MTA Számitástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 17/1976.

RELAXÁCIÓS MÓDSZER ÁLTALÁNOSITOTT MÁTRIXINVERZ KISZÁMITÁSÁRA

Galántai Aurél – Varga Gyula

A Southwelltől származó relaxációs elv sok esetben igen hasznosnak bizonyult (lásd pl. [4]). Ezt az elvet fogjuk most kiterjeszteni általánositott mátrixinverzek számitásának esetére.

Legyen A (mxn)-es mátrix és W az (nxm)-es komplex elemü mátrixok Banach tere az euklidesi normával. Jelölje továbbá $P_{R(A)}$ a C^m ortogonális projekcióját $R(A)$-ra, és $P_{R(A^*)}$ a C^n ortogonális projekcióját $R(A^*)$-ra.

Tétel. *Legyen* $B_n \epsilon W$ *olyan mátrix, amelynek oszlopai az* A^* *oszlopai által kifeszitett lineáris vektortérben vannak.*
Ha teljesülnek a $\|B_n\| \leq K_1$,

(1) $$\|P_{R(A)} - AB_n\| \leq K < 1$$

és a

(2) $$\|P_{R(A^*)} - B_nA\| \leq K < 1$$

feltételek $(n = 0,1,2,\ldots)$, akkor az

(3) $$X_n = B_n + X_{n-1}(P_{R(A)} - AB_n) \quad (n = 1,2,\ldots)$$

sorozat $(X_0 = B_0)$ konvergál az A^+ általánositott inverzhez, és alkalmas $0 < c \,\epsilon R^1$ konstans-sal

(4) $$\|X_n - A^+\| \leq c\, K^n.$$

Bizonyitás. A tétel bizonyitásához azt a tényt fogjuk felhasználni, hogy az egyidejüleg fennálló

(5) $$XAX = X$$

és

(6) $$AX = P_{R(A)}, \quad XA = P_{R(A^*)}$$

egyenlőségek már egyértelmüen meghatározzák az A mátrix A^+ általánositott inverzét [2].

a.) Először a $\lim_{n \to \infty} \|P_{R(A)} - AX_n\| = 0$ relációt igazoljuk. A (3) rekurzió és

(7) $$P_{R(A)} A = AA^+A = A = AP_{R(A^*)}$$

alapján

$$P_{R(A)} - AX_n = (P_{R(A)} - AX_{n-1})(P_{R(A)} - AB_n) = \prod_{i=0}^{n} (P_{R(A)} - AB_i).$$

Minthogy

$$\|P_{R(A)} - AX_n\| \leqslant \prod_{i=0}^{n} \|P_{R(A)} - AB_i\| \leqslant K^{n+1},$$

azért

(8) $$\lim_{n \to \infty} \|P_{R(A)} - AX_n\| = 0.$$

b.) Hasonlóan belátható, hogy

(9) $$P_{R(A^*)} - X_nA = (P_{R(A^*)} - X_{n-1}A)(P_{R(A^*)} - B_nA) = \prod_{i=0}^{n} (P_{R(A^*)} - B_iA)$$

és

(10) $$\lim_{n \to \infty} \|P_{R(A^*)} - X_nA\| = 0.$$

c.) Belátjuk, hogy $\lim_{n \to \infty} \|X_nAX_n - X_n\| = 0.$

Legyen

$$C_n = P_{R(A)} - AB_n$$

és

$$D_n = P_{R(A^*)} - B_nA.$$

Ekkor

$$X_n = B_n + X_{n-1}C_n,$$

illetve zárt alakban

(11) $$X_n = B_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i \prod_{j=i+1}^{n} C_j + B_0 \prod_{i=1}^{n} C_i \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

A zárt alakból könnyen látható, hogy

$$P_{R(A^*)}X_n = X_n$$

és

$$\|X_n\| < \frac{K_1}{1-K} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

A (9) relációból kapjuk, hogy

$$X_n A = P_{R(A^*)} - \prod_{i=0}^{n} D_i,$$

ahonnan

$$X_n A X_n - X_n = P_{R(A^*)}X_n - (\prod_{i=0}^{n} D_i)X_n - X_n = -(\prod_{i=0}^{n} D_i)X_n .$$

Ezért

$$\|X_n A X_n - X_n\| \leqslant \frac{K_1}{1-K} K^{n+1},$$

amelyből, $K < 1$ miatt,

(12) $$\lim_{n\to\infty} \|X_n A X_n - X_n\| = 0.$$

d,) Végül belátjuk, hogy $X_n \to A^+$ lineárisan.

Tekintsük a

$$\lim_{n\to\infty} AX_n = P_{R(A)}$$

$$\lim_{n\to\infty} AA^+ = P_{R(A)}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} X_n A = P_{R(A^*)}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^+ A = P_{R(A^*)}$$

valamint

$$\lim_{n\to\infty} (X_n A X_n - X_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (A^+ A A^+ - A^+) = 0$$

relációkat, amelyekben a konvergencia sebessége legalább lineáris. Világos, hogy egyrészt

$$X_nA - A^+A = \Delta_n \to 0, \qquad AX_n - AA^+ = \Gamma_n \to 0$$

lineérisan, másrészt

$$q_n = \|X_nAX_n - X_n - [A^+AA^+ - A^+]\| \to 0$$

szintén lineáris sebességgel. Minthogy

$$a_n = \|X_nAX_n - (X_nA - \Delta_n)A^+ + A^+ - X_n\| < c_1K^n,$$

azért az $\|A_1\| - \|A_2\| \leqslant \|A_1 - A_2\|$ relációt használva

$$|\|A^+ - X_n\| - \|X_n(AX_n - AA^+) + \Delta_nA^+\|| < c_1K^n.$$

Innen egyszerü átalakitással

$$\|A^+ - X_n\| < c_2K^n$$

következik, ami állitásunkat igazolja.

A javasolt módszer az [1] – [2] általánositása.

Numerikus példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = AA^* = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

T legnagyobb sajátértéke $\lambda_{max} = 12 + \sqrt{13}.$
Az A mátrix általánositott inverze

$$A^+ = \frac{1}{131} \cdot \begin{bmatrix} -22 & -64 & 45 \\ 13 & 14 & 27 \\ -70 & -25 & 36 \\ -39 & -42 & 50 \end{bmatrix}$$

A $B_1 = \alpha_i A^*$, $P_{R(A)} = I_n$ speciális választást és az α_i $(i = 1,2,3,4)$ értékeket alternative alkalmazva $\epsilon = 10^{-3}$ pontossággal kapjuk, hogy

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.1679 & -0.4885 & 0.3435 \\ 0.0992 & 0.1069 & 0.2061 \\ -0.5349 & -0.1908 & 0.2748 \\ -0.2977 & -0.3206 & 0.3817 \end{bmatrix}$$

$(\alpha_1 = 0.05,\ \alpha_2 = 0.07,\ \alpha_3 = 0.09,\ \alpha_4 = 0.11)$.

Végül köszönetünket fejezzük ki Lee Annának értékes segitségéért és tanácsaiért.

Irodalom

[1] A.Ben – Israel: An iterative method for computing the generalized inverse of an arbitrary matrix, Math.Comp. 19 (1965) 452-455.

[2] V.N.Joshi: Remarks on iterative methods for computing the generalised inverse, Studia Sci. Math. Hung. 8 (1973) 457-461.

[3] Rao, C.R. – Mitra, S.K.: Generalised Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley and Sons, New York, 1971.

[4] Szidarovszky F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1974.

Summary

A relaxation method for computation of generalized inverse of matrices

A. Galantai – Gy. Varga

The paper extends the relaxation principle to the computation of the Moore-Penrose inverse of matrices by an iteration. The rate of convergence of the proposed method is linear.

Р е з ю м е

О релаксационном методе вычисления обобщенной обратной матрицы

А. Галантаи - Дь. Варга

В статье идея релаксации распространяется на вычисление обратной матрицы типа Мура-Пенроза итерационном методом. Сходимость предлагаемого процесса линейная.