A többváltozós rendszerek elméleti fejlődésének néhány problémája

Dr. CSÁKI FRIGYES, Budapest*

DK 62-501

Mint ismeretes, ipari folyamatokban gyakran találkozhatunk többváltozós rendszerekkel. Ilyen rendszerek például a kohók, a kazánok, a reaktorok, a desztillációs oszlopok, a rektifikációs kolonnák stb. A közlekedésben ugyancsak sokféle többváltozós rendszer ismeretes, így például a hajók és a repülőgépek. Ezekkel a körülményekkel magyarázható a többváltozós rendszerek irányításának jelentősége.

A többváltozós rendszerek jelentőségére utal az a tény is, hogy az IFAC, az automatizálás nemzetközi szerve ebben a témában két szimpóziumot szervezett Düsseldorfban, 1968-ban és 1971-ben, egyet Manchesterben 1974-ben. A Szovjetunióban ugyancsak több konferenciát szerveztek.

A többváltozós rendszerek irányításának elmélete mintegy 20 éves fejlődésre tekinthet vissza. Ezen a területen az első eredményeket MEJEROV, MESAROVIC, KAVANAGH publikálták, 15—16 évvel ezelőtt. Jelen dolgozat célja, hogy áttekintést nyújtson a többváltozós rendszerek elmélete fejlődésének legtontosabb irányairól. Itt nincs lehetőségünk arra, hogy belemenjünk a részletekbe, mivel a többváltozós rendszerek szakirodalmának terjedelme eléri egy nem túl nagy könyvtár volumenét.

1. A többváltozós rendszerek tárgyalási módszerei

Mielőtt rátérnénk a többváltozós rendszerek analízisének és szintézisének diszkussziójára, először vizsgáljuk meg a többváltozós rendszerek meghatározását. Többváltozósnak nevezzük az olyan rendszert, amelynek egynél több (minimálisan kettő) bemenete és egynél több (minimálisan két) kimenete van. Ugyanakkor a többváltozós rendszer többszörösen csatolt rendszert képez, mivel több egyváltozós, egymástól független rendszer összességét nem tekinthetjük többváltozós rendszernek.

A többváltozós rendszerek lehetnek határozatlanok, határozottak és túlhatározottak, attól függően, hogy a bemenő jelek száma kevesebb, egyenlő vagy nagyobb mint a kimenő jelek és változók száma. Ha erre vonatkozóan nem teszünk külön megjegyzést, a jelen dolgozatban határozott rendszereket vizsgálunk, szükség esetén külön megjelöljük az egyéb rendszereket.

A többváltozós rendszerek problémáinak megvilágítására legáltalánosabbnak az állapottér módszer tekinthető. Elvileg az állapottér módszer egyaránt alkalmas nemlineáris, lineáris és változó paraméterű rendszerek tárgyalására. A legáltalánosabb esetben a változó paraméterű, folytonos, nemlineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \qquad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{1}$$

ahol $\mathbf{u}$ a bemenő változók vektora, $\mathbf{y}$ a kimenő változók vektora, $\mathbf{x}$ az állapotvektor, t az idő, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ a megfelelő egyértékű nemlineáris függvények. Az első egyenlet vektoros differenciálegyenlet, a második pedig az úgynevezett kimenő vagy segédegyenlet, közönséges egyenlet (amennyiben a nemlineáris rendszernek állandó paraméterei vannak, úgy a t változó nem szerepel explicite az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ függvényekben). Abban az esetben, ha a rendszer lineáris, paraméterei pedig változóak, akkor az állapotegyenletet a következő formában fejezhetjük ki:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \tag{2}$$

ahol $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ és $\mathbf{D}(t)$ a megfelelő mátrixok a megfelelő paraméterekkel. Végül az állandó együtthatójú lineáris rendszer állapotegyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{3}$$

ahol $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ állandó elemű mátrixokat jelképeznek.

Az utóbbi esetben lehetőség van a többváltozós rendszer leírására átviteli mátrix segítségével. Az összefüggést a következő egyenlet fejezi ki:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{W}(p)\mathbf{U}(p). \tag{4}$$

Itt $\mathbf{Y}(p)$ a kimenő $\mathbf{y}(t)$ vektor Laplace-transzformáltja. Az $\mathbf{U}(p)$ vektor a bemenő $\mathbf{u}(t)$ vektor Laplace-transzformáltja, $\mathbf{W}(p)$ pedig az átviteli mátrix. Az átviteli mátrix elemei átviteli függvények.

A $\mathbf{W}(p)$ átviteli mátrixot a (3) állapotegyenlet Laplace-transzformáltjával állíthatjuk elő, ahogy ezt a következő formula mutatja:

$$\mathbf{W}(p) = \mathbf{C}[p\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \tag{5}$$

A fentihez hasonló módon adhatjuk meg diszkrét rendszerek állapotegyenletét, amely változó paraméteres nemlineáris rendszer esetén a következő alakú:

* Dr. CSÁKI FRIGYES okl. gépészmérnök, egyetemi tanár, a MTA levelező tagja, a Budapesti Műszaki Egyetem Automatizálási Tanszékének vezetője (Budapest XI., Garami tér 3.).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{g}^*(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, k). \end{aligned} \tag{6}$$

Az első egyenlet differencia-egyenlet, a második pedig közönséges egyenlet (ha a rendszer paraméterei állandóak, akkor a t_k időpontot jelölő változó nem szerepel explicite az $\mathbf{f}^*$ és $\mathbf{g}^*$ egyértékű nemlineáris függvényekben).

Diszkrét rendszer, időtől függő állapotegyenleteit a következő formában fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k^* \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k^* \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_k^* \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k^* \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Végül pedig az állandó együtthatójú diszkrét rendszer állapotegyenleteinek az alakja a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}^* \mathbf{x}_k + \mathbf{B}^* \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}^* \mathbf{x}_k + \mathbf{D}^* \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{8}$$

A diszkrét többváltozós rendszerek leírhatók a z-transzformált segítségével:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z)\mathbf{U}(z), \tag{9}$$

ahol az $\mathbf{Y}(z)$ vektor jelöli az $\mathbf{y}\,(t)$ vektor z-transzformáltját, $\mathbf{U}(z)$ pedig az $\mathbf{u}(t)$ vektor z-transzformáltját, $\mathbf{W}(z)$ pedig impulzus-átviteli mátrixot jelöl, ennek elemei impulzus-átviteli függvények.

Az impulzus-átviteli mátrixot a (8) állapotegyenlet alapján fejezhetjük ki, z-transzformáció elvégzése útján, a következő alakban:

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{C}^* [z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*]^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*. \tag{10}$$

A (3) és (4), (8) és (9) egyenletek összehasonlítása után levonthatjuk azt a következtetést, hogy az állandó együtthatójú többváltozós lineáris rendszerek tárgyalására két-két módszer ismeretes a folyamatos és a diszkrét esetre egyaránt.

Hangsúlyozzuk, hogy a két módszer azonos értékű, de csak abban az esetben, ha a többváltozós rendszert teljes egészében megfigyelhető és irányítható. Ha a többváltozós rendszerben vannak nem irányitható és nem megfigyelhető alrendszerek, úgy az átviteli mátrixszal fejezzük ki a teljes többváltozós rendszer megfigyelhető és irányítható alrendszerének tulajdonságait.

Jelen dolgozatban megvizsgáljuk mindkét módszer fejlődését. Figyelmünket elsősorban a folytonos rendszerekre irányítjuk, mivel lényeges analógia mutatkozik alaki szempontból a folytonos és a diszkrét többváltozós rendszerek egyenletei között, ahogyan ezt könnyen beláthatjuk az (1)...(5) és (6)...(10) képletek összehasonlítása útján, továbbá mivel következtetéseinket könnyen átvihetjük a folytonos rendszerekről a diszkrét rendszerekre. Ugyanakkor ez nem jelenti, hogy a diszkrét rendszereknek, különösen a digitális számítógépek széles körű elterjedésével kapcsolatosan, nincs ugyanakkora vagy még nagyobb jelentőségük mint a folytonos rendszereknek.

2. Az átviteli mátrix-módszer fejlődése

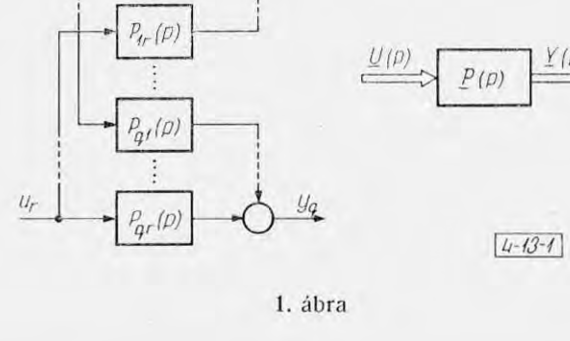
A többváltozós rendszerek elméletének területén először az átviteli mátrix-módszert fogalmazták meg. Bár ezt a módszert csak időtől független lineáris rendszerekre alkalmazhatjuk előnyösen, mégis ezen módszer alapján különféle, az egyváltozós rendszerek elméletéből ismert számítási módszereket átvihetjük nem túl bonyolult általánosítások útján a többváltozós rendszerek területére. Pontosan ebben is van az adott módszer nagy előnye. Valóban, mátrixokkal formálisan ugyan úgy végezhetők el a számítások, mint skaláris mennyiségekkel, egyedül csak feltétlenül ügyelni kell a sorrendiségre, mivel a kommutatív szabály egyáltalán nem érvényes a mátrixokra. Ismereteim szerint a mátrixszámítást elsőként KAVANAGH alkalmazta többváltozós rendszerek vizsgálatára.

A többváltozós rendszerekkel kapcsolatosan első kérdésként a struktúra problémája jelentkezik. Ennek a kérdésnek nincs is jelentősége az egyváltozós rendszerekben, mivel az egyváltozós rendszerekről mindig feltételezzük, hogy irányított jellegük van, vagyis a bemenő jel a kimenő jelre gyakorol hatást, azonban a kimenő jel oldaláról nincs semmiféle visszavezető hatás. A többváltozós rendszerekben jelentkezik a struktúra problémája, mivel van olyan lehetőség, hogy több kimenő paraméter különféle kimenő jelekre gyakorol hatást, ily módon belső csatolások keletkezhetnek.

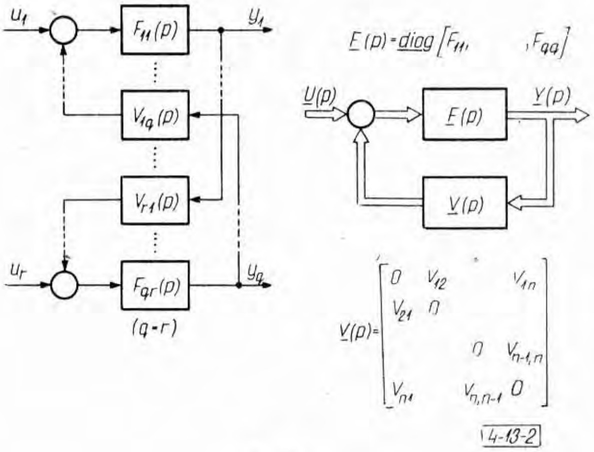
Ha a többváltozós rendszert „fekete doboznak" feltételezzük, úgy hangsúlyozni kell, hogy a bemenő és kimenő jelek megfigyelése útján semmiféle következtetést nem tehetünk a rendszer struktúrájára vonatkozóan. Ellenkezőleg a struktúrát előzetesen, apriori adottnak feltételezzük.

MESAROVIC munkái szerint a többváltozós rendszerek struktúráit három csoportra oszthatjuk (lásd az *1., 2. és 3. ábrát).*

Az első csoportba tartozik az ún. P-kanonikus struktúra. Ilyen struktúra esetén minden egyes bemenő jel az átviteli tagon keresztül gyakorol hatást minden egyes kimenő jelre. Ha a rendszerben r bemenet és q kimenet van, úgy az átviteli függvények száma: $r \cdot q$ (általában $r = q$). Rendszerint szükséges, hogy az átviteli függvény fizikailag realizálható legyen, vagyis, hogy a számláló rend-



1. ábra



2. ábra

száma semmilyen körülmények között ne haladja meg a nevező fokszámát, szigorúbb esetben pedig, hogy a számláló fokszáma kisebb legyen a nevező fokszámánál. Gyakran olyan követelményt állítanak, hogy az átviteli tagoknak külön is stabilisaknak kell lenniük, tehát, hogy pólusaik a komplex sík bal oldalán helyezkedjenek el.

A második lehetséges struktúra-tipus a V-kanonikus struktúra. Ilyen struktúra esetén feltételezzük, hogy az első bemenő jel egy átviteli tagon keresztül hat az első kimenő jelre, a második bemenő jel egy átviteli tagon keresztül a második kimenő jelre stb., ugyanakkor kizárjuk azt a lehetőséget, hogy például az első bemenő jel hatást gyakoroljon közvetlenül a második, harmadik stb. kimenő jelre, ehelyett viszont feltesszük, hogy a kimenő jelek visszahatást gyakorolnak az egyes bemenetekre és szerepelnek az adott kimenő jel keletkezésekor (2. ábra).

A harmadik csoportot H-kanonikus struktúrának nevezzük. Ilyen struktúrát alkalmazunk olyan esetekben, amikor a bemenő jelek száma eltér a kimenő jelek számától, és ezért nem alkalmazhatunk V-kanonikus struktúrát az egész rendszer leírására. Ebben az esetben a rendszer egy része P-struktúrájú, a másik része pedig V-kanonikus struktúrájú.

Megjegyezzük, hogy V- és H-struktúrák esetén nem szabad olyan követelményt támasztani, hogy csakis fizikailag realizálható és stabilis átviteli függvények szerepeljenek, mivel ezek a struktúrák bizonyos mértékig mesterségesek, ugyanakkor viszont a teljes rendszer egészében fizikailag realizálható és stabilis lehet.

A P-struktúra alapegyenlete a következő:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{P}(p)\mathbf{U}(p), \tag{11}$$

a V-struktúra egyenlete pedig (2. ábra):

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)[\mathbf{U}(p)+\mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)], \tag{12}$$

végül a H-struktúrát a következő összefüggés fejezi ki (3. ábra):

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{R}(p)\mathbf{U}(p)+\mathbf{F}(p)[\mathbf{U}(p)+\mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)], \tag{13}$$

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)[\mathbf{L}(p)\mathbf{U}(p)+\mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p)]. \tag{14}$$

A V-struktúráról a P-struktúrára való áttérést a következő mátrix-egyenletek fejezik ki:

$$\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}(p)\mathbf{U}(p)+\mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)\mathbf{Y}(p),$$

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I}-\mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\mathbf{F}(p)\mathbf{U}(p), \tag{15}$$

a (11) egyenlettel való összehasonlítás alapján pedig:

$$\mathbf{P}(p) = [\mathbf{I}-\mathbf{F}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\mathbf{F}(p). \tag{16}$$

Ha viszont P-struktúráról H-struktúrára térünk át, az egyenletek a következő alakot öltik:

$$\mathbf{F}(p) = \mathbf{diag}\left[\frac{1}{M_{11}}, \frac{1}{M_{22}}, \ldots, \frac{1}{M_{mn}}\right],$$

ahol

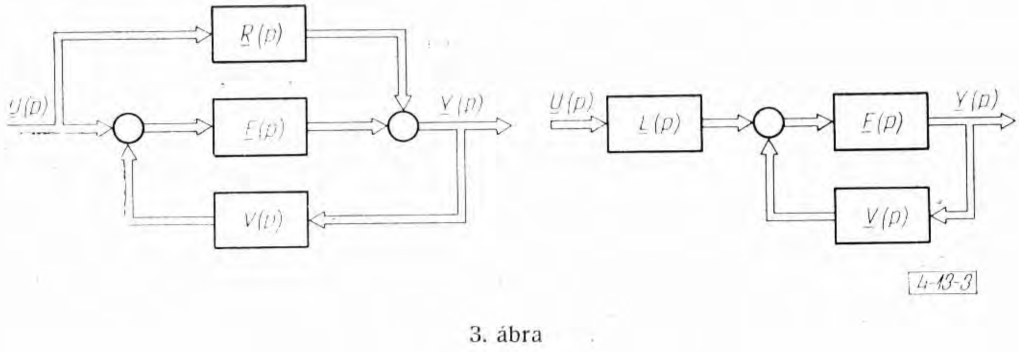
$$\mathbf{M}(p) = \mathbf{P}^{-1}(p) \tag{17}$$

és

$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{F}^{-1}(p)-\mathbf{P}^{-1}(p). \tag{18}$$

Különösen nagy figyelmet szenteltek a szovjet tudósok a nem kanonikus struktúrák kutatásának. Hivatkozom itt Mejerov, Csinajev, Kulebakin, Petrov, Kuhtenko és mások munkáira. Például Csinajev az adott témára vonatkozó könyvében a következő problémát vizsgálja: hogyan alkalmazható a négypólusok és többpólusok elmélete többváltozós rendszerek leírására.

Többváltozós rendszerek analízisére előnyösen alkalmazhatók a gráf-elmélet eredményei (utalok Mishkin—Brown és Schwarz könyveire).



3. ábra

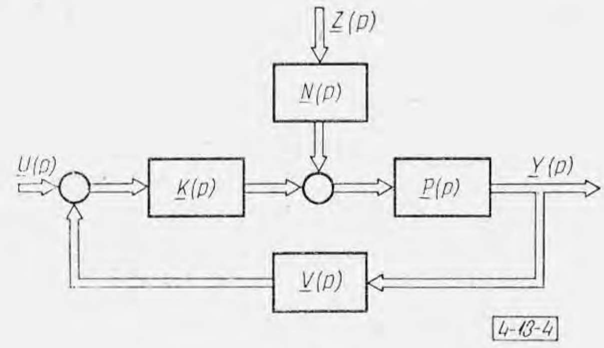
3. Többváltozós lineáris rendszerek szintézise

Az állandó együtthatós lineáris többváltozós rendszerek szintézise egyszerűbbé válik, ha alkalmazzuk a mátrix-számítást. A *4. ábrán* bemutatjuk a többváltozós rendszer általános hatásláncát. Mielőtt rátérnénk a diszkusszióra, megjegyezzük, hogy elvileg két lehetőség mutatkozik a kifejtésre, attól függően, hogy a paramétervektorok sor- vagy oszlopmátrixok. Az előző változatot Csáki alkalmazta, az utóbbit azonban gyakrabban használják (az oszlopvektorokat), ezért a jelen dolgozatban a vektorok jelölésére oszlopmátrixokat alkalmazunk. Például, nem nehéz leírni mátrix-számítással a bemenő- és a kimenő jel közötti kapcsolatot a következő alakban:

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I}+\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{U}(p), \tag{19}$$

vagy a zaj és a kimenő jel közötti összefüggést:

$$\mathbf{Y}(p) = [\mathbf{I}+\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p)]^{-1}\mathbf{P}(p)\mathbf{N}(p)\mathbf{Z}(p). \tag{20}$$



4. ábra

A többváltozós rendszerek elméletében az egyik fő probléma az autonóm jelleg problémája, azaz: hogyan iktathatunk be egy megfelelő szabályozót ahhoz, hogy elérjük a többváltozós rendszer felbontását egyváltozós rendszerek halmazára. Ezt az ötletet Boxemboom és Hood vetették fel (differenciálegyenletekre vonatkozóan hasonló problémákkal foglalkozott Voznyeszenszkij). Az autonomitás problémáját a következő módon oldhatjuk meg. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a visszacsatoló $\mathbf{V}(p)$ mátrix egységmátrix, ebben az esetben viszont az autonomitás feltétele az, hogy a $\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)$ mátrixnak diagonálisnak kell lennie. Adott $\mathbf{P}(p)$ mátrix esetén a $\mathbf{K}(p)$ mátrix elemeit ezen feltétel alapján határozzák meg. Sajnos, semmi nem biztosítja a $\mathbf{K}(p)$ mátrix elemeinek fizikai megvalósíthatóságát és stabilitását. Ezért ahhoz, hogy a szabályozóknak viszonylag egyszerű legyen a konstrukciója, a gyakorlatban rendszerint a nem teljes autonomitást tűzik ki célul: részlegesen autonom jelleget. Így a $\mathbf{K}(p)$ mátrix elemeinek struktúráját apriori ismertnek feltételezzük, például PI vagy PID jellegű szabályozók alkalmazását feltételezzük és kísérletet teszünk az egyes szabályozók paramétereinek meghatározására a fenti feltétel betartása mellett. A feladat megoldására gyakran alkalmaznak analóg vagy digitális számítógépen elvégzett modellezést.

Az autonomitás problémáiról napjainkban is sok publikáció jelenik meg. Megjegyezzük, hogy az autonom jelleg feladatának megoldására előnyösen alkalmazható a V-struktúra.

A többváltozós rendszerek szintézisében a másik fő kérdés a stabilitás problémája. Elvben a rendszer stabilitásáról a

$$\det|\mathbf{I}+\mathbf{P}(p)\mathbf{K}(p)\mathbf{V}(p)| \tag{21}$$

determináns pólusainak értékelése útján dönthetünk. A kutatók igen komoly erőfeszítéseket tettek arra, hogy az egyváltozós rendszerek elméletéből jól ismert stabilitásvizsgálati módszereket (mint az amplitúdó-fázis jelleggörbéket és más módszereket) általánosítsák a többváltozós rendszerek problémakörére.

A szovjet tudósok komoly eredményeket értek el az automatikus irányító rendszerek invariancia elméletének területén. A többváltozós rendszerekre is megállapították a fő tételeket és összefüggéseket. Az ezen területen elért eredmények vonatkozásában utalok Kulebakin, Petrov és Csinajev könyveire.

Akárcsak az egyváltozós rendszerek elméletében is, a többváltozós rendszerek szintézisében is fontos problémák a minőség és az optimális átmeneti folyamatok biztosításának kérdései. Ezen cél érdekében előnyösen alkalmazzák az integrálkritériumokat. Az e téren elért eredményeket Mejerov és Csinajev könyvei összegzik.

A többrétű kutatások eredményeként kiderült, hogy az autonom rendszerek nem a legjobbak a minőségi kritériumok szempontjából.

A többváltozós rendszerek szintézisének területén máig is igen sok nyílt kérdés létezik.

4. Sztochasztikus rendszerek

Kolmogorov és Wiener főbb munkái alapján az automatikus irányítási rendszerek statisztikus szintézise problémáira vonatkozóan széles körben folynak a kutatások. Emlékeztetek itt Pugacsov, Szolodovnyikov és tanítványaik munkáira. Ezen a területen a főbb eredményeket a mátrix-számítás segítségével, az alapvető módszereknek a többváltozós rendszerekre történő általánosítása útján érték el. Tudomásom szerint Amara közölt elsőként munkákat ezen a területen.

A teljesítmény-sűrűség spektrum mátrixai felhasználása alapján a fizikailag realizálható optimális átviteli mátrixot például a következő formában fejezhetjük ki:

$$\mathbf{W}_m^T(p) = [\Phi_{uu}^{+}(p)]^{-1}\{[\Phi_{uu}^{-}(p)]^{-1}\Phi_{ui}(p)\}_{+}\,. \tag{22}$$

Newton, Gould és Kaiser könyvében szerepel a korlátozott és korlátozott félig határozott struktúra feladata, a feladat általánosítását pedig Csáki adta meg.

A sztochasztikus rendszerek szintézisében a teljesítmény-sűrűség spektrum mátrix faktorizálásának alapvető jelentősége van. Ez a feladat rendkívül egyszerű a többváltozós rendszerekben, mivel nem nehéz szétválasztani a jobb- és baloldali pólusokat és zérushelyeket. Mátrixok spektrumfaktorizációja jóval bonyolultabb feladat. Erre a feladatra YOULA és DAVIS értek el eredményeket. FISCHER és CSÁKI egyszerűsítették az adott feladatot, könnyítések nélkül, a matematikai feltételekre vonatkozóan. Ezután a módszert általánosították mintavételező rendszerekre is.

5. Az állapottér módszer előnyei és hátrányai

A többváltozós rendszerek elméletének tárgyalásakor lehetőség van az állapottér-módszer alkalmazására. A nemlineáris rendszerekre ez csaknem az egyetlen lehetőség, ezen túlmenően a módszer előnyösen használható a változó együtthatójú több változós rendszerekre is. Lineáris rendszerekre az átmeneti folyamatot a következő alakban írhatjuk fel:.

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau . \tag{23}$$

Sajnos itt egyáltalán nem egyszerű feladat a $\Phi(t, t_0)$ átmeneti mátrix kiszámítása. Ha a rendszer együtthatói állandóak, a mátrix egyszerű exponenciális mátrix, amelynek meghatározására többféle módszer ismeretes. A változó együtthatójú rendszerben az átmeneti mátrixot közelítő integrálás útján, Neumann-sorral határozzák meg.

Mindenesetre érdemes figyelmet fordítani az állandó együtthatójú és a változó együtthatójú lineáris rendszerek állapotegyenleteiben mutatkozó formális analógiára (hasonlóképpen a megoldási módszereiket illetően). Egyben ez az egyik előnye az állapottér-módszernek.

Az állapottér-módszer másik előnye az a körülmény, hogy a (2), (3) és (7), (8) állapotegyenletek egyaránt érvényesek többváltozós és egyváltozós rendszerekre is. Az egyetlen különbség, hogy egyváltozós rendszerekben a $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{B}_k^*$ négyszögmátrixok oszlopmátrixokká alakulnak át, a $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{C}_k^*$ négyszög-mátrixok pedig sormátrixokká. Ez az egyik fő előnye az állapottér-módszernek. Ugyanakkor természetes, hogy a számítások menynyisége megnövekszik, ha többváltozós rendszereket vizsgálunk.

Az állapottér-módszer alkalmazásának előnye az is, hogy segítségével egyszerűbb megvalósítani a számításokat digitális számítógépen. Kijelenthetjük, hogy éppen a digitális számítógépek széles körű elterjedése után vált lehetségessé sok területen az állapottér-módszer felhasználása.

Az állapottér-módszer hátránya, hogy soros-, párhuzamos- és visszacsatolt kapcsolású átviteli tagok tárgyalása nehézkesebb az állapottér-módszer alkalmazása esetén, mint az átviteli mátrixok alapján történő tárgyalás.

Az állapottér-módszer hátrányai között kell megjegyezni, hogy a változók számának megnövekedése esetén jelentősen megnövekszik a módszerben szereplő mátrixok mérete. Ez észrevehető már egyváltozós esetben is, mivel például n-edrendű rendszerben n-edfokú polinom keletkezik, amellyel a számításokat egyszerűbben végezhetjük el, mint az állapottér-módszerben szereplő $n\times n$, $n\times 1$ és $1\times q$ mátrixokkal.

Az állapottér-módszer alkalmazásakor két fontos probléma jelentkezik. Az egyik a rendszerek irányíthatóságának és megfigyelhetőségének problémája. Ezeket a fogalmakat KALMAN határozta meg. Neki és tanítványainak sikerült kimutatni, hogy az irányíthatóság szükséges és elégséges feltétele például állandó együtthatós lineáris rendszerekben az, hogy a $n\times nr$ típusú

$$\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{24}$$

hipermátrix rangjának n-nek kell lennie. Analóg módon ahhoz, hogy a rendszer megfigyelhető legyen, szükséges és elégséges: az $n\times nq$ típusú

$$\mathbf{G} \triangleq [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, \ldots, (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] \tag{25}$$

hipermátrix rangjának n értékűnek kell lennie.

Az irányíthatóság és megfigyelhetőség fogalmait kiterjesztették változó együtthatós lineáris, valamint nemlineáris rendszerekre is.

Az állapottér-módszer alkalmazásával kapcsolatosan a másik fő probléma valamely (például adott átviteli függvényekkel vagy differenciálegyenletekkel) adott rendszer állapotegyenleteinek meghatározása olyan módon, hogy a szereplő mátrixok foka minimális legyen. Az említett problémát a minimális realizálás problémájának nevezik és ezen a téren különösen aktívan dolgoztak KALMAN és tanítványai.

Az utóbbi időben ROSENBROCK és ACKERMANN értek el érdekes eredményeket.

6. Többváltozós nemlineáris rendszerek

A többváltozós nemlineáris rendszerek elmélete jóval nehezebb feladatokat foglal magában, mint a lineáris rendszerek elmélete. Rendszerint ebben az esetben előnyösnek mutatkozik az állapottérmódszer felhasználása.

A nemlineáris rendszerek stabilitásának problémájával több szovjet tudós foglalkozott. A Ljapunov-stabilitási kritérium az állapot-módszer alkalmazásán alapul. A Ljapunov-függvény és annak deriváltja olyan függvényt képvisel, amely az állapotvektortól függ. Fontos eredményeket értek el olyan ismert tudósok, mint LURJE, LETOV, AJZERMAN, KRASZOVSZKIJ, MALKIN, BARBASIN, CSETAJEV, ZUBOV, ERUGIN és mások. Az egyváltozós rendszerekre vonatkozó tételeket könnyű általánosítani a többváltozós rendszerekre.

Az abszolút stabilitás problémakörében POPOV fedezett fel rendkívül lényeges eredményeket. Munkáiban POPOV az időtartomány helyett a jelenségeket a frekvenciatartományban írja le, az állapottér módszer helyett az átviteli függvények és módosított amplitúdó-fázis jelleggörbék alapján. Ez lehetséges, mivel olyan rendszert vizsgál, amelyben a lineáris tag után statikus nemlinearitás következik. POPOV módszerét sikerült általánosítani többváltozós rendszerekre, ezzel kapcsolatosan utalok ANDERSON munkáira. A különféle típusú többváltozós nemlineáris rendszerek között különösen nagy figyelmet szentelnek a relés rendszereknek, ezen a téren kiemelkedik A. A. KRASZOVSZKIJ, KARAMAZOV, PALATNYIK és RODNJANSZKIJ munkássága.

A változó struktúrájú rendszerek terén sokat tett EMELJANOV, az adaptív rendszerek terén pedig CÜPKIN, IVAHNENKO, CSINAJEV és mások.

Az optimális, kereső rendszerek kutatásának területén FELDBAUM és munkatársai munkái kiemelkedők.

A többváltozós mintavételes rendszerek kutatásának vonatkozásában mindenek előtt CÜPKIN, valamint KATKOVNIK és POLUETKOV munkáira érdemes felfigyelni.

Az érzékenységi analízisben TOMOVICS és KOKOTOVIC dolgoztak ki új eredményeket. A többváltozós rendszerek elméletének fontos fejezete az optimális rendszerek elmélete, amelyről alább mutatunk be megjegyzéseket.

7. Statikus optimizálás

Statikus vizsgálat esetén a rendszereket algebrai egyenletekkel írhatjuk le. Ismeretesek bizonyos problémák az operációkutatás elméletéből, olyanok mint a szállítási feladat, készlet elosztási feladat, villamosenergia-elosztása stb.

Idő-invariáns esetben az (1) egyenletet a következő algebrai egyenlet alakjára hozhatjuk:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}\,. \tag{26}$$

És amennyiben a cél állandó munkapont fenntartása $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ állandó állapotérték mellett, úgy a (9) egyenlet alapján meghatározhatjuk az irányító hatások állandó vektorát. Amennyiben $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ és $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$ értékek is állandóak, akkor az

$$f_0 = f_0(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \tag{27}$$

célfüggvény is állandó. Mindkét, $\mathbf{f}$ és f_0 függvényt folytonosnak feltételezzük. A statikus optimalizálás egyik legegyszerűbb feladata áll elő, ha a (26) és (27) egyenlet is lineáris. Ez egyben az ún. lineáris programozás feladata. Megfogalmazható a következőképpen: az $\mathbf{x}$ vektor x_i koordinátáira olyan nem-negatív értékeket kell találni, amelyek minimizálják (vagy maximizálják) a következő lineáris célfüggvényt

$$f_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{28}$$

a következő típusú lineáris korlátozások figyelembevétele mellett

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,, \tag{29}$$

ahol az utóbbi egyenlőtlenségnél teljesülnie kell a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ vektorok valamennyi koordinátájára (felül „T" jellel a (28) egyenletben a transzponálást jelöltük).

Mint ismeretes, az optimális megoldásnak a (29) egyenlet metszéspontjaiban kell lennie, és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Ezért a lineáris programozás feladatának megoldása a szélsőérték pontok irányított átvizsgálását jelenti, vagyis mozgást az egyik lehetségesről egy másik lehetséges megoldás irányában. Nagyszámú változó esetén a többváltozós feladatokra ez a keresési eljárás gazdaságtalanná válik még akkor is, ha igen nagy működési sebességű és nagy operatív memóriájú korszerű digitális számítógépet alkalmazunk. Gazdaságosabb a jól ismert szimplex-módszer. Hasonlóképpen vizsgálják a többi módszereket is. Így a nagyobb feladatokat kisebb feladatok együttesére vezethetjük vissza, amelyeket egymástól függetlenül optimizálunk. Az egyes alrendszerek optimizálása után a rendszert egészében optimizáljuk.

A gyakorlati feladatok többségében a (28) célfüggvény és (vagy) a (29) korlátozások sztochasztikus zavarásoktól (paraméterektől) függnek. Különféle módszereket dolgoztak ki a célfüggvény optimumának matematikai várható érték értelemben vagy a célfüggvény varianciájának minimuma értelmében való keresésére.

Érdekes általánosítás adódik a nemlineáris programozásra. A feladat a következő formában fogalmazható meg: meg kell taláni az

$$f_0 = f_0(\mathbf{x}) \tag{30}$$

nemlineáris célfüggvény minimumát vagy maximumát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \tag{31}$$

nemlineáris korlátozások figyelembevétel mellett, ugyanakkor figyelembe véve az $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ feltételt (mindkét feltételt valamennyi koordinátára figyelembe kell venni).

Eléggé kétségesnek látszik az optimizálás ilyen általános problémájának megoldási lehetősége, ezért különféle numerikus módszereket használnak általában az optimum megkeresésére. Ha $f_0(\mathbf{x})$ és $f_i(\mathbf{x})$ — a $\mathbf{f}(x)$ függvény koordinátái — konvex függvények, akkor alkalmazhatjuk az ún. konvex programozás módszerét.

Legyen adott a Lagrange-függvény a következő alakban:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda) = f_0(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x})\,, \tag{32}$$

ahol λ vektoriális Lagrange-multiplikátor. Ahhoz, hogy az $\mathbf{x}^0$ vektor a konvex programozás megoldása lehessen, szükséges és elegendő egy olyan λ^0 vektor létezése, amelynél

$$\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}\,, \quad \lambda^0 \geq \mathbf{0}\,, \tag{33}$$

és

$$F(\mathbf{x}^0, \lambda) \leq F(\mathbf{x}^0, \lambda^0) \leq F(\mathbf{x}, \lambda^0)\,, \tag{34}$$

valamennyi nem-negatív $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\lambda \geq \mathbf{0}$ vektorra. A (34) egyenlet fejezi ki az ún. nyeregpont létezési feltételét.

A hierarchikus automatikus irányítási rendszerekre kidolgozott lineáris programozásra vonatkozó megjegyzések még fokozottabb mértékben érvényesek a konvex programozásra. Itt is felhasználják a rendszer dekompozícióján vagy különféle szintek létezésén alapuló optimizálási módszereket.

A gyakorlatban különleges jelentőségük van az optimum-keresési módszereknek. Valamennyi bizonyos összehasonlításokat foglal magában. Az $f_0(\mathbf{x})$ célfüggvényt különféle, de megfelelő $\mathbf{x}$ értékek esetén értékelik és az $f_0(\mathbf{x})$ végleges értékét az optimális érték kiválasztása útján nyerik. Erősen befolyásolja a különféle optimum-keresési módszerek hatékonyságát a célfüggvény vagy a korlátozások globális vagy lokális jellege. Bizonyos esetekben büntetésfüggvényeket alkalmaznak a korlátozásokkal leírható feladat átalakítására korlátozások nélküli optimizálási feladatok sorozatára.

Ha a rendszerre véletlen zavarások hatnak, kísérleteket kell végezni on-line üzemmódban magán a folyamaton. Ilyen esetekben előnyösen használják a legmeredekebb esés módszerét, az adaptív rendszerek módszereit és általában a közvetlen számítógépes irányítás módszereit.

8. Dinamikus optimizálás

Mivel valamennyi automatikus irányítási rendszerben átmeneti folyamatok mennek végbe, a dinamikus optimizálásnak nagy jelentősége van az automatikus irányításra vonatkozóan. Ebben az esetben az (1) állapotegyenlet írja le a folyamat dinamikus viselkedését és a célfüggvény optimuma helyett a rendszerben levő veszteségek funkcionáljának optimumát kell megtalálni (a funkcionál minimumát vagy maximumát). Ennek a funkcionálnak a következő az általános formája:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,dt + f_{00}(\mathbf{x}(t_f), t_f), \qquad (35)$$

ahol t_0 és t_f a kezdeti és befejezési idő, f_0 célfüggvény; ugyanakkor f_{00} segédfüggvény. Sok esetben elhanyagolhatjuk az f_{00} függyvényt. Mégis a végérték-optimizálási problémákban az f_{00} függvény szerepel, elmarad viszont az első kifejezés a (35) egyenletben. Vizsgáljunk meg néhány speciális esetet a (35) egyenletben, ha $f_{00} = 0$. Amennyiben $f_0 \equiv 1$, ez működési sebességre vonatkozó feladat lesz; $f_0 = \mathbf{u}^T$ **sgn u** (**sgn u** $= [sgn\, u_1, \ldots, sgn\, u_r]^T$) esetén pedig fűtőanyag-optimizálási feladat keletkezik, ha pedig $f_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{u}$ vagy általánosabb alakban $f_0 = \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$ a felhasznált energia optimizálásának feladata áll előttünk.

Az egyik leggyakrabban használt veszteség-funkcionál alaknak a következő a formája:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\,\mathbf{S}\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\,dt, \qquad (36)$$

amely kvadratikus funkcionált képez. A gyakorlatban a folyamatokban az egyik legnehezebb probléma a veszteségi funkcionál megfogalmazásakor keletkezik. Ezen probléma megoldására nem lehet általános javaslatokat adni.

Gyakran bizonyos (vagy valamennyi) kezdeti és (vagy) végállapotot nem rögzítjük le, hanem azok mozognak a kezdeti és végpontok meghatározott tartományában. Hasonló esetekben az úgynevezett tranzverzalitási feltételeket tesszük hozzá a szükséges határfeltételekhez.

Ahhoz, hogy helyes matematikai modellt állítsunk az optimalizálás problémájára, vagyis fizikailag realizálható modellt állítsunk össze, figyelembe kell venni bizonyos korlátozásokat is. Az egyik ilyen korlátozás az irányító hatások $\mathbf{u}$ vektorára vonatkozik, mégpedig $\mathbf{u} \in U$, vagyis az $\mathbf{u}$ vektor korlátozott bizonyos U altérben, az r-dimenziós Euklideszi térben. Gyakran ezt az általános korlátozást $|u_j| \leq 1$ alakra vezetjük vissza ($j = 1, 2, \ldots r$; ahol u_j az $\mathbf{u}$ vektor koordinátái).

Most pedig vizsgáljuk meg a dinamikus optimalizálás problémájának megoldását.

9. Variációszámítás

Ha nincsenek korlátozások, az optimizálás problémájának megoldására a klasszikus variációszámítást használják. Ebben az esetben keletkezik az ún. izoperimetrikus feladat és a

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \lambda, t)\,dt \qquad (37)$$

funkcionál minimumát kell megtalálni, ahol az általánosított célfüggvény:

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) \triangleq f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}\, t) + \lambda^T[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}] = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}]^T\lambda, \qquad (38)$$

ahol λ a Lagrange-multiplikátorok vektora. Az extremum megtalálásának szükséges feltételét a jólismert Euler—Lagrange egyenletek adják meg:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\lambda + \dot{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad (39)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{u}}\lambda = \mathbf{0}, \qquad (40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}. \qquad (41)$$

Itt $d\mathbf{f}^T/d\mathbf{x}$ és $d\mathbf{f}^T/d\mathbf{u}$ jelölik a Jacobi-mátrixokat. Az extremális $\mathbf{x}(t)$ trajektoriának, az irányító hatások $\mathbf{u}(t)$ vektorának és a Lagrange-multiplikátorok $\lambda(t)$ extremális vektorának ki kell elégíteniök a (39), (40), (41) egyenleteket. Az utóbbi egyenlet állapottér differenciálegyenlete, a (39) egyenletet pedig segéd-, hozzárendelt állapottér egyenletnek tekinthetjük. Ha bevezetjük a következő Hamilton-féle állapot-függvényt:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) \triangleq f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\,\lambda, \qquad (42)$$

akkor a (40) egyenletet a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \tag{43}$$

amely a H függvény extremumának általános feltétele. Itt aláhúzzuk, hogy a (43) egyenlet nem lesz érvényes, ha korlátozásokat teszünk az $\mathbf{u}$ vektorra.

10. A maximum- és minimum-elv

A maximum- és minimum elvet a klasszikus variációszámítás általánosításaként vizsgálják. Új $x_{n+1} = t$ koordináta bevezetése útján, $\dot{x}_{n+1} = 1$ differenciálegyenlettel és zérus kezdeti feltétellel valamennyi feladatot, amelyekben az idő független változóként szerepel, visszavezethetjük az időtől explicite nem függő feladatokra. Ezzel kapcsolatosan áttekintést az alábbiakban adunk.

Legyen az állapottér differenciálegyenlete:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{44}$$

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltétellel és $\mathbf{x}(t_f) \in C$ végérték feltétellel, ahol C meghatározott célhalmazt képvisel. Meg kell találni az

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\, dt \tag{45}$$

funkcionál minimumát. Meg kell határozni egy olyan $\mathbf{u} \in U$ irányítási vektort, amely a folyamat állapotát $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ állapotból $\mathbf{x}(t_f) \in C$ állapotba viszi át, és minimizálja a (45) célfüggvényt.

Vezessük be a Hamilton-függvényt:

$$H_\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \psi) = -f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \psi^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{46}$$

vagy

$$H_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{47}$$

Ha összehasonlítjuk a (46) és (47) egyenleteket a (42) egyenlettel, akkor kitűnik egyrészt, hogy

$$\mathbf{p}(t) = -\psi(t) = \lambda(t), \tag{48}$$

másrészt viszont

$$H_p = -H_\psi = H. \tag{49}$$

Jelöljük $\mathbf{x}^0(t)$-vel a (44) differenciálegyenlet megoldását az optimális $\mathbf{u}^0(t)$ irányításra vonatkozóan. Ebben az esetben az $\mathbf{u}^0(t)$ és $\mathbf{x}^0(t)$-vel összefüggésben létezik olyan ψ^0 vagy $\mathbf{p}^0$ segédvektor, hogy $H_\psi^0 = H_\psi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \psi^0)$ és $H_p^0 = H_p(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, p^0)$ jelölések esetén a kanonikus egyenleteknek a következő lesz az alapja:

$$\dot{\mathbf{x}}^0 = \frac{\partial H_\psi^0}{\partial \psi^0}, \quad \text{vagy} \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p^0}{\partial \mathbf{x}^0}, \tag{50}$$

$$\dot{\psi}^0 = -\frac{\partial H_\psi^0}{\partial \mathbf{x}^0}, \quad \text{vagy} \quad \dot{\mathbf{p}}^0 = -\frac{\partial H_p^0}{\partial \mathbf{x}^0}, \tag{51}$$

$\mathbf{x}^0(t) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^0(t_f) \in C$ végérték feltételek esetén, vagy a tranzverzalitási feltételnek megfelelően a $\psi^0(t_f)$ vagy $\mathbf{p}^0(t_f)$ vektoroknak merőlegeseknek kell lenniök a C halmazra $\mathbf{x}^0(t_f)$ esetén. A fent említettekből kiindulva az optimalitás szükséges feltétele:

$$H(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \psi^0) \geqq H(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, \psi^0), \tag{52}$$

vagy

$$H_p(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{p}^0) \leq H_p(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}, \mathbf{p}^0) \tag{53}$$

valamennyi t értékre a $t_0 \leq t \leq t_l$ intervallumban és valamennyi $\mathbf{u}$ vektorra.

Az (52) egyenlet a maximum-elv, az (53) pedig a minimum-elv. A két elv ekvivalens és bármelyiket kiválaszthatjuk alkalmazásra. PONTRJAGIN először ezt maximum-elvként javasolta, ugyanakkor viszont, mivel a minimum-elvhez egy sor tétel kapcsolódik, a következő fejezetben még visszatérünk erre az elvre.

Ha a minimum-elvet különféle alkalmazásokra használjuk fel, a számításokat a következőképpen kell elvégezni:

Először megvizsgáljuk az (53) összefüggést az

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{p}^0) \tag{54}$$

képlet levezetésére. Ha az $\mathbf{x}^0(t)$ és $\mathbf{p}^0(t)$ vektorok egyértelműen meghatározzák az $\mathbf{u}^0(t)$ vektort a teljes $[t_0, t_f]$ intervallumra, úgy az ilyen módon keletkező feladatot közönségesnek nevezik. Ha formálisan az (54) egyenletet az (50) és (51) egyenletekbe behelyettesítjük, az utóbbi kizárólag az $\mathbf{x}^0(t)$ és $\mathbf{p}^0(t)$ vektoroktól fog függni. Ezért ezt a két vektoregyenletet tekintjük az $\mathbf{x}^0(t)$ állapotvektor és a $\mathbf{p}^0(t)$ segédvektor meghatározására szolgáló képletnek. Az ilyen megoldási módszer elvezet minket a kétpontos határértékek-meghatározási feladatra. Az $\mathbf{x}^0(t_0)$ és $\mathbf{x}^0(t_f)$ kezdeti és végértékek, vagy tranzverzalitási feltételek, a $\mathbf{p}^0(t_f)$ vektor koordinátáinak meghatározásának feladatával együtt összesen $2n$ határfeltételt adnak az (50) és (51) $2n$ számú skalár egyenlet megoldására. Ugyanakkor viszont ezek közül n egyenlet a kezdeti állapotokra vonatkozik, n pedig a fő vagy segédváltozók végállapotaira. Mindenesetre az optimális $\mathbf{x}^0(t)$ állapotvektor és a $\mathbf{p}^0(t)$ segédvektor meghatározása után az (54) egyenlet alapján egyúttal rendelkezésünkre áll az $\mathbf{u}^0(t)$ optimális vektor is. A fenti megjelölt eljárás alapján szemmel látható, hogy csak a legegyszerűbb esetekben bízhatunk az analitikus megoldásban. Főként éppen ezzel a ténnyel magyarázható a numerikus módszerek jelentősége az optimum megtalálására.

11. Diszkrét minimum-elv

A diszkrét minimum-elvnek bizonyos előnyei vannak a folytonos minimum-elvhez képest, mindenekelőtt a számítási szükségletek szempontjából, mivel ezt közvetlenül programozhatjuk digitális számítógépen. Az optimizálás problémájának diszkretizálási eljárása nehézségek nélkül realizálható a differenciálegyenletek felcserélése útján differencia-egyenletekre. Meg kell jegyezni azonban, hogy diszkretizáláskor bizonyos mértékig elveszik az optimizálás problémájának intuitív jellege és struktúrája.

Írja le a dinamikus rendszert a következő vektoros differencia-egyenlet:

$$\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k=\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)\,; \qquad (55)$$

$$(k=0,1,2,\ldots,k-1)$$

ahol $\mathbf{x}_k$ az állapotvektor értéke a k-ik mintavételezési pontban, $\mathbf{u}_k$ az irányítási vektor értéke ugyanezen időpontban, $\mathbf{f}_k$ az $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{u}_k$ vektoros argumentum vektor-függvénye.

Az irányításra vonatkozó korlátozások:

$$\mathbf{u}_k\in U \qquad (56)$$

valamennyi $k=0, 1, 2, \ldots, K-1$ értékre

és a célfüggvény alakja:

$$J=\sum_{k=0}^{K-1} f_{0k}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)\,, \qquad (57)$$

ahol $f_{0k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ a vektoros $\mathbf{x}_k$ és $\mathbf{u}_k$ argumentum skaláris célfüggvénye. Tegyük fel, hogy a határfeltételek:

$$\mathbf{x}_0=\alpha \text{ és } \mathbf{x}_k\in C\,, \qquad (58)$$

ahol C bizonyos határozott halmaz az n-dimenziós Euklideszi térben.

Az a cél, hogy megtaláljuk olyan módon az irányítási $\mathbf{u}_0^0, \mathbf{u}_1^0, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}^0$ optimális vektorok sorozatát, az (56) korlátozások figyelembevétele mellett, hogy a generált $\mathbf{x}_0^0, \mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}^0$ állapotok sorozata megfeleljen az (58) határfeltételeknek és az (57) célfüggvény minimum felé tartson.

Ebben az esetben a Hamilton-függvény:

$$H_k(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k,\mathbf{p}_{k+1})=f_{0k}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)+\mathbf{p}_{k+1}^T\,\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)$$

$$(k=0,1,2,\ldots,k-1)\,. \qquad (59)$$

Az optimális $\mathbf{x}_k^0$ állapotok sorozatának és az irányítások $\mathbf{u}_k^0$ ($k=0, 1, \ldots, K-1$) sorozatának megfelelően létezik egy olyan $\mathbf{p}_k^0$ ($k=0, 1, 2, \ldots, K-1$) segédvektor-sorozat, amelynél $H_k^0=H_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{p}_{k+1})$ jelöléssel a kanonikus differenciaegyenletek:

$$\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k=\frac{\partial H_k^0}{\partial \mathbf{p}_{k+1}}\,, \qquad (60)$$

$$\mathbf{p}_{k+1}-\mathbf{p}_k=-\frac{\partial H_k^0}{\partial \mathbf{x}_k^0} \qquad (61)$$

megfelelnek az $\mathbf{x}_0^0=\alpha$, $\mathbf{x}_k^0\in C$ határfeltételeknek, és $\mathbf{p}_k^0$ merőleges C-re $\mathbf{x}_k^0$ esetén. Így az optimalitás szükséges feltételét a

$$H_k(\mathbf{x}_k^0,\mathbf{u}_k^0,\mathbf{p}_{k+1}^0)=H_k(\mathbf{x}_k^0,\mathbf{u}_k,\mathbf{p}_{k+1}^0) \qquad (62)$$

képlet fejezi ki valamennyi $\mathbf{u}_k\in U$ vektorra és valamennyi $k=0, 1, \ldots, K-1$ értékre. A diszkrét és folytonos minimum-elvek összehasonlítása szoros analógiájukra mutat.

12. Dinamikus programozás

Az optimalitás elvének megfelelően az optimális trajektoria szakasza maga is optimális trajektoriát képvisel. Ezen elv alapján BELLMAN fejlesztette ki a dinamikus programozás módszerét. Ezen módszer diszkrét alakja sorozatos megoldások többlépcsős eljárását képezi, amelyben a következő jelöléseket alkalmazzuk: $\mathbf{x}_k$ állapotvektor, $\mathbf{u}_k$ irányítási vektor, vagy más szavakkal a sorozatos döntések stratégiájának vektora. Az optimális stratégia minimalizálja a

$$J=f_{00}(\mathbf{x}_k)+\sum_{k=0}^{K-1} f_0(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0) \qquad (63)$$

célfüggvényt. Jelöljük S_{K-k}-vel az I_{K-k} részösszeg optimális értékét, vagyis

$$S_{K-k}=\min_{\mathbf{u}_{K-k}\in U} I_{K-k}\,, \qquad (64)$$

ahol

$$I_{K-k}=I_{K-k+1}+f_0(\mathbf{x}_{K-k},\mathbf{u}_{K-k})\,, \qquad (65)$$

és alkalmazva az optimalitás elvét, a következő rekurzív összefüggést kapjuk:

$$S_{K-k}(\mathbf{x}_{K-k}^0)=$$

$$=\min_{\mathbf{u}_{K-k}\in U}\{S_{K-k+1}(\mathbf{x}_{K-k}^0+\mathbf{f}(\mathbf{x}_{K-k},\mathbf{u}_{K-k}))+$$

$$+f_0(\mathbf{x}_{K-k}^0,\mathbf{u}_{K-k})\}\,. \qquad (66)$$

Az optimizálás folyamatának eredményeként az $\mathbf{u}_{K-k}$ vektor optimális $\mathbf{u}_{K-k}^0$ értékét a (66) egyenlettel számítják. A (66) egyenlet ismételt alkalmazásával és az optimalizálási folyamat megismétlésével, végeredményben egy teljes sorozatot kapunk az $\mathbf{u}_{K-1}^0, \mathbf{u}_{K-2}^0, \ldots, \mathbf{u}_1^0, \mathbf{u}_0^0$ irányításra.

Folytonos, időtől függő optimizálás esetén a minimizálandó funkcionál alakja:

$$J=\int_{t_0}^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)\,dt\,. \qquad (67)$$

Jelöljük $S(\mathbf{x}(t), t)$-vel az $\mathbf{x}^0(t)$-től kezdődően a trajektoria szegmenséhez tartozó részfunkcionál minimális értékét, vagyis

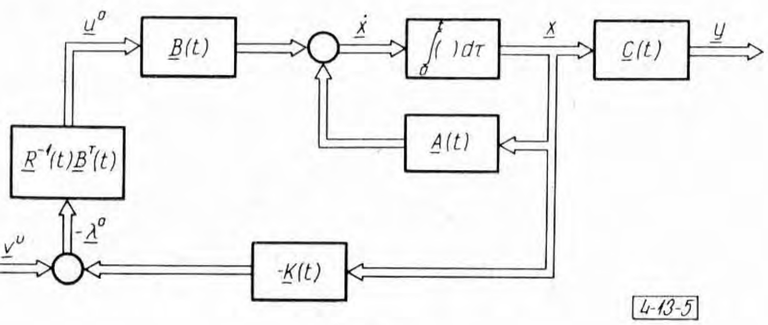
$$S(\mathbf{x}^0(t),t)=\min_{\mathbf{u}\in U}\int_t^{t_f} f_0(\mathbf{x}^0(\vartheta),\mathbf{u}^0(\vartheta),\vartheta)\,d\vartheta\,. \qquad (68)$$

Így a dinamikus programozás alapegyenletét, amelyet Hamilton—Jacobi—Bellman egyenletnek neveznek, a következő alakban írhatjuk fel:

$$-\frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t),t)}{\partial t}=$$

$$=\min_{\mathbf{u}\in U}\left\{\frac{S(\mathbf{x}^0(t),t)}{\mathbf{x}^{0T}}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0(t),\mathbf{u}(t),t)+\right.$$

$$\left.+f_0(\mathbf{x}^0(t),\mathbf{u}(t),t)\right\}\,. \qquad (69)$$



5. ábra

Optimizálási folyamata után pedig megkapjuk a Hamilton–Jacobi differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t),t)}{\partial t}+\frac{\partial S(\mathbf{x}^0(t),t)}{\partial \mathbf{x}^{0T}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0(t),\mathbf{u}^0(t),t)+$$
$$+f_0(\mathbf{x}^0(t),\mathbf{u}^0(t),t)=0. \qquad (70)$$

Az időtől explicite nem függő feladat esetén a (69) egyenlet baloldala zérussá válik, és

$$\mathbf{p}^0=\left[\frac{\partial S}{\partial x_1^0},\frac{\partial S}{\partial x_2^0},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n^0}\right]^T=-\psi^0 \qquad (71)$$

jelölés bevezetésével a (69) egyenletből a következő egyenlet adódik:

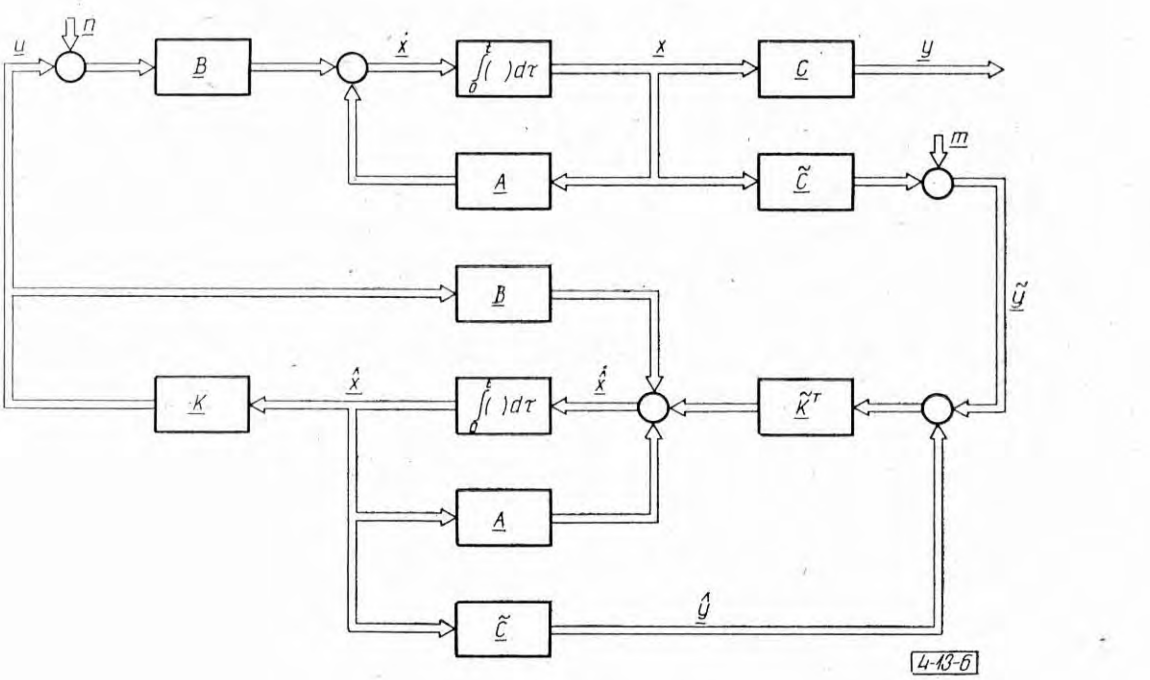
$$0=\min_{\mathbf{u}\in U}\{f_0(\mathbf{x}^0,\mathbf{u})+\mathbf{p}^{0T}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0,\mathbf{u})\}, \qquad (72)$$

amely egybeesik a Pontrjagin-féle minimum-elvvel [lásd a (47) és (53) egyenleteket]. További eredmény: az időtől nem függő feladatok esetén, szabad idő végponttal a Hamilton-függvény értéke zérus lesz. Ugyanilyen egyszerű úton megkaphatjuk a maximum-elvet. Tovább az (70) egyenletből levezethetjük a (39) Euler–Lagrange egyenletet is. Így a dinamikus programozás tekinthető a legáltalánosabb optimizálási módszernek.

13. Riccati-típusú differenciálegyenlet

Lineáris rendszer kvadratikus minőségi kritériummal elvégzett optimizálási feladatának pontos szerepe van az optimális rendszerek elméletében. Ilyen esetben az optimizálást a (36) funkcionál felhasználása alapján végzik el (rendszerint $\mathbf{S}=\mathbf{0}$), az állapotegyenleteket pedig a (2) egyenlet formájában adják meg. Általában nem adottak az irányítási vektorra vonatkozó korlátozások. Így az optimális irányítási vektor (lásd az *5. ábrát*), kifejezhető a következő összefüggéssel:

$$\mathbf{u}^0=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)[\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^0-\mathbf{v}^0], \qquad (73)$$



6. ábra

ahol a visszacsatolás $\mathbf{K}(t)$ négyzetes mátrix kielégíti a következő ún. Riccati-típusú differenciálegyenletet:

$$\dot{\mathbf{K}}(t)+\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t)-$$
$$-\mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t)+\mathbf{Q}(t)=\mathbf{0}\,. \tag{74}$$

Az állandó együtthatójú rendszerekre a Riccati-típusú differenciálegyenlet közönséges egyenletté alakul át, amelyet természetesen jóval egyszerűbben oldhatunk meg.

Többen is foglalkoznak a fent jelölt problémakörrel, ezt gyakran nevezik „az állapotváltozók visszacsatolása" problémájának az egyváltozós és a többváltozós rendszerek elméletében is, ugyanakkor mint ismeretes, a négyzetes kritériumot nem tekintjük legjobb kritériumnak. Komoly figyelmet szentelnek a következő kérdésnek is: hogyan valósíthatók meg szuboptimális rendszerek a visszacsatolás egyszerűsítése útján.

Itt hangsúlyozzuk, hogy az állandó együtthatós rendszerekben az állapotváltozók realizálási problémáját lényegesen leegyszerűsíthetjük spektrumfaktorizáció alkalmazásával.

A Kalman-féle szűrési elmélet ugyancsak Riccati-típusú differenciálegyenletekre vezethető vissza. A Kalman-szűrés célja az állapotváltozók közelítő becslésének meghatározása *(6. ábra)*. Az ilyen feladatot gyakran nevezik a Kalman-féle megfigyelési feladatnak. Érdemes figyelmet fordítani arra, hogy a Kalman-féle szűrési elmélet a Kolmogorov—Wiener szűrési elmélet általánosítása és így az előző elmélet magában foglalja az utóbbit.

A lineáris rendszerek négyzetes minőségi kritérium alapján elvégzett optimizálását és különösen a Kalman-féle szűrési elméletet kiterjesztették diszkrét rendszerekre is.

Az optimális rendszerek elméletével kapcsolatosan meg kell említeni LETOV és munkatársai munkáit, akik tudományos iskolát hoztak létre a szabályozók analitikus konstruálásának elméletében és annak alkalmazásaiban.

14. Összefoglalás

Az előző fejezetekben megvizsgáltuk a többváltozós rendszerek elméletének főbb fejlődési irányait. A többváltozós rendszerek elmélete annyira szerteágazó terület, hogy egy egész könyv sem elegendő a teljes áttekintésre, annál nehezebb áttekintést nyújtani egyetlen dolgozatban.

Ezért nem nyílt lehetőség az összes probléma részletes leírására, kénytelenek voltunk megelégedni azzal, hogy egy-két mondatban összefoglaljuk a legismertebb tudósok munkáját. Mint az előző fejezetek ezt mutatják, két rövid évtized alatt nagymértékben fejlődött a többváltozós rendszerek elmélete és a hozzá kapcsolódó problémák a világ tudományos érdeklődésének középpontjában állnak.

A mátrixszámítás és különösen az állapottérmódszer alkalmazása arra vezettek, hogy gyakran meg sem lehet különböztetni az egyváltozós és többváltozós rendszereket, a feladatot közvetlenül többváltozós rendszerekre fogalmazzák meg. Ez rendszerint nem okoz elvi jellegű nehézséget, azonban a bemenő és kimenő paraméterek számának megnövekedésekor a számítások fokozatosan nehézkessé válnak. Egyes feladatok megoldására előnyösen használják a digitális-, analóg- vagy hibrid számítógépeket.

IRODALOM

[1] NEWTON, G.—GOULD, L. A.—KAISER, J.: Analytical Design of Linear Feedback Controls. John Wiley, New York, Champan and Hall, 1957.
[2] ФЕЛЬДБАУМ, А. А.: Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
[3] MESAROVIC, M. D.: The Control of Multivariable Systems. Technology Press and John Wiley, New York, 1960.
[4] CHANG, S. L.: Synthesis of Optimum Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1961.
[5] MISHKIN, E.—BRAUN, L.: Adaptive Control Systems. McGraw-Hill, New York, 1961.
[6] ЧИНАЕВ, П. И.: Многомерные автоматические системы. Гостехниздат УССР, 1963.
[7] КУХТЕНКО, А. И.: Проблема инвариантности в автоматике. Гостехиздат УССР, 1963.
[8] КУЛЕБАКИН, В. С.—ПЕТРОВ, В. Н. ред.): Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды 2. Всесоюзного Совешчания, состоявшегося в Киеве 29 мая — и юня 1962 года. Наука, 1964.
[9] ФЕЛЬДБАУМ, А. А. ред.: Самообучающиеся автоматические системы. Наука, 1966.
[10] КАТКОВНИК, В. Я.—РОДУЭКТОВ, Р. А.: Многомерные дискретные системы управления. Наука, 1966.
[11] КАЗАМАРОВ, А. А.—ПАЛАНТИК, А. М.—РОНДЯАНСКИЙ, Л.: Динамика двумерных систем автоматического регулирования. Наука, 1967.
[12] КУХТЕНКО, А. И. ред.: Сложные системы управления. В. 3. Методы исследования напрерывных и импульсных систем автоматического управления. Наукова Думка, 1967.
[13] МЕЕРОВ, М. В. ред.: Регулирование многосвязных систем. Наука, 1967.
[14] SCHWARZ, H.: Mehrfachregelungen. I—II., Springer, Berlin, 1967., 1971.
[15] ПУГАЧЕВ, В. С. ред.: Основы автоматического управления. 2. изд. испр. и доп. Наука, 1968.
[16] ЧИНАЕВ, П. И.: Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем. Техника, 1969.
[17] CSÁKI F.: Szabályozások dinamikája. Lineáris szabályozáselmélet. 2. jav. kiad. Akadémiai K., Budapest, 1970.
[18] ИВАНОВСКИЙ, Р. И.—ТАРАНОВ, А. Г.: Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭСВМ. Наука, 1970.
[19] CSÁKI F.: Korszerű szabályozáselmélet. Nemlineáris, optimális és adaptív rendszerek. Akadémiai K., Budapest, 1970.
[20] CSÁKI, F.: Modern Control Theories. Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems. Akadémiai K., Budapest, 1972.
[21] CSÁKI F.: Fejezetek a szabályozástechnikából. Állapotegyenletek. Műszaki K., Budapest, 1973.
[22] CSÁKI, F.: Die Zustandsraum-Methode in der Regelungstechnik. Akadémiai K., Budapest — VDI Verlag, Düsseldorf, 1973.

Érkezett: 1974. II.