MTA Számitástechniaki és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 16/1976.

REGULÁRIS, OPERÁTOR EGYÜTTHATÓS STURM-LIOUVILLE EGYENLET SPEKTRUMÁNAK DISZKRÉTSÉGÉRŐL

Juhász Ferenc

Legyen H szeparábilis Hilbert tér. $\overline{H}$ álljon azon $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ vektor értékü, Bochner szerint mérhető függvényekből, amelyekre

$$\int (f(x), f(x))dx < \infty.$$

$\overline{H}$ szintén szeparábilis Hilbert tér, melyben

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Legyen $D \subset H$ mindenütt sűrű halmaz, $Q(x) : D \to H$ önadjungált, diszkrét spektrumú, egynél nagyobb operátor *mm.* x-re. Minden $h \epsilon D$-re $Q(x)h$ legyen $\overline{H}$ -beli. Legyen $ly = - y'' + Q(x)y$, ahol a vessző erős deriváltat jelöl. P_0 és P_π legyen pozitiv, önadjungált operátor H-n. Értelmezzük l-et az összes olyan

$$y(x) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} h_k \varphi_e(x)$$

függvényen, amely kielégiti az $y'(0) - P_0 y(0) = 0$, $y'(\pi) + P_\pi y(\pi) = 0$ peremfeltételeket, ahol $h_k \in D$, $\varphi_l(x) \epsilon C_2(0,\pi)$. Jelöljük L-lel l Friedrichs féle önadjungált kiterjesztését. Ekkor igaz a következő:

Tétel: *L spektruma diszkrét.*

Levitán és Szuvorcsenkova [2]-ben bizonyitotta a tételt azzal a további megszoritással, hogy Q inverze gyengén mérhető. Mászlov [1]-ben foglalkozik a szinguláris feladattal. Jelen dolgozat célja annak megmutatása, hogy az ott alkalmazott módszer milyen könnyedén elintézi a reguláris feladatot.

A bizonyitás a következő lemmán és annak Maszlov által közölt megforditásán alapul. Igazolásuk [1]-ben található.

Lemma: *Tegyük fel, hogy A teljesen folytonos operátor, A^{-1} létezik és értelmezési tartománya sürü. Ekkor minden A^{-1} értelmezési tartományában levő, gyengén nullához tartózo $y_n \rightharpoonup 0$ sorozatra.*

$$\sigma_n^2 = \frac{|y_n|^2}{\max\{|A^{-1} y_n|, \alpha\}} \to 0, \text{ ahol } \alpha > 0 \text{ rögzitett.}$$

Lemma. *Tegyük fel, hogy A korlátos operátor H-n, A^{-1} létezik és értelmezesi tartománya sürü. A akkor és csak akkor teljesen folytonos, ha A^{-1} minden, az értelmézési tartományában lévö, egy normáju, gyengén nullához tartozó sorozatot a végtelenbe visz.*

Tételünk bizonyitásához elegendő megmutatni, hogy $\sqrt{L}^{-1}$ teljesen folytonos, ebből következik, hogy $\sqrt{L}$ és igy L spektruma is diszkrét. A második lemmát felhasználva tegyük fel indirekte, hogy létezik olyan $\{y_n\}$ sorozat, $\|y_n\| = 1$, $y_n \rightharpoonup 0 \in \overline{H}$, melyre

$$(\sqrt{L}y_n, \sqrt{L}y_n) = (P_0 y(0), y(0)) + (P_\pi y(\pi), y(\pi)) +$$

$$+ \int_0^\pi ((y_n', y_n') + (y_n, Qy_n)) \leqslant C_1$$

Megmutatjuk először, hogy $|y_n(x)| \leqslant C_2$ minden n-re és x-re.

$$(1) \qquad |\, |y_n(x_2)|^2 - |y_n(x_1)|^2 | \leqslant 2 | \int_{x_1}^{x_2} (y_n', y_n) | \leqslant \int_0^\pi (|y_n'|^2 + |y_n|^2) \leqslant C_1$$

Ha $|y_n(x)| \leqslant C_2$ nem teljesülne, akkor létezne olyan $\{x_i\}$ sorozat, melyre $|y_n(x_i)| \to \infty$. Ekkor azonban (1) miatt $y_{n_i}(x) \to \infty$ minden x-re, ami ellentmond az $y_{n_i} \in \overline{H}$ feltételnek.

Mivel $\|y_n'\| \leqslant C_1$ ezért legyen az $\{y_{n_i}'\}$ sorozat olyan, hogy $y_{n_i}' \rightharpoonup f \in \overline{H}$. Minthogy $y_{n_i} \rightharpoonup 0 \in \overline{H}$, ezért $f = 0 \in \overline{H}$. Legyen $X(\xi)$ a $[0,x]$ intervallum karakterisztikus függvénye. Ekkor tetszőleges $h \in H$-ra

$$(2) \qquad (h, y_{n_i}(x) - y_{n_i}(0)) = (h, \int_0^x y'_{n_i}) = \int_0^\pi (hX(\xi), y'_{n_i}(\xi))d\xi \to 0$$

mivel $y'_{n_i} \rightharpoonup 0 \in \overline{H}$.

Válasszunk ki az $\{y_{n_i}(0)\}$ sorozatból egy $y_{n_{i_k}}(0) \rightharpoonup g \in H$ sorozatot. Ekkor (2) miatt $y_{n_{i_k}}(x) \rightharpoonup g \in H$ és minthogy $y_{n_{i_k}} \rightharpoonup 0 \in \overline{H}$, a Lebesque tétel felhasználásával kapjuk, hogy $g = 0 \in H$. $\{y_{n_{i_k}}\}$ tehát olyan sorozat, melyre $y_{n_{i_k}}(x) \rightharpoonup 0 \in H$ *mm.* x-re.

A továbbiakban az $\{y_{n_{i_k}}\}$ sorozatot jelöljük egyszerüen $\{y_n\}$ -nel.

Minthpgy $\sqrt{Q}^{-1}$ teljesen folytonos *mm.* x-re, ezért

$$\sigma_n^2 = \frac{|y_n|^2}{\max\{(y_n, Qy_n), \alpha\}} \to 0 \qquad mm.\ x\text{-re.}$$

Minthogy mérhető, ezért mértékben is tart 0-hoz. Ilymódon bármely $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ számhoz található olyan $N = N(\epsilon, \delta)$, hogy $n > N$ esetén az F_n halmaz pontjaiban $\sigma_n^2 \leqslant \delta$ továbbá

$\mathrm{mes}\overline{F_n} \leqslant \epsilon.$

Ekkor

$$\int_{F_n'} (y_n, y_n) \leqslant \delta \int_{F_n} \max \{(\sqrt{Q}yn, \sqrt{Q}yn), \alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \delta \int_{F_n} ((y_n, Qy_n) + \alpha) \leqslant \delta(C_1 + \alpha)\pi, \text{ továbbá}$$

$$\int_{F_n} (y_n, y_n) \leqslant c_1 \mathrm{mes}\overline{F_n} \leqslant C_1 \epsilon$$

Ha $\delta < \dfrac{1}{2(c_1 + \alpha)\pi}$ és $\epsilon < \dfrac{1}{2c_1}$, akkor $\int_0^\pi (y_n, y_n) < 1$, ami ellentmond feltételünknek.

Irodalom

[1] Маслов, В.П.: О критерии дискретности спектра уравнения Штурма - Лиувилля с операторным коэффициентом. Ф.А. 2.вып. 2. 1968, 63-67.

[2] Левитан, Б.М. - Суворченкова, Г.А.: Достаточные условия дискретности спектра уравнения Штурма - Лиувилля с Операторным коэффициентом. Ф.А. 2 вып. 2. 1968, 56-62.

[3] Рисс, Ф. - Секефальви-Надь, Б.: Лекции по функциональному анализу /1954/.

[4] Hille,E. - Phillips R.S.: Functional analysis and semi-groups /1957/.

[5] Achieser, N.I. - Glasmann, I.M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum /1954/.

[6] Данфорд, Н. - Шварц, Дж.Т.: Линейные операторы II. /1966/.

Summary

On the discreetness of spectrum of regular
Sturm–Liouville equation with operator coefficient

F. Juhász

The statement of this paper is proved in [2], with an additional condition of measurability. V. P. Maslov studied the singular equation in [1]. The aim of this paper is to show how usefully that method can be applied for the regular case.

Резюме

О дискретности спектра регулярного уравнения
Штурма-Лиувилля с операторным коэффициентом

Ф. Юхас:

Утверждение данной работы доказана в [2] с добавочным условием измеримости. В [1] В.П.Маслов изучал сингулярную задачу. Наша цель - показать, что метод Маслова полезно применяется также в случае регулярной задачи.