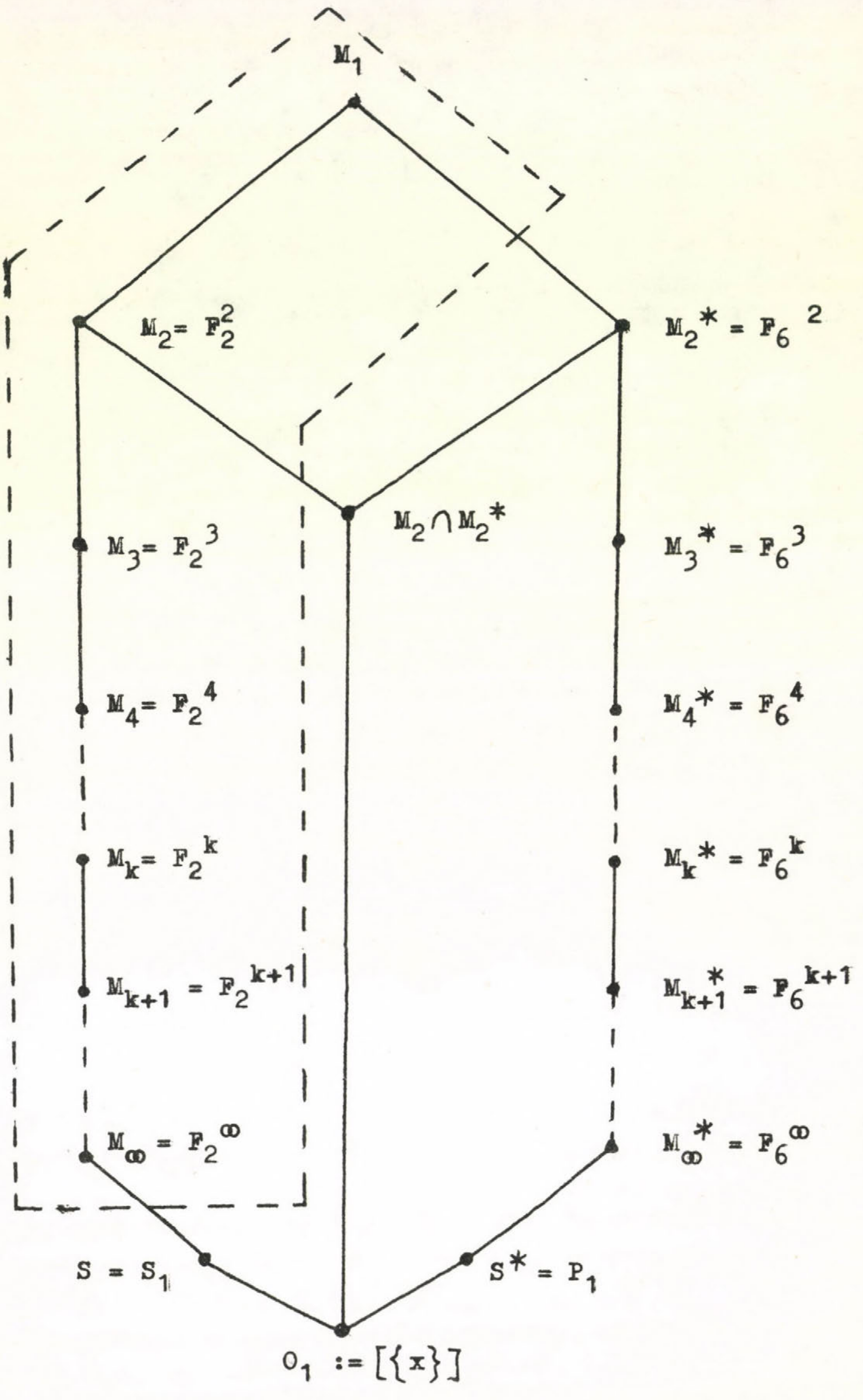
$$[M_\infty, M_1] = \{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_\infty\} \qquad \text{где}$$

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots \quad M_\infty := \bigcap_{i \geq 1} M_i,$$

структуры Поста всех замкнутых множеств булевых функций /см. изобр. 1./.

<u>Теорема</u> /К. Бензакен/ /[1]/. Шпернеров гиперграф обладает слабым хроматическим числом $\chi(H) = k+1$, $1 \leq k < \infty$, тогда и только тогда, когда $f := \phi(H) \in M_k \setminus M_{k+1}$, $1 \leq k < \infty$.

Мы исходим из q-мерного произведения $[M_\infty, M_1]^q$, получая его также в качестве интервала замкнутых множеств некоторой интерактивной алгебры Поста P_{Σ_q}. По теореме Бензакена информация о слабом хроматическом числе гиперграфа равносильна информации о положении функции $f \in M_1$ в интервале $[M_\infty, M_1]$. Сопоставим каждому Шпернеровому гиперграфу H хроматический набор $(k_1, \ldots, k_q)$ и функцию $\phi(H) \in P_{\Sigma_q}$ и покажем, что информация о хроматическом наборе гиперграфа H равносильна информации о положении функции $\rho(H)$ в интервале $[M_\infty, M_1]^q$.



отобр. 1 : интервал $[O_1, M_1]$

Как специальный случай получаем формулировку теоремы Бензакена.

Укажем иную интерпретацию:

Существует q естественных гомоморфизмов P_{Σ_q} на P_2 /P_2 - это алгебра булевых функций/, и интервал $[M_\infty, M_1]$ в P_{Σ_q} определяется с помощью именно таких гомоморфизмов. Поэтому наш результат можно интерпретировать и как вклад, хотя и довольно специальный, в решение вопроса о том, какие свойства одной итеративной алгебры Поста B /здесь такое свойство- теорема Бензакена/ можно переносить на другую итеративную алгебру Поста A при знании естественных гомоморфизмов A на B. Вопросы такого рода рассматривались также в [5]-[9].

В изображении 1 задан интервал $[O_1, M_1]$ из структуры Поста замкнутых множеств из P_2 ([1], [2]) и замаркирован интервал $[M_\infty, M_1]$. Используются обозначения из [1], [2]. В [2] находятся для каждого из этих классов системы образующих. В [1] Бензакен исходит из того, что $f \in P_2$ лежит в M_k, $1 \leq k < \infty$, точно тогда, когда любые k дизъюнкции сокращенной коньюнктивной нормальной формы функции f имеют по меньшей мере одну общую переменную. Классы M_k^*, $1 \leq k < \infty$, определяются двойственным образом, т.е. изоморфио к M_k. Дальше, положим $M_\infty := \bigcap_{i \geq 1} M_i$, $M_\infty^* := \bigcap_{i \geq 1} M_i^*$, $S_1 := [\{x_1 \vee x_2\}]$, $P_1 = [\{x_1 \wedge x_2\}]$.

2. ГИПЕРГРАФЫ И ИХ РАСКРАСКИ

Известно следующее определение гиперграфа: /Конечный/ гиперграф $H=(X; E_1, \ldots, E_t)$ состоит из конечного непустого множества X, называемого множеством вершин, и из множеств E_i ($\emptyset \subset E_i \subseteq X, i = 1, 2, \ldots, t$), называемых ребрами. Мы здесь используем другое определение, трактуемое и как обобщение, и как специальный случай известного понятия гиперграфа.

<u>Определение</u>. Пусть V, W, Z - попарно непересекающиеся мно-

жества, $R \subseteq W \times Z$

$X := V \cup R$

$\emptyset \subset E_i \subseteq X, \quad i=1, 2, \ldots, t.$

$H = (X, E_1, \ldots, E_t)$ называется обобщенным геперграфом, когда имеет место

$$\forall i, w, z, z' : \{(w,z),(w,z')\} \subseteq E_i \quad \Rightarrow \quad z = z' \qquad (1)$$

и $$E_i \cap V \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, t. \qquad (2)$$

Множества E_i как обычно называем ребрами. Множество Z интерпретируем как множество красок: если $(w,z) \in R$, то говорим, что w раскрашен краской z. Заметим еще, что один и тот же элемент $w \in W$ в различных ребрах может быть раскрашен различными красками.

Пример 1: Пусть $V = \{1, 2, 3\}$, $W = \{1', 2'\}$,
$Z = \{., +\}$, $R = \{(1',\cdot),(1', +),(2',\cdot)\}$,

$E_1 = \{1,2,(1',\cdot)\}$, $E_2=\{1,2,(1',+)\}$, $E_3 = \{2,3,(1',\cdot), (2',\cdot)\}$

$E_4 = \{1,3, 1',\cdot)\}$, $E_5=\{1,3,(1',+),(2',\cdot)\}$, $E_6=\{2,3,(1',+),(2',\cdot)\}$.

$E_7 = \{1,2,(2',\cdot)\}$, $E_8= \{1,2,3,(1',+)\}$. Тогда

$H_1 = (X;E_1,\ldots,E_7)$ и $H_2=(X;E_1,\ldots,E_8)$ являются гиперграфами.

Гиперграф $H = (X; E_1,\ldots,E_t)$ называется Шпернеровым [1], когда для $i \neq j$ имеет место $E_i \nsubseteq E_j$ $(i,j = 1,2,\ldots,t)$. В примере 1 гиперграф H_1 является Шпернеровым, а H_2 нет.

Дальше мы рассмотрим только Шпернеровы гиперграфы. Каждый гиперграф H однозначно определяет Шпернеров гиперграф, состоящий из всех минимальных ребер гиперграфа H. В 5 пункте данной статьи рассмотрим преобразования графов. Договоримся о том, что возникающий при этих преобразованиях, может быть, не Шпернеров гиперграф автоматически будет заменен соответствующим Шпернеровым гиперграфом.

Шпернеров гиперграф $H = (X; E_1, \ldots, E_t)$, для которого $X = V \cup R$, $R \subsetneq W \times Z$, $|Z| = q$, называется $(k_1, \ldots, k_q)$ - раскрашиваемым, когда имеет место:

$$\forall_i \exists \phi_i \ \forall_j : (1 \leqq i \leqq q \wedge (\phi_i : V \to \overline{1k_j}) \wedge E_j \subsetneq V \cup W \times \{z_i\} \Rightarrow |\phi_i(E_j \cap V)| \geqq 2) \qquad (3)$$

Рассматривая элементы $\phi_i(v)$, $v \in V$, как краски, условие (3) можно трактовать следующим образом:

Раскраской точек из V хотим достигать того, чтобы любое ребро E_j гиперграфа или в подребре $E_j \cap V$ или в подребре $E_j \cap R$ было бы раскрашено по меньшей мере двумя различными красками. Эта цель достигнута уже, когда E_j R содержит хотя бы два поразличному раскрашенные элементы. Если этого нет, то для любой краски $z_i \in Z$ должно существовать отображение ϕ_i такое, чтобы пересечение любого ребра с V, пересечение с R которого содержит не больше красок, чем z_i , содержало хотя бы две различные краски.

Определение. Гиперграф H обладает хроматическим набором $(k_1, \ldots, k_q)$, когда он является $(k_1, \ldots, k_q)$ - раскрашиваемым, но для $i = 1, \ldots, q$ не является $(k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_q)$ - раскрашиваемым.

Пример 2: Гиперграф $H = \{X; E_1, \ldots, E_7\}$ из примера 1 является (3, 2,) - раскрашиваемым, но не (3, 1) - или (2, 2) - раскрашиваемым гиперграфом, следовательно, он обладет хроматическим набором (3, 2) .

Если у заданного гиперграфа H для некоторого i условие (3) не выполнимо ни для никакого натурального числа k_i , /это имеет место точно тогда, когда существует ребро $E_j \subsetneq V \cup W \times \{z_i\}$, пересечение с V которого пусто или мощности 1/, то на i-тое место хроматического набора гиперграфа H ставим ∞ .

3. АЛГЕБРА P_{Σ_q}

Пусть q - фиксированное натуральное число, $q \geqq 1$. Пуст дальше

$$A_2 := \{0,1\}, \quad B_q := \{2, 3, \ldots, q+1\}.$$

Через $P_{\Sigma_q}^{n,m}$ обозначим множество всех $(n+m)$ - местных функций

$$f^{n,m}: A_2^{\,n} \times B_q^{\,m} \to A_2,$$

где $n,m \geqq 0$. Дальше $P_{\Sigma_q} = \bigcup\limits_{n,m \geqq 0} P_{\Sigma_q}^{n,m}$.

Функции из P_{Σ_q} определяются нами формулами над алфавитами переменных $X := \{x, x_1, x_2, \ldots,\}$ и $Y := \{y, y_1, y_2, \ldots,\}$, причем переменные из X принимают значения только из A_2 и переменные из Y принимают значения только из B_q. Переменная функции $f^{n,m}(\underline{x}, \underline{y})$ называется существенной, когда существуют значения

$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_i' \in E_2$ и $b_1, \ldots, b_m \in B_q$ такие, что

$$f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n, \; b_1, \ldots, b_m) \neq f(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n, \; b_1, \ldots, b_m).$$

Аналогично определяются существенные переменные из Y. Всякая несущественная переменная некоторой функции называется фиктивной. Функции, отличающиеся только фиктивными переменными, будем считать одинаковыми. Местность функций будем опускать, когда это возможно без недоразумений.

Множество P_{Σ_q} вместе с операциями суперпозиции:

a/ перенумерование переменных из X или из Y между собой;

b/ идентифицирование некоторых переменных из X или из Y друг с другом;

c/ добавление или отпущение фиктивных переменных;

d/ подстановка функции вместо переменной x представляет собой алгебру, обозначаемую также через P_{Σ_q}. Каждому множеству $A \subseteq P_{\Sigma_q}$ сопоставляется его замыкание $[A]$ относительно этих операций. Если $A = [A]$, то множество A называется замкнутым.

Непосредственно видно, что $P_2 \subseteq P_{\Sigma_q}$. Используем привычные для булевых функций обозначения и для функций из P_{Σ_q}, поскольку и те и те имеют одинаковую область значений.

Кроме того определим функцию

$$e_i(y) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad y=i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad i = 2, 3, \ldots, q+1$$

В дальнейшем воспользуемся обозначениями

$$\underline{i} = (i,i,\ldots,i) \qquad i=2,\ldots,q+1$$

$$\underline{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$\underline{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

$$\underline{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$$

$$E_{\underline{\beta}}(\underline{y}) := \bigwedge_{i=1}^{m} e_{\beta_i}(y_i) \qquad \underline{\beta} \in B_q^m .$$

Любая функция из P_{Σ_q} обладает нормальным представлением

$$f(\underline{x},\underline{y}) = \bigvee_{\underline{\beta} \in B_q^m} f_{\underline{\beta}}(\underline{x})\ E_{\underline{\beta}}(\underline{y}). \tag{4'}$$

где

$\underline{f}_s(\underline{x}) = f(\underline{x}, \underline{\beta})$ ([5],[6]).

Функция $f_{\underline{\beta}}$ называется $\underline{\beta}$- компонентой функции f. Очевидно, что отображение

$$\tau_i : f^{n,m} \to f_{\underline{i}}$$

является гомоморфным отображением

$$P_{\Sigma_q} \quad \text{на} \quad P_2, \quad i=2,\ldots,q+1.$$

Дальше, определим

$$M_q^* := \bigcup_{n,m \geq 0} \{f^{n,m} \mid \forall \underline{\beta} \in B_q^m : f_{\underline{\beta}} \in M_1\}$$

$$K(M_{i_1},\ldots,M_{i_q}) := \left(\bigcap_{j=1}^{q} \tau^{-1}(M_{i_j}) \right) \cap M^*, \qquad 1 \leq i_j \leq \infty.$$

Легко видно, что множества M^*, $K(M_{i_j},\ldots,M_{i_q})$ замкнуты. Пусть $(\Phi, \subseteq)$ обозначает структуру всех замкнутых множеств алгебры P_{Σ_q} и положим

$$\Phi_M\colon \{K(M_{i_1},\ldots,M_{i_q}) \mid 1 \leqq i_j \leqq \infty, \quad j = 1,\ldots,q\}.$$

Теорема 1: $(\Phi_M, \subsetneqq)$ является дистрибутивной структурой. Эта структура тождественна интервалу

$$[K(M_\infty,\ldots,M_\infty),\ K(M_1,\ldots,M_1)] \text{ в } (\Phi, \subsetneqq)$$

и изоморфна $[M_\infty, M_1]^q$.

Эта структура именно та упомянутая в п. 1 исходная точка нашего обобщения теоремы Бензакена. Для доказательства нам нужны две леммы.

Лемма 1: Множества $\bar{K}_j\colon = K(M_{i_1},\ldots, M_{i_j+1}, \ldots, M_{i_q})$, $j=1,\ldots,q$, являются предполными подалгебрами множества
$K\colon = K(M_{i_1}, \ldots, M_{i_j}, \ldots, M_{i_q})$.

Доказательство: Очевидно, что $\bar{K}_j \subset K$. Пусть теперь $f^{n,m} \in K \setminus \bar{K}_j$. Тогда $f_j(\underline{x}) \in M_{i_j} \setminus M_{i_j+1}$, следовательно $\tau_i\,([\bar{K}_j \cup \{f\}])=M_{i_j}$, поскольку M_{i_j+1} предполный класс в M_{i_j} , см. отобр. 1. Поэтому для произвольной функции $g^{r,s} \in K$ в $[\bar{K}_j \cup \{f\}]$ существует функция $g^{(i)}$, для которой $\tau_i(g^{(i)})= \tau_i(g)$. Кроме того, в $\bar{K}_j$ содержится по определению функция

$$\ell^{r+q,s}\,(x_1,\ldots,x_r,\ x_{r+1},\ldots,x_{r+q},\ y_1,\ldots,y_s)\ ,$$

определенная формулой

$$\ell^{\,r+q,s}\,(\underline{x},\underline{y}) := \begin{cases} x_{r+t} & \text{если} \quad \underline{y} = \underline{t+1}\ ,\ t = 1,\ldots,q \\ g^{r,s} & \text{иначе}\ . \end{cases}$$

Подстановкой функций $g^{(i)}$ в функцию ℓ вместо переменных x_{r+i}, $i = 1,\ldots,q$, получаем в $[K_j \cup \{f\}]$ функцию $g^{r,s}$. При образовании суперпозиций надо обратить внимание на следующее: Если функция u возникает подстановкой функции $w \in P_{\Sigma_q}$ в функцию $z \in P_{\Sigma_q}$ вместо некоторой переменной x_j , то функция

$u_{\underline{i}}$ /$\underline{i}$ - компонента функции u/ возникает подстановкой функции $w_{\underline{i}}$ /$\underline{i}$ - компоненты функции w / в функцию $z_{\underline{i}}$ /$\underline{i}$ - компоненту функции z / вместо переменной x_j.

Лемма 2: $\{\bar{K}_1,\ldots,\bar{K}_q\}$ является множеством всех содержащих в себе $K(M_\infty,\ldots,M_\infty)$ предполных подалгебр алгебры $K(M_{i_1},\ldots,M_{i_q})$ и обладает мощностью q.

Доказательство: Очевидно, $\bar{K}_i \neq \bar{K}_j$ для $i \neq j$. Пусть $f_j \in K \setminus \bar{K}_j$, $j = 1,\ldots,q$. Как известно, M_{i_j+1} является единственной содержащей множество M_∞ предполной подалгеброй алгебры M_{i_j} /см. отобр. 1/, поэтому

$$T_j[M_\infty \cup \{f_j\}] = M_{i_j}.$$

Теперь заключения идут дальше как в доказательстве леммы 1, обращая внимание на то, что $\ell^{r+q,s}$ лежит и в M_∞.

Из лемм 1 и 2 следует, что множество

$$\{K(M_{i_1},\ldots,M_{i_q}) \mid 1 \leq i_j \leq \infty, \quad j = 1 =\ldots, q\}.,$$

является интервалом $[K(M_\infty,\ldots,M_\infty),\ K(M_1,\ldots,M_1)]$ в $(\Phi,\subsetneqq)$, и что этот интервал антиизоморфен к структуре $\{(a_1,\ldots,a_q) \mid a_i \in N \cup \{\infty\},\ i=1,\ldots,q\}$ относительно покоординатного отношения $\leq$ /где положим $n \leq \infty$ для всех $n \in N$ /. Следовательно, оно является дистрибутивной структурой /ср. [10]/, изоморфной $[M_\infty, M_1]^q$. Этим доказана теорема 1.

4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МНОЖЕСТВА M^*

В этом участке определим формулы для функций множества M^* и исследуем на основе системы аксиом эквивалентность этих формул. При этом окажется, что множество M^* конечно аксиоматизуемо [3].

Даем определение вспомогательных формул:

1. Любой элемент множества

$$\mathfrak{E} := \{e_2(y_1),\ e_2(y_2),\dots,\ e_3\,(y_1),\ e_3(y_2),\dots,e_{q+1}(y_1),e_{q+1}(y_2),\dots,\}$$

является вспомогательной формулой.

2. Если E и E' - вспомогательные формулы, то и $E \cdot E'$ и $E \vee E'$ - вспомогательные формулы.

3. Вспомогательные формулы образованы только по 1. и 2.

Пусть $\mathfrak{h}\gamma$ - множество всех вспомогательных формул и $\mathfrak{J}(y_j)$ - сокращенный способ записи вспомогательной формулы

$$e_2(y_j) \vee e_3(y_j) \vee \dots \vee e_{q+1}\,(y_j)$$

Определение формул:

1. Любой элемент множества

$$X = \{x,\ x_1,\ x_2,\dots\}$$

является формулой.

2. Если F_1, F_2 - формулы и E - вспомогательная формула, то $F_1 \cdot F_2$, $F_1 \cdot E$, $E \cdot F_1$, $F_1 \vee F_2$ - формулы.

3. Формулы образованы только по 1. и 2.

Будем держаться привычным договоренностям о пользовании скобок и о сопоставлении функций формулам [2]. Пусть $\mathfrak{M}^*$ - множество всех формул.

Лемма 3: Любая формула из $\mathfrak{M}^*$ представляет собой функцию из M^* и любая функция из M^* представима формулой из $\mathfrak{M}^*$.

Доказательство предоставляем читателю.

Две формулы F_1 и F_2 называются эквивалентыми, когда им соответствует одна и та же функция из P_{Σ_q} .

Для функции $f^{n,m}(\underline{x},\underline{y}) \in P_{\Sigma_q}$ пусть

$$N_f := \{\underline{\gamma} \in A_2^n \times B_q^m \mid f(\underline{\gamma}) = 1\}.$$

Для функции $\underline{\gamma} \in A_2^n \times B_q^m$ пусть $A_2(\underline{\gamma}) := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ и

$B_q(\underline{\gamma}) := (\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m})$.

Если $f^{n,m}(\underline{x},\underline{y}) \in M^*$ и $\underline{\beta} \in B_q^m$, то $f^{n,m}(\underline{x},\underline{y})$ – монотонная булевая функция, обычная сокращенная днф которой пусть будет обозначена через $\underline{\tilde{f}_\beta}$. Формула

$$\bigvee_{\underline{\gamma} \in N_f} \tilde{f}\, B_q(\underline{\gamma}) \cdot E_{B_q(\underline{\gamma})} \qquad (5)$$

называется кононической нормальной формой /Кнф/ функции

$f(\underline{x}, \underline{y}) \in M^*$

Аксиомы для $\mathfrak{M}^*$.

Для любых формул F_1, F_2, F_3 и любых вспомогательных формул E_1, E_2, E_3 и $\mathfrak{J}(y_j)$ имеет место:

(A1) $F_1 \cdot F_2 = F_2 \cdot F_1$

(A2) $F_1 \cdot E_1 = E_1 \cdot F_1$

(A3) $F_1 \cdot (E_1 \cdot E_2) = F_1 \cdot (E_2 \cdot E_1)$

(A4) $F_1 \vee F_2 = F_2 \vee F_1$

(A5) $F_1 \cdot (E_1 \vee E_2) = F_1 (E_2 \vee E_1)$

(A6) $(F_1 \cdot F_2) \cdot F_3 = F_1 \cdot (F_2 \cdot F_3)$

(A7) $(F_1 \cdot E_1) \cdot E_2 = F_1 \cdot (E_1 \cdot E_2)$

(A8) $(F_1 \cdot F_2) \cdot E_1 = F_1 \cdot (F_2 \cdot E_1)$

(A9) $F_1 \cdot [(E_1 \cdot E_2) \cdot E_3] = F_1 \cdot [E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3)]$

(A10) $(F_1 \vee F_2) \vee F_3 = F_1 \vee (F_2 \vee F_3)$

(A11) $F_1 [(E_1 \vee E_2) \vee E_3] .= F_1 [E_1 \vee (E_2 \vee E_3)]$

(A13) $F_1\cdot(E_1 \vee E_2) = F_1\cdot E_1 \vee F_1\cdot E_2$

(A14) $(F_1 \vee F_2)\cdot E_1 = F_1\cdot E_1 \vee F_2\cdot E_1$

(A15) $F_1 \vee F_1 = F_1$

(A16) $F_1\cdot(E_1 \vee E_1) = F_1\cdot E_1$

(A17) $F_1\cdot F_1 = F_1$

(A18) $F_1\cdot(E_1\cdot E_1) = F_1\cdot E_1$

(A19) $F_1\cdot \ (y_j)\mathfrak{I} = F_1$

(A20) $F_1 \vee F_1\cdot F_2 = F_1$

(A21) $F_1 \vee F_1\cdot E_1 = F_1$

(A22) $F_1 \vee F_2 \cdot e_i(y_\ell)\cdot e_j(y_\ell) = F_1$ для $i \neq j$.

Для любых формул F_1, F_2 из $\mathfrak{M}^*$ $F_1=F_2$ называется тождеством над $\mathfrak{M}$.

Правила вывода тождеств /ср. [3]/

1. $\dfrac{\Lambda}{x_1=x_1}$, где Λ - пустое множество.

2. $\dfrac{F_1(F_2)=F_3,\ F_2=F_4}{F_1(F_4)=F_3}$, замена некоторого вхождения формулы F_2 в формулу $F_1(F_2)$ формулой F_4.

3. $\dfrac{F_1(\ldots,x_i,\ldots) = F_2(\ldots,x_i,\ldots)}{F_1(\ldots,F_3,\ldots) = F_2(\ldots,F_3,\ldots)}$, подстановка любой формулы F_3 во все вхождения переменной x_i в формулах исходного тождества, причем не исключено, что x_i не входит в $F_1(\ldots, x_i, \ldots)$ или $F_2(\ldots, x_i, \ldots)$.

Через $\mathfrak{J}$ пусть обозначено множество всех выводимых из аксиом /схем аксиом/ (A1) - (A22) тождеств над $\mathfrak{M}^*$.

Лемма 4. Для любых формул $F_1, F_2 \in {}^*$ имеет место: F_1 эквивалентно F_2 тогда и только тогда, когда $F_1 = F_2$ является тождеством из $\mathfrak{J}$.

Доказательство: Пусть F_1 эквивалентно F_2. Легко видно, что из Кнф $(f_1) \neq$ Кнф (f_2) и следует $f_1 \neq f_2$. От этого каноническая нормальная форма любой функции из M^* определена однозначно. Для доказательства леммы достаточно показать, что любую формулу F, представляющую функцию $f^{n,m}(\underline{x}, \underline{y}) \in M^*$, можно преобразовать с помощью аксиом в $\mathfrak{A}$: = Кнф(f).

<u>1 шаг</u>: $F \xrightarrow{S_1} F^{(1)} := K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$, где каждый K_i возникает из элементов из X и Y образованием произведений, причем выступает по меньшей мере один множитель из X. Доказательство о переходе S_1 легко можно вести с использованием (A10),...,(A14), индукцией над числом $\mu_1(F)$ символов $\vee$ в формуле F.

<u>2 шаг</u>: $F^{(1)} \xrightarrow{S_2} F^{(2)} := L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_s$, где каждый L_i имеет форму

$$\left(\bigwedge_{j \in Z_i} x_j\right) \cdot E_{\underline{\beta}}, \quad \underline{\beta} \in B_q^m \tag{6}$$

и не является подформулой другого члена дизъюнкции L_j, $j \neq i$.

Для этого сначала от каждого K_i переходим к произведению $K_i' \cdot K_i''$, у которого $K_i'(K_i'')$ является произведением над $X(Y)$. Это возможно по (A1) - (A3), (A6) - (A9), (A17), (A18), (A20),(A21).После этого еще отсутствующие в K_i'' множители добавляются с помощью (A19) и полученные произведения сортируются по растущим индексам переменных из X и Y, в конце сокращаются лишние члены с помощью (A4), (A5), (A15), (A18), (A20) - (A22).

<u>3 шаг</u>: Собрание тех членов дизъюнкции в $F^{(2)}$, у которых один и тот же участок типа $E_{\underline{\beta}}$, в члены вида

$$\mathfrak{A}' \cdot E_{\underline{\beta}}$$

где $\mathfrak{A}'$ - формула из $\vee$, $\cdot$ над X. /Это возможно по (A4) (A10), (A12).) ./ После этого из каждой подформулы типа $\mathfrak{A}'$ привычным образом получаем сокращенную днф представленной формулой $\mathfrak{A}$ монотонной булевой функции. Этим выведена Кнф(5) функции f .

Доказательство обратного утверждения предоставляем читателю. Оно просто.

5. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БЕНЗАКЕНА

Сначала рассматриваем отображение ρ множества всех Шпернеровых гиперграфов на множество всех функций в M^*. Для любого Шпернерового гиперграфа $H = (V, R; E_1,\dots, E_t)$ пусть $\rho(H) := f \in M^*$, где f функция, заданная формулой

$$f_H := K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_t \tag{7}$$

причем для каждого E_i вида

$$E_i = v_1,\dots,v_a,(w_{\ell_{1,1}}, z_1),\dots, (w_{\ell_{1,p_1}}, z_1),\dots,(w_{\ell_{q,1}}, z_q),\dots,(w_{\ell_{q,p_q}}, z_q)\},$$

$$a \geqq 1, \quad p_1,\dots,p_q \geqq 0 \tag{8}$$

поставляем

$$K_i := x_{v_1},\dots,x_{v_a} \cdot \bigwedge_{i=2}^{q+1} \bigwedge_{j=1}^{p_{i-1}} e_i(y_{\ell_{i-1,j}}).$$

Это отображение ρ, очевидно, сурьективно на M^*, но в общем не инъективно. Для этого даем два примера:

<u>Пример 3</u>: Пусть $q = 1, \quad V = \{1,2\}, \quad W = \{1'\}$

$Z = \{z_1\}, \quad X = \{1,2,(1',z_1)\}$,

$H_1 = \{E_1, E_2\}, \quad H_2 = \{E_3, E_4\}$,

$E_1 = \{1,(1',z_1)\}, \quad E_2 = \{2\}, \quad E_3 = \{1\}$,

$E_4 = \{2,(1',z_1)\}$.

<u>Пример 4</u>: Пусть $q = 1, \quad V = \{1\}, \quad W = \{1',2'\}$,

$$X = \{1, (1', z_1), (1', z_2), (2', z_1), (2', z_2)\},$$

$$H_1 = \{E_1, E_2\}, \quad H_2 = \{E_1, E_3\},$$

$$E_1 = \{1, (1', z_1)\}, \quad E_2 = \{1, (2', z_1)\},$$

$$E_3 = \{1, (1', z_2), (2', z_1)\}.$$

В обоих случаях имеет место равенство $\rho(H_1) = \rho(H_2)$, причем значение q существенно для выполнения этого равенства.

Лемма 5. Если для двух Шпернеровых гиперграфов H_1, H_2 имеет место равенство

$$\rho(H_1) = \rho(H_2),$$

то у H_1 и H_2 одинаковые хроматические наборы.

Доказательство: Из-за равенства $\rho(H_1) = \rho(H_2)$ функции f_{H_1} и f_{H_2} эквивалентные, значит по лемме 4 функцию f_{H_2} можно вывести из функции f_{H_1} применением аксиом (A1) - (A22). Каждому применению аксиомы соответствует переход от одного гиперграфа к другому. Остается показать, что при этих переходах хроматический набор сохраняется неизменным. Легко видеть, что при применении (A1)-(A18), (A20)-(A22) либо сам гиперграф не меняется, либо аксиомы выражают некоторые требования гиперграфам /а именно, (A15) - (A17) выражают требование гиперграфу быть Шпернеровым, (A20) - (A22) соответствуют условиям (1), (2) для гиперграфов/.

Теперь обсуждаем переход от правой стороны формулы (A19) к левой.

Пусть F_1 - произведение над X и Y с по крайней мере одним множителем из X Тогда возможны следующие случаи:

1 случай: F_1 не содержит множителей из Y. Тогда соответствующее F_1 ребро гиперграфа H в (8) в раскраске гиперграфа, соответствующего левой стороне, охватывается каждой краской z_i, $i=1,\dots,q$; тем самым каждое из q ребер

$$F_1 \cdot e_1(y_j), \dots, F_1 \cdot e_{q+1}(y_j)$$

охватывается ровно одной из этих q красок. Хроматический набор не меняется.

2 случай: F_1 содержит множитель из Y. Если этот множитель содержит в свою очередь по меньшей мере два множителя, то по (2) как F_1, так и любое из ребер $F_1 \cdot e_i(y_j)$ без влияния на возможность раскраски. Если этот множитель в свою очередь состоит из одного множителя $e_i(y_j)$, то $F_1 \cdot e_2(y_j), \dots, F_1 \cdot e_{q+1}(y_j)$ опять дают лишь соответствующее F_1 ребро, и гиперграф не меняется. Если же этот множитель состоит из одного множителя $e_i(y_\ell)$, $\ell \neq j$, то соответствующие $F_1 \cdot e_i(y_\ell) \cdot e_p(y_j)$, $p \neq i$, ребра в (8) не охватывается, в то же время, когда соответствующие выражениям $F_1 \cdot e_i(y_\ell)$ и $F_1 \cdot e_i(y_\ell) \cdot e_i(y_j)$ ребра в (8) охватываются одним и тем же образом. Поэтому хроматический набор не меняется.

Случай, где F_1 не является произведением над X и Y, можно вести к только что рассматриваемому случаю.

Теорема 2. Для любого Шпернерового гиперграфа $H = (V, R_i, , E_1, \dots, E_t)$, $R \subseteq W \times Z$, $q:|Z|$, имеет место: Гиперграф H обладает хроматическим набором $(k_1, \dots, k_q)$, $2 \leq k_1, \dots, k_1 < \infty$, точно тогда, когда

$$\rho(f) \in K(M_{k_1-1}, \dots, M_{k_q-1}) \setminus$$

$$\bigcup_{i=1}^{q} K(M_{k_1-1}, \dots, M_{k_i}, \dots, M_{k_q-1}). \tag{9}$$

При ограничении на функции из P_2 и соответствующие им Шпернеровы гиперграфы эта теорема была доказана К. Бензакеном [1]. В этом специальном случае отображение ρ оказывается биекцией.

Доказательство теоремы:

Из леммы 4 и 5 следует, что хроматический набор Шпернеровсго гиперграфа H тот же самый и у Шпернерового гиперграфа $\tilde{H}$, где $f_{\tilde{H}}$ есть каноническая днф функции f_H. Для раскрасов гиперграфа существенны только i-компоненты f_i функции f. Используя теорему Бензакена, сразу видно, что обладает хроматическим набором $(k_1,\dots,k_q)$ точно тогда, когда $f_i \in M_{k_i-1} \setminus M_{k_i}$, $i=1,\dots,q$, следовательно, когда имеет место (9).

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Benzaken, Posts closed systems and the weak number chromatic number of hypergraphs, Discrete Math. 23 (1978), 77-84.

[2] С.В. Яблонский, Г.П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев: Функции алгебры логики и классы Поста. Изд-во Наука, Москва 1966.

[3] Ю.И. Янов: О системах тождеств для алгебр, Проблемы кибернетики 8 /1962/, 75-90.

[4] G. N. Blochina, G. Burosch, V.B. Kudrjavcev, Vollständigkeitsbedingungen für zwei Algebren vom Postschen Typ, Math. Balkanica 3 (1973), 281-296.

[5] G. Burosch, Über Algebren von Prädikaten, Preprint (1974), Universität Rostock

[6] D. Lau, Prävolsständige Klassen von $P_{(k,l)}$, EIK 11 (1975), 10-12, 624-626.

[7] D. Lau, Kongruenzen aug gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$, Rostocker Math. Kolloquium, Heft 3, 37-43.

[8] D. Lau, Basen und Ordnungen der maximalen Klassen zweier mehrsortiger Funktionenalgebren, Rostocker Math. Kolloquium 15 (1980), 81-90.

[9] G. Burosch, J. Dassow, W. Harnau, D. Lau, Über Algebreb von Prädikaten, eingericht EIK

[10] C. Greene, D.J. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, Studies in Combinatorics, G.-C. Rota ed., MAA (1978), 22-79.

[11] E. Schmidt, Unteralgebren zweier mehrsortiger Funktionenalgebren (I), Preprint (1980), WPU Rostock, ersch. in Rostocker Math. Kolloquium 17 (1980).

[12] E. Schmidt, Unteralgebren zweier mehrsortiger Funktionenalgebren (II), Preprint (1980), WPU Rostock

Ö S S Z E F O G L A L Á S:

A MONOTON FÜGGVÉNYEK OSZTÁLYAI ÉS KROMATIKUS SZÁMAI

A jelen dolgozatban általánositásra kerül K. B e n z a k e n egy tétele, amely a gráfok és a Post függvények közötti kapcsolatról szól. A dolgozat fő tétele a Sperner hiper gráfokkal kapcsolatos.

A B S T R A C T:

ABOUT CHROMATIC PAIRS AND LASSES OF MONOTON FUNCTIONS

The given article generalizes a theorem by *C. Benzaken,* who found a bijection between sets of graphs with a given chromatic number and closed subsets of the set of monotone functions from Post's lattice P_2 . The theorem of the article states an analogous bijection between sets of generalized Sperner hypergraphs with a given set of chromatic numbers and closed subsets of a set of monotone functions of the algebra P_{Σ_q}, where the algebra P_{Σ_q} contains all functions of the form

$$f : \{0,1\}^n \times \{2,\dots,q+1\}^m \to \{0,1\}$$