MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

MEGJEGYZÉS A LOGARITMIKUSAN KONKÁV FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ

Rapcsák Tamás

Ebben a dolgozatban bebizonyítjuk a folytonos, logaritmikusan konkáv függvények és a folytonos, másodrendű Pólya függvények osztályának azonosságát. Ez a tétel megtalálható I. J. Schoenberg [1] cikkében. Itt a tétel egy más bizonyítását adjuk.

Először definiáljuk a logaritmikusan konkáv függvény és a másodrendű Pólya függvény fogalmát, utána kimondjuk és bebizonyítjuk a tételt.

Definíció. Egy minden valós x-re értelmezett, nemnegatív $g(x)$ függvényt logaritmikusan konkávnak nevezünk, ha tetszőleges x_1, x_2 számpár és $0 < \lambda < 1$ esetén fennáll a

$$(1) \qquad g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant [g(x_1)]^{\lambda} \cdot [g(x_2)]^{1-\lambda}$$

egyenlőtlenség.

Definíció. Egy minden valós x-re értelmezett, mérhető, nemnegatív $g(x)$ függvényt másodrendű Pólya függvénynek nevezünk, ha az alábbi reláció

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} g(x_1 - y_1) & g(x_1 - y_2) \\ g(x_2 - y_1) & g(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

teljesül akármilyen $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$ értékekre és $g(x) \neq 0$ legalább két különböző x értékre.

Tétel. *A folytonos, másodrendű Pólya függvények osztálya megegyezik a folytonos, logaritmikusan konkáv függvények osztályával.*

Bizonyítás. A bizonyítás első részében megmutatjuk, hogy egy folytonos, másodrendű Pólya függvény logaritmikusan konkáv.
Tekintsük ugyanis csak azokat az $x_2 > x_1$ és $y_2 > y_1$ értékeket, amelyre $x_2 - y_2 = x_1 - y_1$. E megkötés mellett az $x_1 - y_2, x_2 - y_1$ pár bármely x értéket felvehet. Vezessük be a $z_1 = x_2 - y_1$, $z_2 = x_1 - y_2$ jelöléseket. Igy az alábbi egyenlőségeket kell teljesíteni.

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_2 - y_2 &= x_1 - y_1, \\ z_1 &= x_2 - y_1, \\ z_2 &= x_1 - y_2. \end{aligned}$$

Beérkezett: 1974. október 21.

Mivel $z_1 > z_2$, a (3) egyenlőségek teljesülése ekvivalens a (4) egyenlőséggel

(4) $z_1 - z_2 = 2(y_2 - y_1)$.

Igy a z_1, z_2 pár bármely x értéket felvehet. Ekkor az alábbi relációk igazak.

(5) $$\frac{x_2 - y_1 + x_1 - y_2}{2} = x_1 - y_1,$$

(6) $$\frac{x_2 - y_1 + x_1 - y_2}{2} = x_2 - y_2.$$

A determináns feltételt kifejtve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk.

(7) $$g(x_1 - y_1)g(x_2 - y_2) \geqslant g(x_2 - y_1)g(x_1 - y_2).$$

A korábban bevezetett jelölést alkalmazva, (5) és (6) miatt

$$x_1 - y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{és} \quad x_2 - y_2 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Igy a determináns feltétel az alábbi alakba írható

(8) $$g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{g(z_1)g(z_2)}\ \sqrt{g(z_1)g(z_2)}.$$

Ebből a függvény nemnegativitása miatt kapjuk, hogy

(9) $$g\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{g(z_1)}\ \sqrt{g(z_2)}.$$

ami éppen az állítás.

A bizonyítás második részében megmutatjuk, hogy egy logaritmikusan konkáv függvény másodrendű Pólya függvény. Mivel $x_2 - y_1 > x_2 - y_2 > x_1 - y_2$, ezért található $0 < \lambda < 1$ oly módon, hogy az alábbi egyenlőség teljesül

(10) $$\lambda(x_2 - y_1) + (1 - \lambda)(x_1 - y_2) = x_2 - y_2.$$

Ekkor a (11) reláció is igaz.

(11) $$\lambda(x_1 - y_2) + (1 - \lambda)(x_2 - y_1) = x_1 - y_1.$$

(Ha a (10) egyenletből kifejezzük a $\lambda(x_1 - y_2)$-t, a kapott kifejezést a (11) egyenletbe behelyettesítjük, akkor azonosságot kapunk.) Mivel a $g(x)$ függvény logaritmikusan konkáv, így az alábbi relációk igazak

(12) $$g(x_2 - y_2) = g[\lambda(x_2 - y_1) + (1 - \lambda)(x_1 - y_2)] \geqslant g(x_2 - y_1)^{\lambda} \cdot g(x_1 - y_2)^{1-\lambda} \geqslant 0,$$

(13) $$g(x_1 - y_1) = g[\lambda(x_1 - y_2) + (1 - \lambda)(x_2 - y_1)] \geqslant g(x_1 - y_2)^{\lambda} \cdot g(x_2 - y_1)^{1-\lambda} \geqslant 0.$$

A (12) és (13) egyenlőtlenségeket összeszorozva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk

(14) $\quad g(x_2 - y_2)g(x_1 - y_1) \geqslant g(x_1 - y_2)g(x_2 - y_1),$

s ez éppen a kívánt determináns feltétel.

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás második részében nem használtuk ki azt, hogy a függvények folytonosak.

Irodalom

[1] I. J. Schoenberg, "On Polya Frequency Functions" J. D' Analyse Mathematique 1 (1951) 331–374.

Summary

I. J. Schoenberg proved (1) that the class of continuous, logarithmically concave functions is identical to the class of continuous, second order Polya functions. In this paper we present a simpler proof for the above theorem.

Резюме

И. Й. Шхоенберг показал, что класс непрерывных логарифмически выпуклах функций совпадает с классом функций Поля второго порядка. В этой статье мы дадим более простое докозательство этово утверждения.