

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ

К.Н. Чимев

В работе рассматриваются вопросы об инвариантности выделимых множеств аргументов функций при подстановке аргументов константами.

Используется терминология из [1-15].

Множество существующих переменных функции f будем обозначать R_f .

Определение 1. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 2$ и

$$R_1 \cup R_2 \subset R_f, R_1 \cap R_2 = \emptyset, R_1 \neq \emptyset, R_2 \neq \emptyset.$$

Множество R_1 называется выделимо для f по отношению R_2 , если существуют такие значения для переменных из R_2 , что после подстановки переменных этими значениями от f получается функция, которая зависит существенно от всех переменных принадлежащих R_1 .

Если $|R_f| \geq 1$ будем считать, что множество R_f выделимо для f по отношению пустого множества.

Определение 2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 1$ и

$$R \subset R_f, R \neq R_f, R \neq \emptyset.$$

Множество R называется выделимо для f , если R выделимо для f по отношению $R_f \setminus R$.

Множество R_f считается выделимым для f .

Множество всех выделимых множества аргументов функции $f(R_f \neq \emptyset)$

обозначены S_f .

Определение 3. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$R \in S_f, R \subset R_f, |R| \geq 2.$$

Множество $R_1 (R_1 \subset R)$ называется максимально выделено для f подмножества R , если $R_1 \in S_f$ и не существует множество $R_2 \in S_f$ для которого

$$R_1 \subset R_2 \subset R, R_2 \neq R_1.$$

Отметим, что если

$$R \in S_f, R \subset R_f, |R| \geq 2,$$

то существуют хотя бы два максимально выделенных для f подмножеств множества R . Если R_1 максимально выделено для f подмножество множества R , то

$$|R \setminus R_1| \geq 1.$$

Теорема 1. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$R \in S_f, R \subset R_f, |R| \geq 2.$$

Если R_1 максимально выделено для f подмножество множества R , то для любых переменных

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \in R \setminus R_1, 1 \leq m \leq |R \setminus R_1|,$$

и для любых для них значений $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}$, функция $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_m} = c_{i_m})$ зависит существенно хотя бы от одной из переменных $x_i \in R_f \setminus R$ и для нее выделено множество R_1 .

Доказательство. Пусть

$$R = \{x_1, x_2, \dots, x_{m+p}\} \in S_f, 2 \leq m+p \leq n-1, p \geq 1,$$

и множество

$$R_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

максимально выделено для f подмножество множества R .

Не ограничивая общности исследования теорема будет доказана

для переменных x_{m+1}, \dots, x_{m+t} , $1 \leq t \leq p$. Пусть $c'_{m+1}, \dots, c'_{m+t}$ произвольно выбраны значения для x_{m+1}, \dots, x_{m+t} и пусть

$$f_1 = f(x_{m+1} = c'_{m+1}, \dots, x_{m+t} = c'_{m+t}).$$

Выберем значения c'_{m+p+1}, \dots, c'_n для x_{m+p+1}, \dots, x_n таким способом, что $R_1 \in S_{f_2}$, где

$$f_2 = f(x_{m+p+1} = c'_{m+p+1}, \dots, x_n = c'_n).$$

Но

$$R_f \cap \{x_{m+1}, \dots, x_{m+p}\} = \emptyset,$$

и $R_1 \subset R_{f_2}$. Следовательно $R_1 = R_{f_3}$, где

$$f_3 = f_2(x_{m+1} = c'_{m+1}, \dots, x_{m+t} = c'_{m+t}).$$

Поэтому $R_1 \in S_{f_1}$.

Так как $R_f \in S_f$, $R \in S_f$ и $R \subset R_f$, то

$$R_f \setminus R \neq \emptyset.$$

Доказывается, что

$$R_{f_1} \cap (R_f \setminus R) \neq \emptyset$$

Действительно, допустим что

$$R_{f_1} \cap (R_f \setminus R) = \emptyset.$$

Тогда какие бы ни были значения c_{m+p+1}, \dots, c_n для x_{m+p+1}, \dots, x_n ,

$$R_1 \in S_{f_1}(x_{m+p+1} = c_{m+p+1}, \dots, x_n = c_n),$$

а следовательно

$$R_1 \in S_f(x_{m+p+1} = c_{m+p+1}, \dots, x_n = c_n).$$

Пусть $c''_{m+p+1}, \dots, c''_n$ такие значения для x_{m+p+1}, \dots, x_n , что

$x_{m+1} \in R_{f_4}$, где

$$f_4 = f(x_{m+p+1} = c''_{m+p+1}, \dots, x_n = c''_n).$$

Но в соответствии с уже сказанным $R_1 \in S_{f_4}$. Следовательно

$R_1 \subset R_{f_4}$. Тогда

$$R_1 \subset R_{f_4} \subset R, R_1 \neq R_{f_4}, R_{f_4} = R,$$

и $R_{f_4} \in S_f$.

При сделанном допущении доказали, что R_1 не является макси-

мально выделимым для f подмножество множества R , которое противоречит данным условиям.

Таким образом теорема доказана.

Естественно возникает вопрос: если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ произвольная функция порядка $n \geq 3$ и

$$R \in S_f, R \subset R_f, |R| \geq 2, |R_f \setminus R| \geq 2,$$

и R_1 максимально выделимо для f подмножество множества R , то правда ли, что для любых переменных

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in R \setminus R_1, 1 \leq m \leq |R \setminus R_1|,$$

и для любых для них значений c_{i_1}, \dots, c_{i_m} функция $f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_m} = c_{i_m})$ зависит существенно хотя бы от двух переменных из множества $R_f \setminus R$ и

$$R_1 \in S_{f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_m} = c_{i_m})} ?$$

Примерно можно показать, что ответ поставленного вопроса отрицателен.

Можно показать, что если R_1 не является максимально выделимым для f подмножество множества R , заключение в теореме 1 в общем случае неверно.

Определение 4. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 1$ и $R \subset R_f$ ($R \neq \emptyset$). Будем говорить, что переменная $x_i \in R$ сильно существенная для f по отношению R , если существует такое значение c_i для x_i , что

$$R_{f(x_i = c_i)} \supset R \setminus \{x_i\}.$$

Переменная $x_i \in R$ будем называть сильно существенной для f , если она сильно существенная для f по отношению R_f .

Переменная x_i будем называть сильно существенной для f по отношению x_j , если она сильно существенная для f по отношению $\{x_i, x_j\}$.

Определение 5. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 1$ и $R \subset R_f$ ($R \neq \emptyset$). Будем говорить, что переменная $x_i \in R$, c - сильно существенная для f по отношению R , если для каждого значения c_i для x_i

$$R_{f(x_i=c_i)} \supset R \setminus \{x_i\}.$$

Переменная $x_i \in R$ будем называть c - сильно существенной для f , если она c - сильно существенная для f по отношению R_f .

Переменная x_i будем называть c - сильно существенной для f , по отношению x_j , если она c - сильно существенная для f по отношению $\{x_i, x_j\}$.

Следствие 1. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $R_1 \in S_f$, $R_2 \notin S_f$, где $R_1 \subset R_2 \subset R_f$, $R_1 \neq \emptyset$, то существует переменная $x_i \in R_2 \setminus R_1$, такая, что для каждого значения c_i для x_i ,

$$R_{f(x_i=c_i)} \cap (R_f \setminus R_2) \neq \emptyset$$

и

$$R_1 \in S_{f(x_i=c_i)}.$$

Следствие 2. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $R \in S_f$, $1 \leq |R| \leq n-2$.

Если существует переменная $x_i \in R_f \setminus R$, такая, что $R \cup \{x_i\} \notin S_f$, то для каждого значения c для x_i , $R_{f(x_i=c)} \cap (R_f \setminus (R \cup \{x_i\})) = \emptyset$ и $R \in S_{f(x_i=c)}$

Из следствия 2 следует, что x_i c -сильно существенная для f по отношению $R \cup \{x_i\}$.

Следствие 3. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$\{x_i, x_j\} \in S_f, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \neq j,$$

то для каждого значения c_j для x_j ,

$$R_{f(x_j=c_j)} \cap (\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}) \neq \emptyset$$

и

$$x_i \in R_{f(x_j=c_j)}.$$

Из следствия 3 следует, что x_j c -сильно существенная для f по отношению x_i .

Следствие 3 является обобщением теоремы 6 от [5].

Следствие 4. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$R \in S_f, R \subset R_f, 2 \leq |R| \leq n-1,$$

то для каждой переменной $x_i \in R$ существует такая переменная $x_j \in R \setminus \{x_i\}$, что для каждого значения c_j для x_j ,

$$R_{f(x_j=c_j)} \cap (R_f \setminus R) \neq \emptyset, \quad \text{и} \quad x_i \in R_{f(x_j=c_j)}.$$

Следовательно для каждой переменной $x_i \in R$ существует переменная $x_j \in R \setminus \{x_i\}$, которая c -сильно существенная для f по отношению x_i .

Следствие 5. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $R \in S_f, |R| = n-2$.

Если существует переменная $x_i \in R_f \setminus R$, такая что

$$R \cup \{x_i\} \in S_f,$$

то x_i является c -сильно существенным для f .

Следствие 6. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $R \in S_f, |R| \leq n-2$.

Если существует переменная $x_i \in R_f \setminus R$, такая что

$$R \cup \{x_i\} \in S_f \quad \text{и} \quad R_f(R \cup \{x_i\}) \in S_f,$$

то x_i сильно существенная для f .

Следствие 7. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 4$ и $R \in S_f, |R| = n-3$

Если x_i и x_j такие переменные из $R_f \setminus R$, что

$$R \cup \{x_i, x_j\} \in S_f,$$

то хотя бы одна из них сильно существенная для f .

Как уже увидели, если $f(x_1, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $\{x_i, x_j\} \in S_f$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$,

то каждая из переменных x_i, x_j является c -сильно существенным для f по отношению множества $\{x_i, x_j\}$.

Следствие 8. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 4$ и $R \in S_f$, $|R|=3$, то хотя бы одна из переменных $x_i \in R$ c -сильно существенная для f по отношению R .

Можно показать, что существуют функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 4$ и существуют такие переменные x_i, x_j, x_k , $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, что $\{x_i, x_j, x_k\} \in S_f$ и только одна из переменных x_i, x_j, x_k c -сильно существенная для f по отношению $\{x_i, x_j, x_k\}$.

При условиях следствия 8, хотя бы две из переменных множества R сильно существенны для f по отношению R .

Можно показать, что существует функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ порядка $n \geq 5$ и существует множество R , такое что

$$R \in S_f, |R|=4, R \subset R_f,$$

и не существует c -сильно существенная переменная для f по отношению R .

С помощью теоремы 1 можно доказать и другие утверждения.

Теорема 2. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 4$ и $R_1 \in S_f$, $R_2 \in S_f$, где

$$R_1 \subset R_2 \subset R_f, |R_2 \setminus R_1| = 2,$$

то для каждой переменной $x_i \in R_2 \setminus R_1$ и для каждого её значения c_i для которого $R_1 \in S_{f(x_i=c_i)}$,

$$R_{f(x_i=c_i)} \cap (R_f \setminus R_2) \neq \emptyset.$$

Доказательство. При условии теоремы пусть

$$R_1 = \{x_1, \dots, x_m\} \in S_f, 1 \leq m \leq n-3,$$

$$R_2 = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}\} \in S_f.$$

Не ограничивая общности исследования, докажем теоремы, например, для переменной x_{m+1} .

Пусть c'_{m+1} такое значение для x_{m+1} , что

$$R_1 \in S_{f(x_{m+1}=c'_{m+1})}.$$

Допустим, что

$$R_1 \cap \{x_{m+3}, \dots, x_n\} = \emptyset$$

Тогда $R_1 \in S_{f_2}$, где

$$f_2 = f(x_{m+3}=c_{m+3}, \dots, x_n=c_n),$$

и c_{m+3}, \dots, c_n произвольные значения для x_{m+3}, \dots, x_n .

Пусть c'_{m+3}, \dots, c'_n такие значения для x_{m+3}, \dots, x_n , что $x_{m+2} \in R_{f_3}$, где

$$f_3 = f(x_{m+3}=c'_{m+3}, \dots, x_n=c'_n).$$

Так как $x_{m+2} \in R_{f_3}$ и $R_1 \in S_{f_3}$, то

$$R_3 = \{x_1, \dots, x_m\} \cup \{x_{m+2}\} \subset R_{f_3}.$$

Но $R_2 \in S_f$. Поэтому $x_{m+1} \in R_{f_3}$. Следовательно $R_3 \in S_f$.

Множество

$$R_3 \cup \{x_{m+1}\} \in S_f,$$

и в соответствии с теоремой 1 для каждого значения c_{m+1} для x_{m+1} ,

$$R_{f(x_{m+1}=c_{m+1})} \cap \{x_{m+3}, \dots, x_n\} \neq \emptyset.$$

Следовательно

$$R_{f_1} \cap \{x_{m+3}, \dots, x_n\} \neq \emptyset,$$

которое приводит к противоречию.

Таким образом теорема доказана.

Можно поставить вопрос о верности заключения теоремы 2, когда

$$|R_2 \setminus R_1| \geq 3.$$

Примером можно показать, что ответ этого вопроса отрицателен.

Теорема 3. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и $R_1 \in S_f, R_1 \neq \emptyset$.

Если $R_2 \subset R_f \setminus R_1, R_2 \neq \emptyset$, то существует пермутация $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, k = |R_2|$, элементов R_2 и существуют такие значения $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$, для x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , что для каждого $z \in \{1, \dots, k\}$,

$R_1 \cup R_2 \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \subset R_{f_z}$,
и $R_1 \in S_{f_2}$, где

$$f_z = f(x_{i_1} = c_{i_1}, \dots, x_{i_z} = c_{i_z})$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$R_1 = \{x_1, \dots, x_m\} \in S_f, \quad 1 \leq m \leq n-1$$

и пусть

$$R_2 = \{x_{m+1}, \dots, x_{m+k}\} \subset R_f \setminus R_1, \quad m+k \leq n.$$

Тогда можно показать, что существует переменная $x_{i_1} \in R_2$ и существует значение c_{i_1} для x_{i_1} такое, что $R_1 \in S_{f_1}$ и

$$R_1 \cup R_2 \setminus \{x_{i_1}\} \subset R_{f_1},$$

где

$$f_1 = f(x_{i_1} = c_{i_1}).$$

Таким образом теорема доказана при $|R_2| = 1$.

Если теорема верна, когда $|R_2| = k, (k \geq 1)$, то она верна и при $|R_2| = k+1$. Действительно, пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$ и

$$R_1 = \{x_1, \dots, x_m\} \in S_f,$$

$$R_2 = \{x_{m+1}, \dots, x_{m+k+1}\} \subset R_f \setminus R_1, \quad m+k+1 \leq n.$$

Тогда существует переменная $x_{i_1} \in R_2$ и существует такое значение c_{i_1} для x_{i_1} , что

$$R_{f(x_{i_1}=c_{i_1})} \supset R_1 \cup R_2 \setminus \{x_{i_1}\}$$

и $R_1 \in S_{f(x_{i_1}=c_{i_1})}$.

Пусть x_{i_1} какая-нибудь переменная вышесказанного вида и c_{i_1} такое значение для x_{i_1} , что

$$R_{f_1} \supset R_1 \cup R_2 \setminus \{x_{i_1}\}$$

и $R_1 \in S_{f_1}$, где $f_1 = f(x_{i_1}=c_{i_1})$.

Так как $R_1 \in S_{f_1}$ и

$$R_5 = R_2 \setminus \{x_{i_1}\} \subset R_{f_1} \setminus R, |R_5| = k,$$

из индуктивного предположения следует, что существует пермутация $x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{k+1}}$ элементов множества $R_2 \setminus \{x_{i_1}\}$ и существуют такие значения $c_{i_2}, c_{i_3}, \dots, c_{i_{k+1}}$ для $x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{k+1}}$, что для каждого $z \in \{2, 3, \dots, k+1\}$,

$$R_1 \cup R_2 \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_z}\} \subset R_{f_z}$$

и $R_1 \in S_{f_z}$, где $f_z = f(x_{i_1}=c_{i_1}, \dots, x_{i_z}=c_{i_z})$.

Таким образом теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция порядка $n \geq 3$. Если

$$R_1 \notin S_f \quad R_2 \in S_f$$

где

$$R_1 \subset R_2 \subset R_f, \quad R_1 \neq \emptyset, \quad R_1 \neq R_2,$$

то для каждой переменной $x_i \in R_2 \setminus R_1$ существует переменная $x_j \in R_1$, которая c -сильно существенная для f по отношению x_i .

Доказательство. Если $R_2 = R_f$ теорема доказывается индуктивным способом.

Рассмотрим случай, когда $R_2 \neq R_f$. Например, пусть

$$R_1 = \{x_1, \dots, x_m\},$$

$$R_2 = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+p}\}, \quad 3 \leq m+p \leq n-1.$$

Так как $R_2 \in S_f$, то существуют такие значения c_{m+p+1}, \dots, c_n для x_{m+p+1}, \dots, x_n , что

где
$$R_{f_1} = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_{m+p}\},$$
$$f_1 = f(x_{m+p+1} = c_{m+p+1}, \dots, x_n = c_n).$$

Но

$$R_1 \in S_{f_1}, \quad R_2 = R_{f_1}, \quad R_1 \subset R_2, \quad R_1 \neq \emptyset, \quad R_1 \neq R_2.$$

Тогда, в соответствие с уже рассмотренным случаем для каждой переменной $x_i \in R_2 \setminus R_1$ существует переменная $x_j \in R_1$, которая c -сильно существенная для f_1 по отношению x_i .

Следовательно для каждой переменной $x_i \in R_2 \setminus R_1$ существует переменная $x_j \in R_1$, которая c -сильно существенная для f по отношению x_i .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яблонский С.В.: Функциональные построения в k -значной логике. Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. 51, 1958, 5-142.
2. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.: Функции алгебры логики и классы Поста, Москва, 1966.
3. Schwartz R.E.: Existence and uniqueness properties of Boolean functions. SIAM Journal on applied mathematics, 1970, 18, 2, 454-461.
4. Тоом А.Л.: О сложности реализации двоичных функций, имеющих мало "подфункций". Пробл. кибернетики, вып. 18, 1967, 83-90.
5. Чимев К.Н.: Върху някои свойства на функциите, Год. на ВТУЗ. Математика, т. VII, кн. 1, 1971, 23-32.
6. Чимев К.Н.: Върху инвариантността на отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т. VIII, кн. 1, 1972, 129-136.
7. Чимев К.Н.: Върху подфункциите и силно съществениите променливи на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т. IX, кн. 4, 1973, 43-55.
8. Чимев К.Н.: Върху отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ, Математика, т. VII, кн. 3, 1971, 7-12.
9. Лупанов О.Б.: Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 7, 1962, 61-114.
10. Соловьев Н.А.: К вопросу о существенной зависимости функции алгебры логики. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 9, 1963, 333-335.
11. Брейтбарт Ю.Я.: О существенных переменных функции алгебры логики. ДАН СССР, 1967, т. 172, № 1, 9-10.

12. Solomaa A.: On essential variables of functions, especially in the algebra of logic. *Annales academiae scientiarum fennicae, ser.A, 339 /1963/, 1-11.*
13. Чимев К.Н.: Върху силно съществените променливи на функциите от P_K . Год. на ВТУЗ. Математика, т. V, кн. 2, 1968/69, 155-162.
14. Чимев К.Н.: Върху зависимостта на функциите от P_K от аргументите им. Год. на ВТУЗ. Математика, т. IV, кн. 3, 1967, 5-13.
15. Чимев К.Н.: Върху отделимите подмножества и силно съществените променливи на функциите. Год. на ВТУЗ. Приложна математика, т. X, кн. 4, 1974, 7-13.
16. Csimev K.N.: Függvény argumentumai halmazának leválasztásáról. *MTA SzTAKI Közlemények, 24, 1980, 19-25.*

Ö s s z e f o g l a l ó

Függvények invariáns tulajdonságairól

A cikkben függvények bizonyos argumentumhalmazainak az argumentumok rögzítésére vonatkozó invarianciájával kapcsolatos kérdéseket tárgyal a szerző.

S u m m a r y

On some invariant properties of functions

In the paper the author looks over some problems of the invariancy of certain sets of arguments of functions with respect to replacement of arguments by constants.