MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

К определению операций: отношение эквивалентности, отношение частичной упорядоченности, отношение упорядоченности группа метрика

Э. Стошек- Х. Винтер *

O. Введение

В рамках разрабатываемой в настоящее время общей теории автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУТП) /I/ описываются реальные и абстрактные объекты (операторы, операнды, операции, инструкции и цели операций) в базисных и информационных системах, а именно с помощью классификационных (номинальных), сравнительных (ординальных) и количественных (метрических) признаков, а также соотношений между последними. При этом оказывается, что эти признаки следует считать вполне одностепенными. Описание с помощью

классификационного
сравнительного
количественного

признака основывается на существовании

отношения эквивалентности
отношения частичной или полной упорядоченности
в метрике

во множестве величин признаков. Из этого вытекает, что и от-

* Дрезденский технический университет, секция обработки информации

ношение эквивалентности, отношения частичной или полной упорядоченности и метрику следует считать одностепенными понятиями, что следует смотреть на них с единых точек зрения. Настоящая работа хочет создать для этого математическую основу.

Предложая работу /2/, приводим более широкую унификацию определений названных понятий, включая группу, коммутативную группу, квазиметрику, линейную метрику. Сформулированные затем матричные критерии для существования отношений эквивалентности, частичной или полной упорядоченности, для существования группы, коммутативной группы, квазиметрики, метрики и линейной метрики показывают формально одинаковую структуру. Это значит – названные понятия есть одностепенные двухразрядные "связи" элементов множества М, описанные однозначным изображением $\varphi : M \times M \rightarrow N$.

I. Определения

I.I. Отношение эквивалентности

Двоичное отношение R во множестве М[I/] называется отношением эквивалентности в М, если для двухразрядной функции

$$\varphi : M \times M \rightarrow \{0, I\} \tag{I.I}$$

соотнесенной с помощью

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{для } (x,y) \notin R \\ 1 & \text{для } (x,y) \in R \end{cases} \tag{I.2}$$

действительно следующее:

а/ $\underset{x \in M}{(\forall x)} \varphi(x,x) = 1$ (2.I)

б/ $\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (2.2)

I/ Пусть будет М здесь и в следующем конечным множеством, а в/ $(\forall x)(\forall y) \bigwedge\limits_{\substack{x,y\in M \\ z\in M}} (\varphi(x,z)\leftrightarrow\varphi(y,z)) = \varphi(x,y)$ 2/ (2.3.I)

или, что является равнозначным:

$$(\forall x)(\forall y)\bigvee_{\substack{x,y\in M \\ z\in M}}(\varphi(x,z)\wedge\varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \qquad (2.3.2)$$

I.2. Отношение частичной упорядоченности

Двоичное отношение R во множестве М называется

нерефлексивным / рефлексивным — отношением частичной упорядоченности в М,

если для двухразрядной функции

$$\varphi : M\times M \to \{0,I\} \qquad (3.I)$$

соотнесенной с помощью

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{для } (x,y)\notin R \\ 1 & \text{для } (x,y)\in R \end{cases} \qquad (3.2)$$

действительно следующее:

а/ $(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x) = \begin{cases} 0 & \text{(нерефлекс.)} \\ 1 & \text{(рефлекс.)} \end{cases}$ (4.I)

б/ $(\forall x)(\forall y)_{\substack{x\,y\in M \\ x\neq y}}\ \varphi(x,y)\bigwedge\varphi(y,x) = 0$ (4.2)

2/ Если представить (x, y) в виде матрицы то в/ равнозначно со следующим: Для всех x, y М некоторая строка (столбец) x от , насчет существования в ней единиц, или идентична с некоторой строкой (столбцом) y, или же отличается от последней. То есть, отношение эквивалентности в М определяет классификацию в М таким образом, что всегда существует соотношение между всеми элементами данного класса, но не между двумя элементами различных классов.

в/ $$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \bigwedge_{z\in M} (\varphi'(x,z) \leftarrow \varphi'(y,z)) = \varphi'(x,y) \qquad 3/ \qquad (4.3.1)$$

или, что является равнозначным:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \bigvee_{z\in M} (\varphi'(x,z) \wedge \varphi'(z,y)) = \varphi'(x,y) \qquad (4.3.2)$$

где

$$\varphi'(x,y) = \begin{cases} \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{для } x \neq y \\ 1 & \phantom{\text{для }} x = y \end{cases} & \text{(нерефлекс.)} \\ \varphi(x,y) & \text{(рефлекс.)} \end{cases} \qquad (4.3.3)$$

I.3. <u>Отношение упорядоченности</u>

Нерефлексивное / рефлексивное — отношение частичной упорядоченности R в M

называется

нерефлексивным / рефлексивным — отношением упорядоченности в M, если действительно следующее:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)} \ \varphi(x,y) \leftrightarrow (y,x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \neq y \\ 1 & \phantom{\text{для }} x = y \end{cases} \qquad (5)$$

3/ в/ равнозначно со следующим: Для всех x, $y \in M$ некоторая строка (столбец) x от $\underline{\varphi}'' = (\varphi''(x,y))$, насчет существования в ней единиц, или входит в некоторую строку (столбец) y, или же отличается от последней.

$$\varphi''(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{(нерефлекс.)} \\ \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{для } x \neq y \\ 0 & \phantom{\text{для }} x = y \end{cases} & \text{(рефлекс.)} \end{cases}$$

I.4. Группа

Двухразрядная алгебраическая операция x o y и одноразрядная алгебраическая операция x^{-I} (инверсия) во множестве M пусть будут определены следующим образом:

$$\underset{x\in M}{(\forall x)}\ x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e \tag{6}$$

Тогда x o y называется группой в M, если для двухразрядной функции

$$\varphi : M\times M \to M, \tag{7.I}$$

соотносенной с помощью

$$\varphi(x\ y) = x \circ y \tag{7.2}$$

действительно следующее:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \underset{z\in M}{\mathrm{id}}\,(\varphi(x,z)\circ\varphi(z^{-1},y)) = \varphi(x,y) \tag{8.I}$$

где

$$\mathrm{id}(x_1,x_2,\ldots x_n) = \begin{cases} x_1 & \text{для } x_1 = x_2 = \ldots = x_n \\ y\in\{x,x,\ldots x_n\} & \text{иначе} \end{cases} \tag{8.2}$$

I.5. Коммутативная группа

Группа x o y в M называется коммутативной группой в M, если действительно следующее:

$$\underset{x,y\in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)\ . \tag{9.I}$$

С учётом (9.I) вытекает из (8.I)

(9.2)

I.6. Квазиметрика

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \to \mathbb{R} \quad 4/ \qquad (I0)$$

называется квазиметрикой на M, если действительно:

а/ $$\underset{x \in M}{(\forall x)} \varphi(x,x) = 0 \qquad (II.I)$$

б/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad (II.2)$$

в/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \min_{z \in M} (\varphi(x,z) + \varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \qquad (II.3)$$

I.7. Метрика

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \to \mathbb{R}_0 \quad 5/ \qquad (I2)$$

называется метрикой (расстоянием) на M, если действительно:

а/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) \begin{cases} = 0 & \text{для } x = y \\ > 0 & \text{для } x \neq y \end{cases} \qquad (I3.I)$$

б/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad (I3.2)$$

в/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \min_{z \in M} (\varphi(x,z) + \varphi(y,z)) = \varphi(x,y) \qquad (I3.3.I)$$

или, что является равнозначным

$$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)} \max_{z \in M} |\varphi(x,z) - \varphi(z,y)| = \varphi(x,y) \qquad (I3.3.2)$$

4/ $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел

5/ $\mathbb{R}_0$ – множество неотрицательных вещественных чисел

I.8 Линейная метрика [6/]

Двухразрядная функция

$$\varphi : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_0 \tag{I4}$$

называется линейной метрикой на М, если действительно:

а/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) \begin{cases} =0 & \text{для } x = y \\ >0 & \text{для } x \neq y \end{cases} \tag{I5.I}$$

б/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x) \tag{I5.2}$$

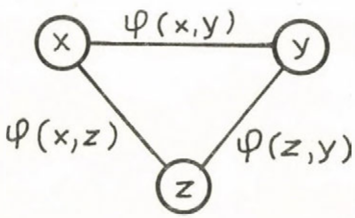
в/ $$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \underset{z \in M}{id}\left((\varphi(x,z)+\varphi(y,z))\ vel\ |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)| \right) = \varphi(x,y) \tag{I5.3}$$

6/ Уравнение в/ вытекает из уравнений а/, б/ и из неравенства треугольника

$$\underset{x,y,z \in M}{(\forall x)(\forall y)(\forall z)}\ (\varphi(x,z)+\varphi(z,y)) \geq \varphi(x,y) \ .$$

Пусть усилится неравенство треугольника следующим образом:

Для всех троек $(x, y, z) \in M^3$ всегда есть два расстояния, сумма которых равна третьему расстоянию (сравни изображенный рядом граф, причем узлы - элементы М, ребраб расстояние, существующее всегда между двумя элементами М). Иначе говоря - для всех $(x, y, z) \in M^3$ площадь треугольника со сторонами $\varphi(x,y), \varphi(x,z), \varphi(y,z)$ равна нулю.



Таким образом получаем специальную метрику, которую в следующем хотим обозначить как "линейную метрику".
Учитывая изображение детерминатов площади треугольника при заданных длинах сторон (ср.

для линейной метрики действительно следующее:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)_{x,y,z\in M} \begin{vmatrix} 0 & \varphi(x,y) & \varphi(x,z) & \varphi(y,z) \\ \varphi(x,y) & 0 & \varphi(y,z) & \varphi(x,z) \\ \varphi(x,z) & \varphi(y,z) & 0 & \varphi(x,y) \\ \varphi(y,z) & \varphi(x,z) & \varphi(x,y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi(x,y) & (\varphi(x,z)+\varphi(y,z)) \\ (\varphi(x,z)+\varphi(y,z)) & \varphi(x,y) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(x,y) & |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)| \\ |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)| & \varphi(x,y) \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

или после преобразования

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)_{x,y,z\in M} \text{"}\varphi(x,y)=(\varphi(x,z)+\varphi(y,z))\text{"} \vee \text{"}\varphi(x,y)=|\varphi(x,z)-\varphi(y,z)|\text{"}$$

из которого наконец вытекает, учитывая ур. (8.2):

$$(\forall x)(\forall y)_{x,y\in M}\ \underset{z\in M}{id}((\varphi(x,z)+\varphi(y,z))\ vel\ |\varphi(x,z)-\varphi(y,z)|) = \varphi(x,y)$$

где

$$x_1\ vel\ x_2 = \begin{cases} \text{или } x_1 \text{ или } x_2 & \text{для } x_1 \neq x_2 \\ x_1 & \phantom{\text{для }} x_1 = x_2 \end{cases}.$$

Усиленное неравенство треугольника:

> Для всех $(x, y, z) \in M^3$ всегда есть два расстояния, сумма из которых равна третьему.

можно истолковать и следующим образом:

Для всех $(x, y, z) \in M^3$ действительно следующее:

Откладывая на прямой друг за другом оба более кратких расстояния, можно получить на ней третье (самое большое) расстояние – как сумму первого и второго. Это значит, что в общем каждое расстояние между двумя элементами M или является "элементарным расстоянием" или позволяет изображение на прямой, путем отложения там друг за другом элементарных расстояний. Это отвечает основному принципу измерения с помощью прямой (линейной) линейки.

2. Матричное представление данных в первой главе определений

Если вводится $card(M)$-$card(M)$- матрица функции $\varphi(x,y)$

$$\underline{\varphi} = \left(\varphi(x,y) \right) \tag{I6}$$

и используется обобщенное матричное произведение

$$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} \quad 7/ \tag{I7}$$

то можно написать в матричном виде условия существования отношения эквивалентности, отношений частичной и полной упорядоченности, группы и коммутативной группы, квазиметрики, метрики или линейной метрики. Эти матричные критерии систематически составлены в таблице I.

Из таблицы I. вытекает следующее:

I/ Матричные критерии существования отношения эквивалентности, отношений частичной и полной упорядоченности, существования группы и коммутативной группы, квазиметрики, метрики или линейной метрики имеют формально одинаковую структуру (ср. работу /2/). То есть, отношение эквивалентности, группу и метрику следует считать одностепенными двухразрядными "связами" элементов некоторого множества М, описанными однозначным изображением

$$\varphi : M \times M \rightarrow N \tag{I8}$$

7/ Ср. Берж, К.: Теория графов и ее применения Москва, 1962 г., стр. I50-I52.

$a + b$ – обобщенное сложение

$a \bullet b$ – обобщенное умножение

В случае $N =$ $\{0,1\}$ / M / $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_0$ эта связь относится к

типу отношения

типу операции (группы)

метрическому типу.

2/

Если $\underline{\varphi}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ является матрицей функции $\varphi_\nu : M_\nu \times M_\nu \rightarrow N$, соотносенной с ______ в (на)множестве М,	то обобщенное тензорное матричное произведение $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 \otimes \underline{\varphi}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{\varphi}_n$ с $a \bullet b =$ ______________	является матрицей функции $\varphi : M \times M \rightarrow N$, соотнесенной с ______________ в (на) множестве $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$
отношение эквивалентности	$a \wedge b$	отношение эквивалентности
рефлексивное отношение частичной упорядоченности	$a \wedge b$	рефлексивное отношение частичной упорядоченности
квазиметрика	$a + b$	квазиметрика
метрика	$a + b$	матрика

		$\varphi : M\times M \rightarrow (0,1)$		
$(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x)=1$	$(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x)=0$	$(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x)=1$	$(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x)=0$	$(\forall x)_{x\in M}\ \varphi(x,x)=1$
$\underline{\varphi}=\underline{\varphi}^T$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{0}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{e}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{0}$ $\underline{\varphi}\longleftrightarrow\underline{\varphi}^T=\underline{e}$	$\underline{\varphi}\wedge\underline{\varphi}^T=\underline{e}$
$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'^T=\underline{\varphi}$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee\underline{e}$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}^T=\underline{\varphi}$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee\underline{e}$	
$a+b=a\wedge b$ $a\cdot b=a\longleftrightarrow b$		$a+b=a\wedge b$ $a\bullet b=a\leftarrow b$		
$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}'$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee e$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$	$\underline{\varphi}'\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}'$ $\underline{\varphi}'=\underline{\varphi}\vee e$	$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}=\underline{\varphi}$
		$a+b=a\vee b$ $d\bullet b=a\wedge b$		

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi : M \times M \to M$</td><td>$\varphi : M \times M \to \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\varphi : M \times M \to \mathbb{R}_0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\underset{x \in M}{(\forall x)}\ \varphi(x,x) = 0$</td><td colspan="2">$\underset{x,y \in M}{(\forall x)(\forall y)}\ \varphi(x,y) \begin{cases} = 0 & x = y \\ > 0 & x \neq y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^T$</td><td colspan="3">$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}^T$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^{**T} = \underline{\varphi}$
$\underline{\varphi}^{**} = (\varphi(x, y^{-1}))$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = a \circ b$</td><td colspan="2">$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T = \underline{\varphi}$
$a + b = \min(a,b)$
$a \cdot b = a + b$</td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^T = \underline{\varphi}$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = (a+b)$ vel $\lvert a-b \rvert$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi}^{*} = \underline{\varphi}$
$\varphi^{*} = (\varphi(x^{-1}, y))$
$a + b = id\,(a,b)$
$a \cdot b = a \circ b$</td><td></td><td>$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$
$a + b = \max(a,b)$
$a \cdot b = \lvert a-b \rvert$</td><td></td></tr>
</table>

3/ Пусть будет $\underline{a} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in M$, m-m- матрицей и $b = (b_{ij})$, $b_{ij} \in M$, n-n- матрицей. Тогда $(m \cdot n)$-$(m \cdot n)$- матрица

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \quad \begin{matrix} a_{11}\underline{b} & a_{12}\underline{b} & \cdots & a_{1m}\underline{b} \\ a_{21}\underline{b} & a_{22}\underline{b} & \cdots & a_{2m}\underline{b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\underline{b} & a_{m2}\underline{b} & \cdots & a_{mm}\underline{b} \end{matrix}$$

называется обобщенным тензорным произведением матриц $\underline{a}$ и , по отношению к (обобщенному) умножению
Над алгебраической структурой

$$a + b = b + a, \quad a \bullet b = b \bullet a$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$
$$(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$$

действительно следующее:

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \otimes \underline{c} = \underline{a} \otimes (\underline{b} \otimes \underline{c})$$
$$(\underline{a} \otimes \underline{b})^T = \underline{a}^T \otimes \underline{b}^T$$
$$(\underline{a}_1 \otimes \underline{a}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{a}_k)(\underline{b}_1 \otimes \underline{b}_2 \otimes \ldots \otimes \underline{b}_k) = (\underline{a}_1 \underline{b}_1) \otimes (\underline{a}_2 \underline{b}_2) \otimes \ldots \otimes (\underline{a}_k \underline{b}_k)$$

Из последнего сразу следует: Если над для всех

$$\underline{\varphi}_\nu \underline{\varphi}_\nu = \underline{\varphi}_\nu ,$$

то действительно и для $\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_1 \otimes \underline{\varphi}_2 \otimes \quad \otimes \underline{\varphi}_n$

$$\underline{\varphi}\,\underline{\varphi} = \underline{\varphi} .$$

Литература

1 Stahn, H., Stand und Entwicklung automatisierter Systeme technologischer Prozesse (ASUTP). die Technik 30 (1975) 10, S. 620-628.

2 Stoschek, E., Stahn, H., Zur Definition der Begriffe Aquvalenzrelation, Halbordnungsrelation und Metrik EIK (in Vorbereitung)

(готовится к изданию).

Ö s s z e f o g l a l ó

A müveletek definiciójáról; equivalenciareláció, részleges rendezés, teljes rendezés, csoport, távolság

Sztosek E. – Winter H.

A véges M halmazon definiált bináris relációkat/ mint equivalencia reláció, algebrai müvelet távolság, stb. mátrix alakban felirva, és a kapott 1 mátrixra érvényes $\varphi\varphi = \varphi$ azonosság felhasználásával az adott relációra existencia kritériumokat vezetünk le.

S u m m a r y

On the definition of operations; equivalence relation, partial ordering, complete ordering, group, distance

E. Sztosek – H. Winter

Writing a binary relation, such as equivalence relation, ordering, algebraic operation, distance etc., on a finite set M in matrix form of and using the identity $\varphi\varphi = \varphi$ existence criteria are obtained for the given relation.