

ВЕНГЕРСКО-СОВЕТСКИЕ ОТНОШЕНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Матияш Арато

Во второй половине XIX века и в начале нашего века русские математики играли исключительную роль в исследованиях по теории вероятностей и математической статистике. П. Чебышев, А. Марков, А. Ляпунов и С. Бернштейн стали основателями и создателями таких важных разделов, как закон больших чисел, центральная теорема, метод характеристической функции, цепи Маркова и теория случайных процессов. Многие замечательные результаты носят с тех пор их имена. Своими работами они воодушевили исследователей во всем мире, что привело к бурному расцвету теории вероятностей и математической статистики. В Англии, Франции, США и многих других странах были созданы исследовательские центры, появилось немало выдающихся специалистов в этой области. Достаточно вспоминать имена Р. Фишера, П. Леви, Г. Крамера и Д. Дуба. Советская теория вероятностей занимает, если и не столь исключительное место, какое пришлось на долю классических русских работ, но все же очень значительное место. В большинстве стран теория вероятностей и математическая статистика стали не только темой исследований, но вошли в обязательную программу университетов. Несмотря на это, советская математика осталась верна старым традициям и влияет на дальнейшее развитие теории, продолжая занимать ведущее место в этой области науки. Работы С. Бернштейна, А. Хинчина, В. Романовского относятся главным образом к советскому периоду. Расцвет деятельности таких математиков, как А. Колмогоров, Н. Смирнов, Ю. Линник, и Б. Гнеденко происходил уже при советской власти. Их работы и результаты уже могут быть названы

классическими. Исследования, проводимые в Венгрии основываются на аксиоматике Колмогорова и тесно связаны с основными направлениями дальнеших исследований в этой области математики, проводимыми в Советском Союзе. В Советском Союзе существуют замечательные школы и немало талантливых специалистов в области теории вероятностей и математической статистики. Можно привести целый ряд имен молодых математиков, уже имеющих за своими плечами немалый опыт и достигших классических результатов, математиков, которые своей деятельностью в большей или меньшей степени оказали влияние на исследования, проводимые в Венгрии и во всем мире. Достаточно упомянуть имя Ю. Прохорова, который достиг результатов общего характера в усиленном законе больших чисел, в связи с принципом инвариантности и в теории слабой сходимости мер, определенных в абстрактных пространствах. Значение его теории не только в том, что она обобщает отдельные результаты, которые были известны ранее, а и в том, что открывает новые направления для исследований и решает важный для практики вопрос о "близости" случайных процессов с дискретным и непрерывным временем. Следует упомянуть также имена А. Скорохода и И. Гихмана, работы которых в теории дифференциальных уравнений случайных процессов и в общей теории случайных процессов занимают видное место и также широко известны в нашей стране. Советские математики продолжают играть ведущую роль и в исследованиях, связанных с законами больших чисел и предельными теоремами. Достаточно упомянуть имена И.Ибрагимова, В. Петрова и В. Золотарева.

Из современных направлений советские математики занимают руководящее место в областях теории массового обслуживания (Б. Гнеденко, В. Королук, Ю. Беляев) и теории информации (А. Колмогоров, А. Хинчин, Р. Добрушин, М. Пинскер, Р. Хасьминский) Мы могли бы продолжать перечень имен и оценивать советские результаты и их влияние на исследовательское общественное мнение не только нашей родины, а всего мира. В течении последних двадцати лет кроме уже известных ранее московского, ленинградского, киевского научных центров были созданы новые центры в больших университетах, промышленных городах и столицах

советских республик. На первом месте мы должны упомянуть ташкентский, вильнюсский и новосибирский центры. Узбекским центром руководят Т. Сарымсаков и С. Сираждинов. Вместе с своими учениками они обогатили советскую науку в областях теории массового обслуживания, предельных теорем и математической статистики, продолжив исследования, которые были начаты в этой республике ещё В. Романовским. В литовской математической жизни руководящую роль играют П. Кибилюс и В. Статулявичус. Число их учеников уже превосходит сто. Их результаты, относящиеся к применениям теоретико-числовых методов в теории вероятностей и к предельным распределениям зависимых случайных величин, известны во всем мире. Широкую известность получили результаты в области случайных процессов и предельных теорем, полученные в новосибирском исследовательском центре, руководимом А. Боровковым. Исследования советских математиков в математической статистике в первую очередь устанавливают связь между результатами теории вероятностей и их применениями. Выдающимися специалистами в области математической статистики были В. Романовской, Е. Слуцкий и Н. Смирнов. Их большая заслуга в том, что, кроме классических направлений, они уже в тридцатые годы занимались последовательностями зависимых случайных величин и статистическими задачами случайных процессов. Наверно менее известно, что впервые скрытые периоды исследовал Е. Слуцкий. Он же ввёл схему авторегрессии, и начал заниматься связанными с ней статистическими задачами. Более известен метод Слуцкого-Колмогорова, который трактруется, например, в книге Крамера-Лидбеттера. По этому методу при введении вероятностных мер для функциональных пространств понятие сепарабельности заменяется на более наглядное понятие непрерывности.

Классические исследования Колмогорова и Смирнова в области порядковых статистик начались почти исключительно по инициативе советских математиков. Начиная с первых результатов, они были тесно связаны с теорией случайных процессов. Этот факт мы подчеркиваем потому, что они требуют определения предельных распределений функционалов от случайных процессов. Для того, чтобы ответить на вопрос, в чем заключается секрет

успехов исследований, проводимых в СССР по теории вероятностей и математической статистике, мы должны в первую очередь сослаться на слова Яноша фон Неймана: "Явление, что математическая дисциплина слишком удаляется от эмпирических истоков, или что второе или третье поколения не используют непосредственно идей, взятых из реальности, скрывает в себе большую опасность". Исследования в СССР всегда предупреждают об этих опасностях, как только они возникают. Тесная связь с опытом является основой той свежести, которая наблюдается в этих исследованиях. Мы спокойно можем сказать, что исследования по теории вероятностей в СССР не подвергается той опасности, от которой фон Нейман предостерегает математиков словами: "математическая дисциплина, оторванная от эмпирических истоков или испытывающая влияние многих 'абстрактных' идей, подвергается опасности вырождения".

Значение этих слов подчеркивается советом фон Неймана "Для меня кажется единственным решением обновляющее возвращение к истокам, к переосмыслению эмпирических идей, полученных более или менее непосредственным путем". Многие из нас могли лично наблюдать, что в исследованиях советских математиков эти указания осуществляются, что высказывания, принципы, подобные к неймановским, находят свое отражение уже в университетских лекциях.

Достаточно сослаться на деятельность неоднократно посещавшего нашу страну Колмогорова, для которого характерна постоянная связь с физикой и другими областями естественных наук. То же самое относится и к новому поколению советских ученых. Мы имеем в виду исследования связанные с геологией, с промышленными применениями и с управлением.

II.

В нашей стране университетские лекции по теории вероятностей и математической статистике стали проводиться регулярно только после освобождения. В начале эти лекции касались

лишь элементарных задач. Исключением были книга и деятельность Кароя Йордана в экономическом институте.

Теория вероятностей, основанная на совершенной аксиоматике нашла плодотворную почву в развитых венгерских теоретических исследованиях. Венгерская школа теории вероятностей оказала неоценимое влияние на всю венгерскую математику. Благодаря связи теории вероятностей с классическими направлениями новый размах получили теоретические исследования; тесная связь с применениями обогатила наше математическое мышление. Направление созданное Кароем Йорданом, и признание Альфредом Реньи значения теории вероятностей во время его аспирантуры в Ленинграде привело к новому осмыслению призвания математиков. Будучи большим математиком, Альфред Реньи знал, что создание базы для развития теории вероятностей и математической статистики в нашей стране невозможно без серьёзной организационной работы. Его заслугой является и то, что будучи директором Института Прикладной Математики, он организовал отдел теории вероятностей и статистики. В своей деятельности он стремился следовать традициям советской математической школы. Со своей неутомимой энергией он одновременно приступил к интенсивному и гармоничному развитию теории и практики, а также обучению и популяризации науки. Для всех, кто занимается в нашей стране теорией вероятностей и статистикой с начала 50-х годов, останутся незабываемыми семинары Института, на которых мы сначала изучали классические результаты советских математиков, а затем перешли к новейшим результатам. В то время наиболее интересным представлялось изучение связи теории вероятностей с теорией мер. Благодаря работе над переводом книги Колмогорова и Гнеденко, мы быстро вошли в классическую проблематику теории вероятностей, в круг задач связанных с предельными теоремами. Влияние работ советских математиков в этой области на наших математиков до сих пор остается неизмеримым. В качестве примера достаточно упомянуть на результаты, достигнутые в этом направлении Реньи, Такачем, Прекопа, а также работы Ревеса, Модёроди и Комлоша, на которые часто ссылаются в международ-

ной литературе. Особенно значительны венгерские результаты в исследовании рядов функций.

По примеру советских математиков Реньи установил тесную связь с областями применения математики. Сотрудники Института Прикладной Математики, используя методы теории вероятностей и математической статистики, занимались решением практических задач химии, биологии, теории связей, контроля качества. Особо следует отметить применения теории вероятностей в физических исследованиях, где выделяется деятельность Л. Яноши, Л. Пал и А. Бекеша. Среди теоретических результатов особое значение имеют работы Реньи в теории упорядоченных выборок, которые могут рассматриваться как дальнейшее развитие работ Колмогорова и Смирнова. С тех пор исследования в этой области находятся в центре внимания и снискали нашим математикам мировую известность.

Упомянем лишь И. Винце, К. Шаркади, Б. Диреш и их учеников, которые стали видными специалистами в этой области.

Достойное место на мировой арене занимают и исследования точечных процессов, проводимые в нашей стране.

Эти исследования с одной стороны имели отечественную базу, с другой стороны, явились продолжением работ А. Хинчина и Б. Гнеденко.

Тесная связь теории вероятностей с практикой сделала необходимой разработку таких областей, как теория информации, теория массового обслуживания, теория ветвящихся процессов и т.п. Под влиянием результатов советских математиков исследования в этих областях начались и в нашей стране. Буквально со дня на день возникали новые направления, работа в которых с тех пор тесно связана с исследованиями советских математиков.

Не столь сильное влияние имели в нашей стране работы сов-

етских математиков в классических исследованиях, относящихся к случайным процессам, как например спектральная теория стационарных процессов, теория диффузионных процессов, и разработка общего принципа слабой сходимости для абстрактных функциональных пространств. Это влияние стало заметным только в конце 60-х годов.

Отчасти это объясняется тем, что, за исключением аспирантуры Реньи, в течение 10 лет единственным каналом связи с советской математикой были журнальные статьи. В последние 15 лет мы стали участниками благоприятных перемен. 8 аспирантов защитили диссертации по теории вероятностей и математической статистике под руководством таких видных советских ученых, как Б. Гнеденко, А. Колмогоров, Ю. Линник, Я. Синай, А. Скороход и другие, влияние которых непосредственно ощутимо в возникновении новых направлений. Все больше советских математиков посещают Венгрию, встречи с ними превратились в регулярную рабочую связь. Мы можем встречаться с советскими математиками не только на конференциях, они участвуют в работе наших университетов и институтов.

Статьи венгерских ученых часто публикуются в советских журналах. Достаточно упомянуть только журнал "Теория Вероятностей и ее применения", где до сих пор вышли на свет работы А. Реньи, Л. Такача, А. Прекопа, М. Арато и Д. Сас. Аналогичная связь установлена и с другими советскими журналами (УМН, ДАН, Литовский Математический Сборник). И наоборот: в венгерских изданиях публикуются статьи советских математиков, влияние которых весомо. В первую очередь я хочу привлечь внимание на работы Линника, Ширяева и их школ.

В наши дни считается естественным, что венгерские специалисты на русском языке читают советскую литературу по теории вероятностей и математической статистике.

В начале 50-х годов это было далеко не так, но любовь

к специальности и жажда познания новых результатов необходимо привели к наблюдению за русской литературой. Не только журналы, но и книги по теории и практике очень популярны среди венгерских специалистов. Наши студенты и молодые научные сотрудники знакомятся с классическими и современными результатами по книгам И. Гихмана, А. Скорохода, Ю. Линника, Ю. Прохорова, Ю. Разанова, В. Петрова, А. Колмогорова, А. Ширьева и других. Книги известных и молодых советских математиков в течение нескольких дней исчезают из книжных лавок. Книги более старого издания постоянно являются дефицитными.

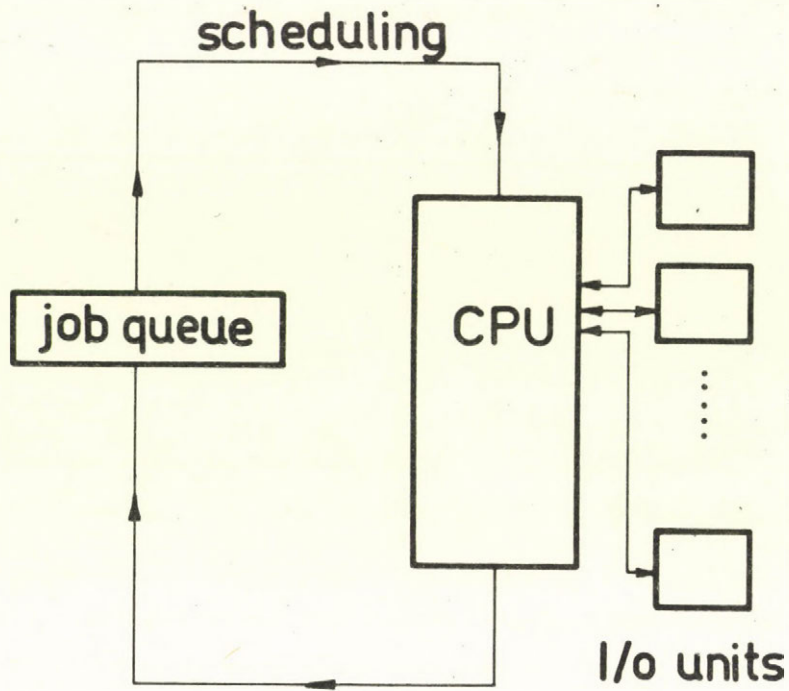
С конца 50-х и с середины 60-х годов советские исследования по теории вероятностей и математической статистике в более широком спектре оказали влияние на венгерскую науку.

Помимо классических областей, все большее внимание уделяется исследованию современных направлений. В работах по теории диффузионных процессов ощущается непосредственное влияние советской школы. В первую очередь я хочу указать на результаты М. Арато, А. Крамли, Й. Пергел и Ш. Чёргё. Результаты советских математиков дали толчок и исследованиям Й. Гергея, Т. Гергея, Д. Саса, Й. Томко и других теории массового обслуживания. В теории информации и ее применениях на научное развитие И. Чисара и Ш. Чибби, кроме отечественных работ, большое влияние оказали результаты советских математиков. Теория сумм со случайным числом слагаемых и редящих точечных процессов может считаться совместной советско-венгерской темой. В этой области результаты Реньи, Такача, Бартфай, Модёроди, Саса и Томко тесно связаны с исследовательской работой Гнеденко, Золотарева, Беляева и их учеников. Тесную связь между советскими и венгерскими исследованиями в теории вероятностей и математической статистике показал проект наших Академий об издании совместного журнала по теории вероятностей и математической статистике. Осуществлению этого проекта воспрепятствовали преждевременные кончины А. Реньи и Ю. Линника.

III.

В дальнейшем — не претендуя на полноту изложения — я хочу на одном конкретном примере пояснить связь советских и венгерских исследований и значение большого объема советских исследований.

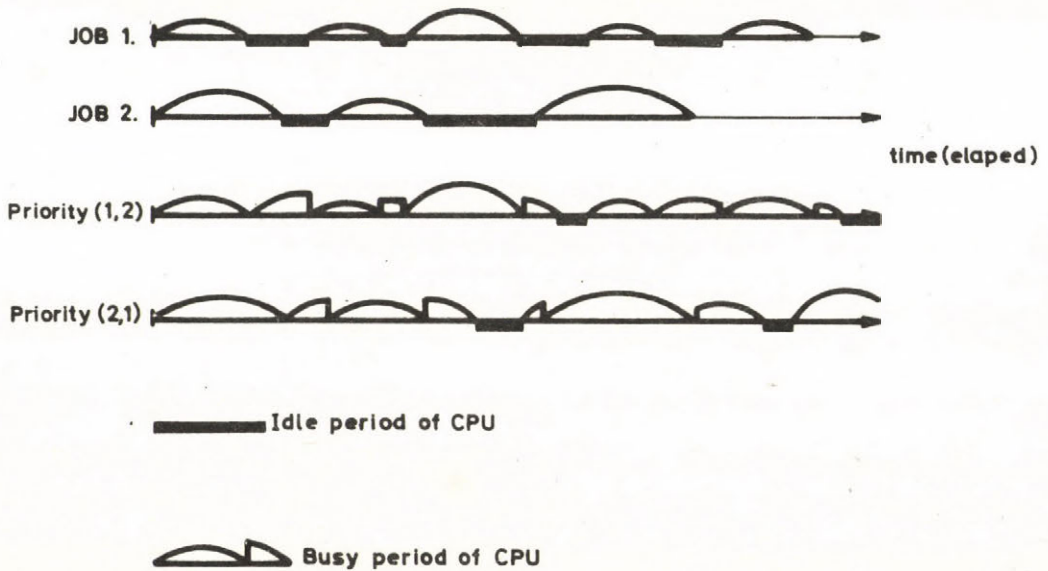
Большая часть проблем, связанных со временем пребывания, сводится к следующей задаче, которая была описана в терминах случайных процессов ещё в 50-х годах. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ принимает два значения $\xi(t) = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$, где времена пребывания в состояниях a и b являются последовательностями независимых случайных величин. Обозначим через $\xi_i \geq 0$ и $\eta_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots$) продолжительность пребывания в состоянии a и b и через $\beta(t)$ (соотв. $t - \beta(t)$) пребывание до фиксированного момента времени t . Эти случайные величины являются суммами независимых случайных величин, но число слагаемых тоже случайно. Распределение и асимптотическое поведение случайной величины были изучены Реньи и Такачом. В простейшем случае они свели решение к результату, полученному ранее Добрушиным. Наглядная интерпретация этой задачи (см. рис. I.2.) показывает ее связь с практикой, с проблемами теории массового обслуживания.



The scheme of the system

Puc. 1.

The priority (absolute)



Puc. 2.

В связи с решением этой задачи (см. рис.3.) исследования стали проводиться в разных направлениях, и именно в этом состоит значение точной постановки задачи при решении практической проблемы.

CPU SCHEDULING SIMULATION BASED ON AUTOREGRESSIVE PROCESSES

$$g = K \frac{\mu}{\lambda}$$

K - no. of jobs

$1/\lambda$ - expected length of CPU periods :

$1/\mu$ - expected length of I/O periods

Realization of I/O periods: exponential with parameter μ
Realization of CPU periods: exponential with parameter $\lambda(t)$, where

$$\lambda(t) = \lambda_n + \lambda, n \cdot T \leq t < (n+1) \cdot T$$

and λ_n satisfies the equation

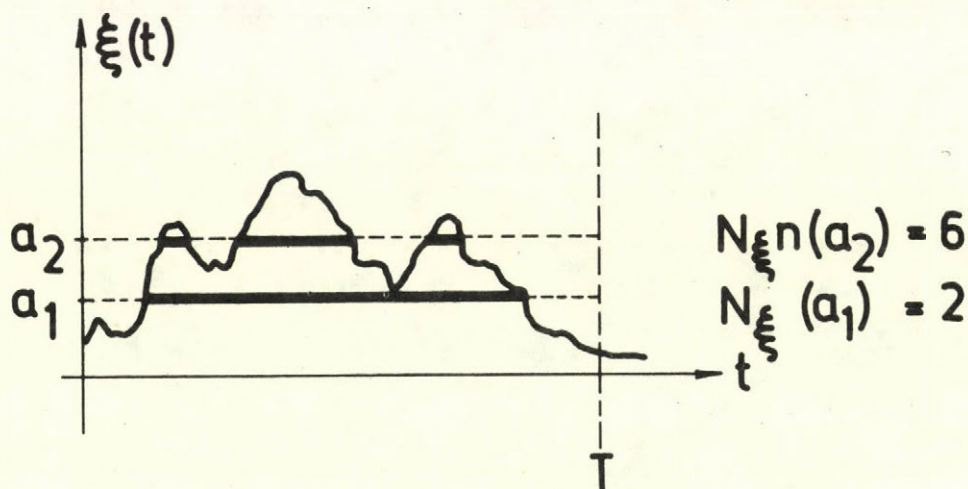
$$\lambda_n = \lambda_{n-1} a_1 + \lambda_{n-2} a_2 + \epsilon_n$$

where the parameters in simulated jobs are counted

Рис. 3.

Эти направления следующие:

1. Исследования предельных теорем для сумм случайного числа слагаемых, об этом уже говорилось в настоящем докладе.
2. Исследования пребывания случайных процессов над некоторым уровнем, задачи пересечений. Эти проблемы сводятся к изучению подобных проблем для стационарных и диффузионных процессов путем соответствующего выбора временного масштаба.



$$M N_{\xi}(a) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{B''(0)}{B(0)} \right)^{1/2} e^{-\frac{a^2}{2B(0)} \cdot T}$$

if $\int_0^{\infty} \lambda^2 [\ln(1+\lambda)]^{1+\alpha} dF(\lambda) < \infty$, then $\alpha > 0$ -га

Рис. 4.

В этой области В. Волконский и Ю. Розанов получили тот классический результат, согласно которому над достаточно высоким уровнем число пересечений имеет пуассоновский закон распределения. Эти результаты были существенно обобщены Ю. Беляевым. Прохоров и его ученики доказали эвристические результаты, относящиеся к точному распределению и математическому ожиданию числа пересечений. Е. Сулинская методом Прохорова дала точное доказательство формулы для математического ожидания числа пересечений.

$$P\{\beta(t) < x\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) [G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)]$$

$$\xi_{1n} = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad H_n = P\{\xi_{1n} < x\}$$

$$\xi_{2n} = \eta_1 + \dots + \eta_n \quad G_n = P\{\xi_{2n} < x\}$$

$$v(T) \quad n, \text{ if } \xi_1 + \eta_1 + \dots + \xi_n < T \leq \xi_1 + \eta_1 + \dots + \xi_n + \eta_n$$

Рис. 5.

3. Естественно возникает вопрос об управлении и статистическом исследовании таких процессов. Если мы рассматриваем - как приближение - диффузионный процесс, то тогда хорошо применимы результаты И. Гихмана, Ю. Прохорова, А. Скорохода и А. Ширяева. Решение проблемы нелинейной фильтрации является статической задачей и тесно связано с теорией стохастических дифференциальных уравнений. Оно является обобщением линейной теории прогноза, которая была разработана Колмогоровым. В связи с одной специальной проблемой, поставленной Колмогоровым, автор этих строк начал свои исследования в области статистики случайных процессов. Результаты, полученные сотрудниками Института вычислительной техники и автоматизации

(Дьюрац, Бенцур, Крамли, Пергел, Тушнади), и тот факт, что массовая обработка данных на ЭВМ требует этих результатов, показывает развитие отечественных исследований.

4. Решения, указанные в пункте 3. дают хорошие приближения для решений проблем, связанных с внутренней организацией работы современной ЭВМ. Задача оптимизации эксплуатации ресурсов ЭВМ (центральное устройство, каналы) сводится к проблеме нелинейного управления случайных процессов, но решения — в большинстве случаев — получаются только методом Монте-Карло. Конкретные результаты в этом направлении находятся в новейших работах (Арато, Кнут, Тёке и Томко) (см. рис.6-9).

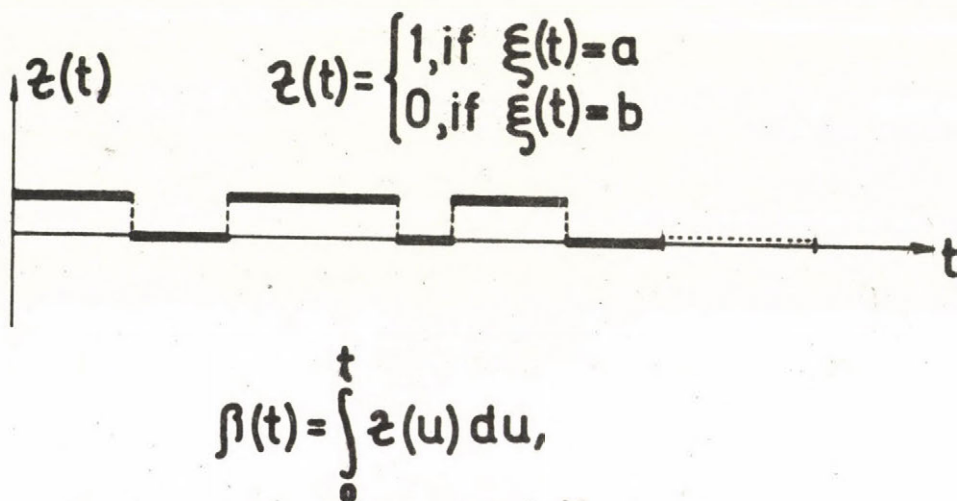
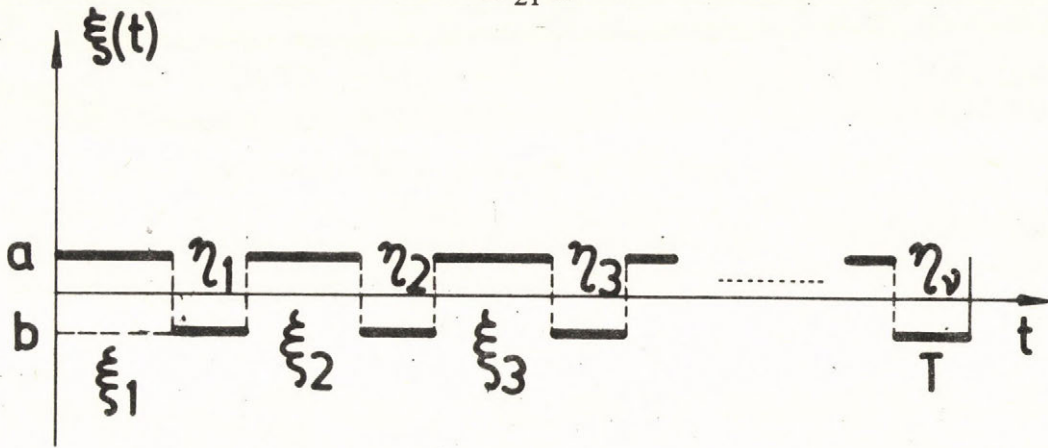


Рис. 6.



$$P(\xi_i < X) = G(X)$$

$$P(\eta_i < X) = H(X)$$

$$\xi(t) = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

Рис. 7.

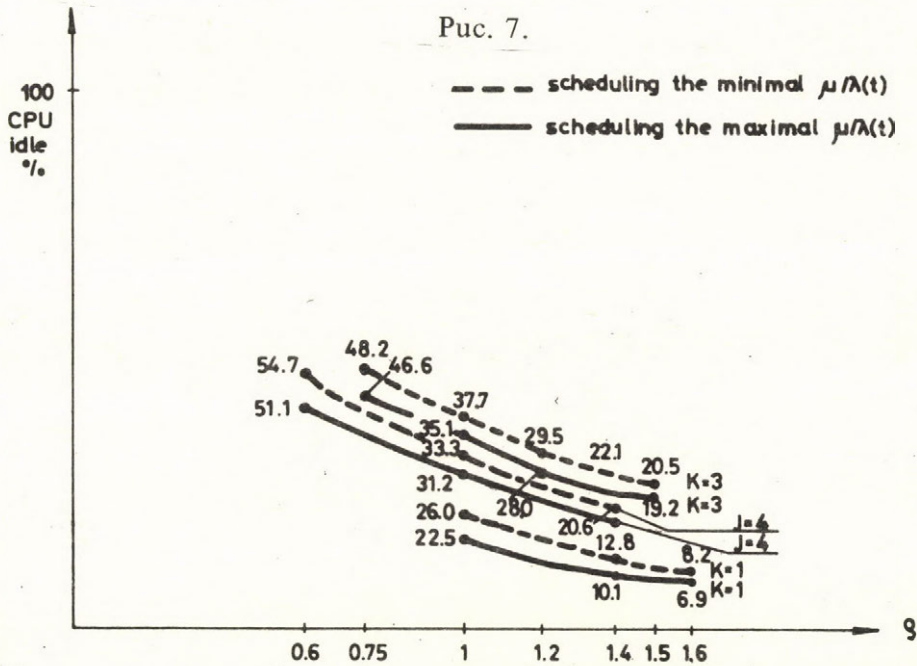


Рис. 8.

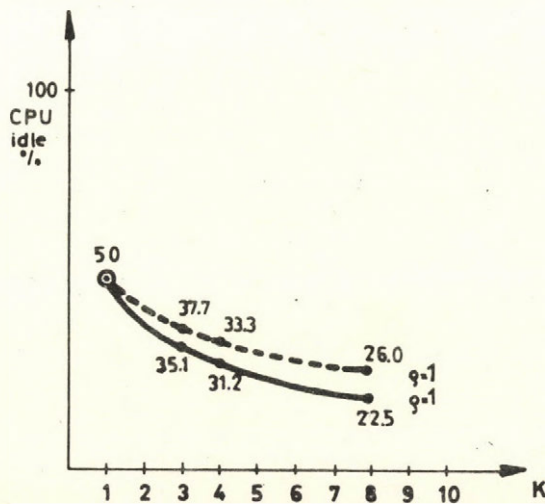


Рис. 9.

В связи с этой проблематикой я хотел бы только указать пример на совместное воздействие разных направлений исследования и влияние советских результатов в Венгрии. Конечно этот, перечень не является полным, но я надеюсь, что он дает возможность понять смысл, полезность и значение венгерско-советских связей в области теор.вер.

В связи с венгерско-советским сотрудничеством по теории вероятностей мы должны были бы перечислить почти всех математиков, работающих в этой области, так как все они в той или иной форме имеют связь с советскими исследователями или с их результатами. Однако имеются вторичные влияния, собственные темы, и связи с исследователями других стран.

Мы имеем в виду такие работы, как основные исследования П. Меддеша в области разложения распределений, результаты П. Бартфай в теории больших уклонений, результаты И. Беркеша, Й. Комлоша, Г. Тушнади, П. Майора, П. Ревеса и других в проблематике теоремы повторного логарифма. А. Прекопа представляет существенно новое направление в исследовании операций. Прошу прощение за то, что я не могу подробнее осветить круг этих проблем, тем более, что даже перечень их и далеко не полон.

Отдельного доклада требует изложение влияний венгерских исследований. Хорошо известно, что аналитические результаты Ф. Рисса, М. Рисса и Г. Сегё были основными для построения колмогоровской теории линейного прогноза.

Теоретикочисловые методы П. Турана П. Эрдёша и А. Реньи нашли большой отклик в СССР. П Эрдеш является и одним из основоположников теории инвариантности. Аналогично положение и в теории случайных графов, и в теории розыска, основы которых были заложены А.Реньи и П. Эрдешем. Этот перечень мог бы продолжаться ещё долго. Однако в своем докладе я хотел лишь проиллюстрировать влияния исследований советских ученых.

Мы рады отметить, что наши молодые исследователи охотно ехали, и едут в СССР учиться и занкомиться с новыми направлениями, так как они знают, что встретят там искреннюю поддержку и дружескую помощь.

Развитие и — спокойно можем сказать — расцвет теорий вероятностей и математической статистики в Венгрии является наглядным примером того, как правильное направление, выбранное с дружеской помощью, влияет на всю математику и на развитие ее применений!

Summary

In the paper the author gives a detailed survey about the influence of the soviet probability theoretical researches on the hungarian works after 1945.