MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények 24/1980.**

О ВЫДЕЛИМЫХ МНОЖЕСТВ АРГУМЕНТОВ ФУНКЦИЙ

К.Н. Чимев

В работе исследуются вопросы, связанные с выделимыми множествами аргументов функций /выделимымыми m-торками/, структурными свойствами гиперграфов функций и инвариантностью выделимых m-торек функций при подстановке некоторых аргументов константами.

Используется терминология от [1 - 15] .

Теорема 1. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ порядка $n(n \geqq 3)$ и x_1 образует выделимые m-торки для f только переменными $x_2, \ldots, x_r$ $(m \leqq r \leqq n-1)$, то для каждого $\ell(2 \leqq \ell \leqq m)$, каждая одна из переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ образует выделимую ℓ-торку для f, в которой участвует хоть одна из переменных $x_2, \ldots, x_r$.

Доказательство. С помощью теоремы 1 от [6] доказывается /при данных условиях/, что если предположим, что x_n не образует выделимую пару ни с одной из переменных $x_2, \ldots, x_n$, то существуют значения $c'_2, \ldots, c'_r$ для $x_2, \ldots, x_r$ таких, что функция

$$f_1 = f(x_1, c'_2, \ldots, c'_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

зависит существенно от x_1 и x_n.

Если число существенных переменных функции f_1 не больше m, из теоремы 4 от [7] следует, что существет выделимая m-торка для f, в которой участвуют x_1 и x_n , что невозможно.

Если число существенных переменных функции f_1 больше m, то из теоремы 1 от [5] следует, что существует выделимая m-торка для f, в которой участвует x_1 и хотя бы одна из переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, что невозможно.

Из доказанного следует, что переменная x_n образует выделимую пару для f хотя бы с одной из переменных $x_2, \ldots, x_r$. Тогда из теоремы 4 от [7] следует, что для каждого ℓ, существует выделимая ℓ-торка для f, в которой участвует x_n и хотя бы одна из переменных $x_2, \ldots, x_r$.

По аналогичному способу теорема 1 доказывается и для каждой одной из переменных $x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}$.

Нужно отметить, что при $m = \ell = 2$ утверждение в теореме 1 доказано в [8] .

Гиперграф функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, по отношении выделимы m-торек функции, будем называть гиперграфом с вершинами существенные переменные функции f и ребрами - выделимые m-торек функции f.

Гиперграф функции f по отношении выделимые m-торек будем обозначать с H_f^m .

Две вершины гиперграфа будем называть смежными, если существует ребро, которое содержит эти вершины.

Если две вершины гиперграфа смежные, будем говорить, что расстояние между ними равно 1.

Если вершины V_1 и V_2 гиперграфа не смежные, но существует вершина V_3, которая смежная с каждым из вершин V_1 и V_2, будем говорить, что расстояние между V_1 и V_2 равно 2.

<u>Теорема 2</u>. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ порядка $n (n \geq 3)$, то для каждого $m (2 \leq m \leq n)$ гиперграфа H_f^m связаны и расстояние

между какими-нибудь двумя вершинами не превосходит 2.

Верность теоремы следует из теоремы 1.

<u>Теорема 3</u>. Если функция $f(x_1,\dots,x_n)$ порядка $n(n \geqq 3)$, и переменная x_1 образует выделимые m-торек для f только с переменными $x_2,\dots, x_r(m \leqq r \leqq n-1)$, то для каждого натурального числа $\ell(2 \leqq \ell \leqq m)$, переменная x_1 не образует выделимые ℓ-торек, в которых участвуют переменные из множества $\{x_{r+1},\dots, x_n\}$.

Теорему 3 можно доказать с помощью теоремы 4 от [7] .

<u>Следствие</u>. При условиях теоремы 3 для каждого знаяения c_1 для x_1 функция $f(x_1 = c_1)$ зависит существенно от переменных $x_{r+1},\dots, x_n$.

Верность утверждения следует из теоремы 3 и теоремы 1 от [6].

<u>Теорема 4</u>. Если функция $f(x_1,\dots,x_n)$ порядка $n(n \geqq 3)$ и переменная x_1 образует только одну ыделимую r-торку для f с переменными $x_2,\dots,x_r(2 \leqq r \leqq n-1)$, то для каждого $i=2,\dots, r$, пара (x_1, x_i) выделима для f.

<u>Доказательство</u>. При условиях теоремы, не ограничивая общности рассуждения, докажем, например, что пара (x_1, x_2), выделима для $f(x_1,\dots, x_n)$.

Допустим, что пара (x_1, x_2) не выделимая для $f(x_1,\dots, x_n)$. Тогда с помощью теоремы 3 и теоремы 1 от [6] доказывается, что существует функция g порядка ℓ, $2 \leqq \ell \leqq r$ которая зависит существенно от x_1 и x_n. Тогда из теоремы 4 от [7] следует, что существует выделимая r-торка для f, в которой участвуют x_1 и x_n, что невозможно.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $f(x_1,\dots, x_n)$ функция порядка $n(n \geqslant 3)$ и x_1

образует выделимые m-торек для f только с переменными $x_2, \ldots, x_r$ $(m \leqq r \leqq n-1)$.

Если одна ℓ-торка $(2 \leqq \ell \leqq m)$ выделима для f и содержит хотя бы одну из переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, то она выделима и для каждой одной, из функций $f(x_1 = c_1)$, где c_1 какое-нибудь значение для x_1.

Доказательство. Теорему 5 можно доказать отдельно для $\ell = m$ и отдельно для $2 \leqq \ell \leqq m-1$. При этом можно воспользоваться теоремами 3 и 4, 1 от [5] , 1 от 6 и 4 от [7].

Будем говорить, что переменная x_i порядка p для функции f, по отношению выделимых m-торек, если существуют точно p выделимые m-торек для f, в которых участвует x_i.

Порядка переменная x_i для функции f, по отношении выделимых m-торек будем обозначать с $P^m_{x_i, f}$

Теорема 6. Если не существует выделимая m-торка для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая содержит переменные x_i и x_j, то

$$P^m_{x_i, f} = P^m_{x_i, f\,(x_j = c_j)},$$

где c_j какое-нибудь значение для x_j.

Верность утверждения в теореме следует из теоремы 5.

Теорема 6 является обобщением теоремы 1 от [6] .

Следствие. Если вершины x_i и x_j не смежные в гиперграфе H^m_f , то какое бы ни было значение c_j для x_j, степень вершины x_i для гиперграфа $H^m_{f(x_j = c_j)}$ равна степени вершины x_i для гиперграфа H^m_f .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Яблонский С.В.: Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. В.А. Стеклова, т.51, 1958, 5-142.

2. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.: Функции алгебры логики и классы Поста, Москва, 1966.

3. Schwartz R.E.: Existence and uniquenese properties of boolean functions. SIAM Jurnal on applied matematics, 1970, 18, 2, 454-461.

4. Тоом А.Л.: О сложности реализации двоичных функций, имеющих мало "подфункции". Пробл. кибернетики, вып. 18, 1967, 83-90.

5. Чимев К.Н.: Върху някои свойства на функциите, год. на ВТУЗ. Математика, т.УII, кн. 1, 1971 23-32.

6. Чимев К.Н.: Върху инвариантността на отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т. УIII, кн. 1, 1972, 129-136.

7. Чимев К.Н.: Върху подфункциите и силно съществените променливи на функциите. Год. на ВТУЗ. Математика, т.IX, кн. 4, 1973, 43-55.

8. Чимев К.Н.: Върху отделимите двойки на функциите. Год. на ВТУЗ, Математика, т. УII, кн. 3, 1971, 7-12.

9. Лупанов О.Б.: Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 7, 1962, 61-114.

10. Соловьев Н.А.: К вопросу о существенной зависимости функции алгебры логики. Сб. "Проблемы кибернетики", вып.9, 1963, 333-335.

11. Бейгбарт Ю.Я.: О существенных переменных функции алгебры логики. ДАН СССР, 1967, т. 172, № 1, 9-10.

12. Solomaa A.: On essential variables of functions, especially in the algebra of logic. Annales academiae scientiarum fennicae, ser. A, 339 /1963/, 1-11.

13. Чимев К.Н.: Върху силно съществените промениливи на функциите от P_k. Год. на ВТУЗ. Математика, т.У, кн. 2, 1968/69, 155-162.

14. Чимев К.Н.: Върху зависимостта на функциите от P_k от аргументите им. Год на ВТУЗ. Математика, т. ІУ, кн 3, 1967, 5-13.

15. Чимев К.Н.: Върху отделимите подмножества и сильно съществените променливи на функциите. Год. на ВУЗ. Приложна математика, т. X, кн. 4, 1974, 7-13.

ÖSSZEFOGLALÁS

Függvény argumentumai halmazának leválasztásáról

K. N. Csimev

A szerző hat tételt bizonyit be függvény argumentumai halmazainak leválasztásáról, függvény hipergráfjainak strukturájáról és függvények leválasztott m-tóruszocskáinak konstans helyettesitéssel szembeni invarianciájáról.

On selection of argument sets

K. N. Tshimev

In the paper six theorems will be proved about the selection of argument sets from a function, about the hypergraphs' structure of a function and about the invariance of the "m-tuple" with respect to the substitution of some arguments.