

ÁLTALÁNOS RELÁCIÓKON ÉRTELMEZETT KAPCSOLÓDÁSI MŰVELETEKRŐL

Farkas Zoltán

0. Bevezetés

Jelen dolgozat szerzője az összetett rendszerek modellezéséhez — napjaink egyik fontos kutatási feladatához — kapcsolódó matematikai vizsgálatait egyes olyan eredményeit foglalja össze, amelyek rendszerek részrendszerekre való felbontásának és különböző rendszerek egy rendszerré való összekapcsolásának modellezésére vonatkoznak.

A szerző ezirányú vizsgálatait kiindulási pontjául bizonyos összetett vegyipari rendszerek modellezésének — dr. Almásy Gedeon, Dr. Pallai Iván és Veress Gábor által felvetett és vizsgált — gyakorlati problémái szolgálták, amelyek egy kezdeti szakaszban lévő közös tárgyalása és elméleti módszerekkel való megoldási kísérlete [1]-ben található.

A további vizsgálatok során kapott eredmények jelenlegi formájukban való megfogalmazását — több másirányú próbálkozás után — a reláció fogalmának általánosítása, valamint az általánosított relációkon bizonyos műveletek értelmezése és megfelelő módszerekkel való vizsgálata tette lehetővé. Mindezen önálló fogalomalkotásokkal illetve általánosítással a dolgozat szerzője az irodalomból ismert reláció-fogalmaknak azt a hiányosságát igyekszik kiküszöbölni, hogy általuk az említett reláció-műveletek definiálása technikai nehézségekbe ütközik. Érvényes ez pl. mind a Descartes-féle szorzat, mind a rendezett n -es fogalmát felhasználó reláció-definíciókra (ld. pl. Mesarovic [7] és Maurer, Virág [6], illetve Salovaara [9] munkáit). Ezen kívül még azzal a tulajdonsággal is rendelkezik az itt bevezetendő reláció-fogalom, hogy definíciója az előbb említettnél általánosabb fogalmon, a leképezés fogalmán, alapszik. Ezáltal lehetővé válik tetszőleges számosságú objektumhalmaz elemei közötti relációk konstruktív műveletek definiálására alkalmas értelmezése, és általa a felvetett problémakör hatékony vizsgálata.

1. Alapfogalmak

A tárgyalásmód egységességének kedvéért megemlítjük, hogy a *szuperjektív leképezés*, *leképezések megszorításának* fogalmát a [3] irodalomban található értelemben használjuk.

Paraméterező leképezésről beszélünk akkor, ha definíció szerint előírjuk, hogy egy szuperjektív leképezés tárgyhalmazbeli különböző elemekhez hozzárendelt képhalmazbeli elemeket megkülönböztetjük. Valamely $f: X \rightarrow Y$ leképezés tehát definíció szerint akkor paraméterező leképezés, ha $\forall x_1, x_2 \in X [x_1 \neq x_2 \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} f(x_1) \neq f(x_2)]$. Egymással *kompatibilis leképezéseknek* nevezük mindazon leképezéseket, amelyek közös tárgyelemhez közös képelemet rendelnek. Legyen továbbá *kompatibilis leképezések kompatibilis*, illetve *diszjunkt kompatibilis kiterjesztése* a legszűkebb közös kiterjesztésük, illetve az egyes leképezéseknek a többi leképezés tárgyhalmazában nem szereplő tárgyelemei halmazára való megszorításainak kompatibilis kiterjesztése. Definíciója következtében mindkét kiterjesztési művelet asszociatív, tehát kettőnél több leképezésre is értelmezhető.

2. Az általános reláció fogalma

2.1. **Definíció.** Legyen adott a $p_\gamma : S \rightarrow A_\gamma$ paraméterező leképezéseknek a G generátorhalmaz által definiált

$$P_G \stackrel{\text{def}}{=} \{ p_\gamma : S \rightarrow A_\gamma \mid \gamma \in G \}$$

paraméterező leképezérendszer, és a $p_\gamma \in P_G$ leképezések által S -paraméterezett

$$A_S(p_\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{ p_\gamma(s) \mid s \in S \text{ és } s_1, s_2 \in S [s_1 \neq s_2 \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} p_\gamma(s_1) \neq p_\gamma(s_2)] \} \neq \emptyset$$

halmazoknak a G generátorhalmaz által generált

$$\mathbf{A}_S(P_G) \stackrel{\text{def}}{=} \{ A_S(p_\gamma) \mid p_\gamma \in P_G \}$$

halmazrendszere. Az $\mathbf{A}_S(P_G)$ halmazrendszert S tartójú, P_G által generált R általános relációnak nevezzük. $G = \emptyset$ esetén üres, véges G halmaz esetén véges, $S = \{i_1, \dots, i_n\}$ esetén $R[n]n$ tagú vagy n -áris relációról beszélünk, ha $i_1 < \dots < i_n$. Az n tagú relációkat $R[n] = \{(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})\}$ formában is felírhatjuk, ahol $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ rendezett n -es.

2.2. **Definíció.** Legyen R egy S -tartójú általános reláció, és legyen az $A_S(p)$ S -paraméterezett halmaz az R relációt definiáló halmazrendszer egy tagja, továbbá tetszőleges adott $s \in S$ esetén $a_s \stackrel{\text{def}}{=} A_S(p)$ az $A_S(p)$ paraméterezett halmaz s paraméterű eleme. Az a_s elemeket az R általános reláció s paraméterű tagjainak, ezek

$$\text{dom}_s(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{ a_s \stackrel{\text{def}}{=} A_S(p) \mid A_S(p) \in \mathbf{A}_S(p) [A_S(p) \in R] \}$$

halmazát az R általános reláció s paraméterhez tartozó értelmezési tartományának nevezzük.

2.3. **Definíció.** Legyen adott egy S tartójú R általános reláció, és egy $\tilde{S} \subseteq S$ halmaz. Ha R az $A_S(p_\gamma)$ S -paraméterezett halmazok $\mathbf{A}_S(P_G)[\gamma \in G]$ rendszere, akkor a $p_\gamma : S \rightarrow A_\gamma$ leképezések $p_\gamma \mid \tilde{S} = \tilde{p}_\gamma$ megszorításai által definiált $\mathbf{A}_{\tilde{S}}(\tilde{P}_G)$ paraméteres halmazrendszerként értelmezett $\tilde{R}$ általános relációt az R általános reláció $\tilde{S} \subseteq S$ tartóhalmazra való megszorításának nevezzük, és így jelöljük: $\tilde{R} = R/\tilde{S}$. Megfordítva, az R relációt az $\tilde{R}$ reláció S tartóhalmazra való egy kiterjesztésének nevezzük.

3. Általános relációk szuperpozíciója és kompozíciója

3.1. **Definíció.** Legyenek adottak valamely olyan $S^{(i)}$ tartójú $R^{(i)}$ általános relációk, amelyeket a

$$P_{G^{(i)}}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \{ p_{\gamma^{(i)}}^{(i)} : S^{(i)} \rightarrow A_{\gamma^{(i)}}^{(i)} \mid \gamma^{(i)} \in G^{(i)} \text{ és } \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)} \in G^{(i)} [\gamma_1^{(i)} \neq \gamma_2^{(i)} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} p_{\gamma_1^{(i)}}^{(i)} \neq p_{\gamma_2^{(i)}}^{(i)}] \}$$

leképezéssrendszerek által $S^{(i)}$ -paraméterezett $A_{G^{(i)}}^{(i)}$ halmazrendszerként definiálunk, adott $G^{(i)}$ és $i = 1, 2$ esetén.

Azt a $P_{G^{(1)}, G^{(2)}}^{(12)}$ illetve $P_{G^{(1)}, G^{(2)}}^{(12)} \Delta$ leképezéssrendszert, amelyet az összes lehetséges módon megválasztott

$$P_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}^{(1)}, P_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}^{(2)} [P_{\gamma^{(1)}}^{(1)} \in P_{G^{(1)}}^{(1)}, P_{\gamma^{(2)}}^{(2)} \in P_{G^{(2)}}^{(2)}]$$

kompatibilis leképezéspárok kompatibilis, illetve diszjunkt kompatibilis kiterjesztése definiál, az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ általános relációk *szuperpozíciójának*, illetve *kompozíciójának* nevezzük, és $R^{(1)} * R^{(2)}$ -vel, illetve $R^{(1)} \circ R^{(2)}$ -vel jelöljük. A szuperpozíció és kompozíció műveletét *kapcsolódási műveletnek* nevezzük. Ha $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R^{(1)}$ vagy $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R^{(2)}$, illetve $R^{(1)} * R^{(2)} = R^{(1)}$ vagy $R^{(1)} * R^{(2)} = R^{(2)}$, akkor *identikus kompozícióról*, illetve *szuperpozícióról* beszélünk.

Ha $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ diszjunkt tartójú általános relációk, akkor *diszjunkt szuperpozícióról*, illetve *diszjunkt kompozícióról* beszélünk, és $R^{(1)} \hat{*} R^{(2)}$ -vel, illetve $R^{(1)} \hat{\circ} R^{(2)}$ -vel jelöljük.

Megjegyzések. 1. Definícióinkból következik, hogy $R^{(1)} \hat{*} R^{(2)} = R^{(1)} \hat{\circ} R^{(2)}$, és ezért vezessük be az $R^{(1)} \hat{*} R^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} R^{(1)} \times R^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} R^{(1)} \hat{\circ} R^{(2)}$ jelölést, és nevezzük e műveletet az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ *direkt szorzatának*.

2. Leképezéssrendszerek kiterjesztésének asszociativitásából következően általános relációk kompozíciója és szuperpozíciója kiterjeszthető kettőnél több reláció esetére is:

$$R^{(1)} \circ \dots \circ R^{(i)} \circ \dots \circ R^{(n)} = R_{\circ},$$

$$R^{(1)} * \dots * R^{(i)} * \dots * R^{(n)} = R_{*}$$

3. Legyen adott az $I = \{1, \dots, m\}$ és $J = \{l+1, \dots, l+n\}$ halmaz, és az I tartójú m tagú $R^{(1)}[m]$, valamint a J tartójú n tagú $R^{(2)}[n]$ általános reláció, és $l < m$. Ekkor

$$\begin{aligned} R^{(1)}[m] \circ R^{(2)}[n] = \{ (x_1, \dots, x_l, y_{m+1}, \dots, y_{l+n}) \mid \forall k = l+1, \dots, m \\ \exists z_k \in \text{dom}_k(R^{(1)}[m]) \cap \text{dom}_k(R^{(2)}[n]) \\ [(x_1, \dots, x_l, z_{l+1}, \dots, z_m) \in R^{(1)}[m] \text{ és} \\ (z_{l+1}, \dots, z_m, y_{m+1}, \dots, y_{l+n}) \in R^{(2)}[n]] \}, \end{aligned}$$

amely egy $n - m + 2l$ tagú általános reláció. Példánk alapján könnyen belátható, hogy relációk kompozíciójának művelete többváltozós függvények behelyettesítési szabályának általános relációkra való kiterjesztése. Ugyancsak definícióinkból következően

$$R^{(1)}[m] * R^{(2)}[n] = \{(x_1, \dots, x_l, z_{l+1}, \dots, z_m, y_{m+1}, \dots, y_{l+n}) \mid \\ (x_1, \dots, x_l, z_{l+1}, \dots, z_m) \in R^{(1)}[m] \text{ és } \\ (z_{l+1}, \dots, z_m, y_{m+1}, \dots, y_{l+n}) \in R^{(2)}[n] \\ [(x_1, \dots, x_l, y_{m+1}, \dots, y_{l+n}) \in R^{(1)}[m] \circ R^{(2)}[n]]\},$$

amely egy $l + n$ tagú általános reláció. Szintén könnyen belátható, hogy relációk szuperpozíciójának művelete többváltozós függvényekből képezett többváltozós függvény képzési szabályának általános relációkra való kiterjesztése.

4. Általános relációk deszuperponálhatósága és dekomponálhatósága

4.1. **Definíció.** Az olyan R általános relációt, amelyhez létezik valamely olyan R' és R'' , illetve $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ általános reláció, amelyekre

$$R = R' \circ R'',$$

illetve

$$R = R^{(1)} * R^{(2)},$$

az R' és R'' relációkra *dekomponálható*, illetve az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkra *deszuperponálható reláció*nak nevezzük.

Az iménti feltételeknek eleget tevő R' és R'' illetve $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációk megadása esetén az R reláció *dekompozíciójáról*, illetve *deszuperpozíciójáról* beszélünk, amelyeket az R reláció *komponenseinek*, illetve *szuperponenseinek* nevezzük. Ha $R' \circ R''$ az R' és R'' identikus kompozíciója, illetve $R^{(1)} * R^{(2)}$ az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ identikus szuperpozíciója, akkor *triviális dekompozícióról*, illetve *deszuperpozícióról* beszélünk.

Megjegyzés. A kompozíció és szuperpozíció műveletének asszociativitása miatt beszélhetünk adott általános reláció kettőnél több általános relációra való dekomponálásáról, illetve deszuperponálásáról.

5. Általános relációk dekompozíciója és deszuperpozíciójára vonatkozó tételek

5.1. **Tétel.** Legyen adott az $S^{(1)}$ tartójú $R^{(1)}$ és az $S^{(2)}$ tartójú $R^{(2)}$ általános reláció, valamint legyen $\tilde{R}^{(1)}$ illetve $\tilde{R}^{(2)}$ az $R^{(1)}$ relációnak az $S^{(1)} - S^{(2)}$ tartóhalmazra, illetve az $R^{(2)}$ relációnak az $S^{(2)} - S^{(1)}$ tartóhalmazra való megszorítása. Ekkor:

- a) $R^{(1)} \circ R^{(2)}$ az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartójú $R^{(1)} * R^{(2)}$ általános relációnak az $S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)}$ tartóhalmazra való megszorítása;

b) az $R^{(1)} * R^{(2)} = (R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}) \cap (\tilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$ összefüggés teljesül tetszőleges $R^{(1)}, R^{(2)}$ általános relációk esetén.

Bizonyítás. a) Az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkból kiválasztható kompatibilis elempárok – mint rendre $S^{(1)}$ -en és $S^{(2)}$ -n értelmezett kompatibilis leképezések – diszjunkt kompatibilis kiterjesztése a kompatibilis kiterjesztésüknek az $S^{(1)} \cup S^{(2)} = S^{(1)} \cap S^{(2)}$ halmazra való megszorítása, minden lehetséges kompatibilis elempár esetén.

b) $R^{(1)} * R^{(2)}$ tetszőleges eleme $R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}$ -nek és $\tilde{R}^{(1)} \times R^{(2)}$ -nek is eleme, mivel az $R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}$ általános reláció az $R^{(1)}$ -nek és $\tilde{R}^{(2)}$ -nek, illetve az $\tilde{R}^{(1)}$ -nek és $R^{(2)}$ -nek az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartóhalmazra való közös kiterjesztése. Emiatt $R^{(1)} * R^{(2)}$ tetszőleges eleme az

$$R^{(12)} \stackrel{\text{def}}{=} (R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}) \cap (\tilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$$

relációnak is eleme.

Másrészt viszont az $R^{(12)}$ általános reláció az $S^{(1)} \cup S^{(2)}$ tartóhalmazú $R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}$ és $\tilde{R}^{(1)} \times R^{(2)}$ általános relációnak olyan közös része, amely egyúttal az $\tilde{R}^{(1)}$ és $\tilde{R}^{(2)}$ általános relációnak is kiterjesztése. Definíciónk következtében az $R^{(12)}$ reláció tetszőleges elemét olyan paraméterező leképezés definiálja, amely az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációk valamely elemeit definiáló kompatibilis leképezéspár kompatibilis kiterjesztése, tehát az $R^{(12)}$ tetszőleges eleme az $R^{(1)} * R^{(2)}$ -nek is eleme. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Következmény. A b) pontbeli állításból következik, hogy egy S tartójú R általános reláció akkor és csak akkor deszuperponálható nem triviális módon, ha létezik olyan $S^{(1)}$ tartójú $R^{(1)}$ és $S^{(2)}$ tartójú $R^{(2)}$ általános reláció, hogy $S^{(1)} \cup S^{(2)} = S$, $R^{(1)} \neq R$ vagy $R^{(2)} \neq R$, és ha $\tilde{R}^{(1)}$, illetve $\tilde{R}^{(2)}$ az $R^{(1)}$ relációnak az $S^{(1)} - S^{(2)}$ illetve $\tilde{R}^{(2)}$ az $R^{(2)}$ relációnak az $S^{(2)} - S^{(1)}$ tartóhalmazra való megszorítása, akkor

$$R = (R^{(1)} \times \tilde{R}^{(2)}) \cap (\tilde{R}^{(1)} \times R^{(2)})$$

Példa. Csak triviálisan deszuperponálható reláció

$$R = \{(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}), (a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)})\}, \text{ ahol}$$

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = a, \text{ de } a_2^{(1)} \neq a_2^{(2)} \text{ és } a_3^{(1)} \neq a_3^{(2)}$$

5.2. Tétel. Legyen adott egy S és valamely olyan $S^{(1)} \neq \emptyset$, $S^{(2)} \neq \emptyset$ halmaz, amelyekre $S^{(1)} \cup S^{(2)} = S^{(1)} \cap S^{(2)} = S$. Tetszőleges S tartójú R általános reláció dekomponálható valamely $S^{(1)}$ tartójú $R^{(1)}$ és $S^{(2)}$ tartójú $R^{(2)}$ általános relációra.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához az R relációt definiáló $p_\gamma : S \rightarrow A[\gamma \in G]$ S -paraméterező (szuperjektív) leképezésekhez elegendő megadni olyan $p_\gamma^{(i)} : S^{(i)} \rightarrow A^{(i)} [i = 1, 2]$ $S^{(i)}$ -paraméterező leképezéseket, hogy p_γ a $p_\gamma^{(1)}$ és $p_\gamma^{(2)} [\gamma \in G]$ leképezések nem triviális diszjunkt kompatibilis kiterjesztése legyen. Ekkor ugyanis a

$$P_G^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \{ p_{\gamma^{(i)}}^{(i)} : S^{(i)} \rightarrow A_{\gamma^{(i)}}^{(i)} \mid \gamma^{(i)} \in G^{(i)} \text{ és } \gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)} \in G^{(i)} \\ [\gamma_1^{(i)} \neq \gamma_2^{(i)} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} p_{\gamma_1^{(i)}}^{(i)} \neq p_{\gamma_2^{(i)}}^{(i)}] \} \quad [i = 1, 2]$$

leképezérendszer által $S^{(1)}, S^{(2)}$ -paraméterezett $A_{S^{(1)}G^{(1)}}^{(1)}$ és $A_{S^{(2)}G^{(2)}}^{(2)}$ halmazrendszer által definiált $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ relációkra a kompozíció definíciója szerint $R^{(1)} \circ R^{(2)} = R$.

A keresett $p_\gamma^{(1)} : S^{(1)} \rightarrow A_\gamma^{(1)}$, $p_\gamma^{(2)} : S^{(2)} \rightarrow A_\gamma^{(2)}$ leképezésekhez legyen:

$$S^{(1)} = S' \cup H, \quad S^{(2)} = (S - S') \cup H, \\ A_\gamma^{(1)} = A'_\gamma \cup C_\gamma, \quad A_\gamma^{(2)} = (A_\gamma - A'_\gamma) \cup C_\gamma,$$

ahol

$$S', A'_\gamma, H[\phi = S' \subset S, \phi \neq A'_\gamma \subset A_\gamma, H \neq \phi, C_\gamma \neq \phi, S \cap H = \phi]$$

minden $\gamma \in G$ esetén adott halmazok.

Az ily módon megválasztott halmazokra teljesülnek az

$$S^{(1)} \cup S^{(2)} - S^{(1)} \cap S^{(2)} = S, \\ A_\gamma^{(1)} \cup A_\gamma^{(2)} - A_\gamma^{(1)} \cap A_\gamma^{(2)} = A_\gamma, [\gamma \in G]$$

azonosságok. Tekintsük a p_γ leképezéseknek az S' , illetve $S - S'$ halmazra való $p_\gamma \mid S'$, illetve $p_\gamma \mid (S - S')$ megszorítását, majd az így kapott leképezéseknek az $S' \cup H$, illetve $(S - S') \cup H$ halmazokra való olyan $p_\gamma^{(1)}$ illetve $p_\gamma^{(2)}$ egymással kompatibilis kiterjesztését, amelyekre tehát definíció szerint

$$p_\gamma^{(1)} : S' \cup H \rightarrow A_\gamma \cup C_\gamma, \quad [\gamma \in G]$$

illetve

$$p_\gamma^{(2)} : (S - S') \cup H \rightarrow (A_\gamma - A'_\gamma) \cup C_\gamma, \quad [\gamma \in G]$$

és tetszőleges $h \in H$ elemre $p_\gamma^{(1)}(h) = p_\gamma^{(2)}(h) \in C_\gamma$ $[\gamma \in G]$. A $p_\gamma : S \rightarrow A_\gamma$ leképezés az így definiált $p_\gamma^{(1)}$ és $p_\gamma^{(2)}$ leképezések diszjunkt kompatibilis kiterjesztése minden $\gamma \in G$ esetén, amivel a tétel állítását igazoltuk.

Következmény. Tetszőleges $n \geq 2$ tagú $R[n]$ reláció bármely adott $k[2 \leq k \leq n]$ természetes szám esetén dekomponálható valamely k tagú $R^{(1)}[k]$ és $n - k + 2$ tagú $R^{(2)}[n - k + 2]$ relációra. (Ez közvetlenül következik a tétel állításából, ha a H halmazt egy eleműnek választjuk.)

5.3. Tétel. Bármely $n \geq 2$ tagú $R[n]$ reláció dekomponálható valamely olyan $R^{(1)}[n_1], \dots, R^{(r)}[n_r]$ – rendre $n_1, \dots, n_r$ tagú – relációkra, amelyekre $2 \leq n_i \leq n$, minden $i = 1, \dots, r$ esetén, és

$$\sum_{j=1}^r n_j = n + 2(r - 1).$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. $r = 1$ esetén triviális az állítás, $r = 2$ esetére pedig az 5.2. tétel következménye igazolja. Tegyük fel, hogy $r = r_0$ -ra is igaz a tétel, vagyis léteznek olyan $R^{(1)}[n_1], \dots, R^{(i)}[n_i], \dots, R^{(r_0)}[n_{r_0}]$ -rendre $n_1, \dots, n_i, \dots, n_{r_0}$ tagú – relációk, amelyekre

$$R[n] = R^{(1)}[n_1] \circ \dots \circ R^{(i)}[n_i] \circ \dots \circ R^{(r_0)}[n_{r_0}],$$

és teljesülnek a tétel feltételei, vagyis $2 \leq n_i \leq n$ minden $i = 1, \dots, r_0$ esetén, és

$$\sum_{j=1}^{r_0} n_j = n + 2(r_0 - 1).$$

Tetszőleges $R^{(i)}[n_i]$ komponenst kiválasztva, feltevésünk értelmében létezik olyan $R^{(i_1)}[n_{i_1}]$ és $R^{(i_2)}[n_{i_2}]$ reláció, hogy $R^{(i)}[n_i] = R^{(i_1)}[n_{i_1}] \circ R^{(i_2)}[n_{i_2}]$, ahol

$$2 \leq n_{i_1}, n_{i_2} \leq n_i \leq n \quad \text{és} \quad n_{i_1} + n_{i_2} = n_i + 2.$$

Eszerint az $R[n] = R^{(1)}[n_1] \circ \dots \circ (R^{(i_1)}[n_{i_1}] \circ R^{(i_2)}[n_{i_2}]) \circ \dots \circ R^{(r_0)}[n_{r_0}]$ dekompozícióra is teljesülnek a tétel feltételei, mert

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r_0} n_j + (n_{i_1} + n_{i_2}) &= [n + 2(r_0 - 1) - n_i] + (n_i + 2) = \\ &= n + 2[(r_0 + 1) - 1] = \sum_{j=1}^{r_0+1} n_j. \end{aligned}$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

6. Következmények

A bizonyított tételekből következik, hogy minden általános reláció, illetve minden deszuperponálható általános reláció az eredetinel nem nagyobb tagszámosságú általános relációkra dekomponálható, illetve deszuperponálható. Véges relációk esetén mind a dekompozíció, mind a deszuperpozíció határozottan csökkenti a tagszámot, az utóbbi fokozottabb mértékben. Ezen legutóbbi dolog természetesen szoros kapcsolatban van azzal, hogy a dekompozíció mindig, a deszuperpozíció pedig csak bizonyos feltételek teljesülésekor végezhető el. Mindezeknek a tényeknek komoly jelentőségük van rendszereknek általános relációkkal való, és rendszerek felbontásának – összekapcsolásának az általunk bevezetett kapcsolódási műveletek segítségével való modellezése szempontjából.

Mint másik fontos tényt megemlítjük, hogy a dolgozatban tárgyalt fogalmak és közölt eredmények a számítástechnika, illetve számítógéptudomány szempontjából jól használható formába fogalmazhatók át n tagú véges relációk esetén, ezeknek Boole–mátrixokkal való

reprezentációja révén. Ez esetben a dekompozíció és deszuperpozíció ugyanis visszavezethető Boole-mátrixok alkalmas fraktorizációjára, amely jól algoritmizálható és programozható, illetve elektronikus úton jól megvalósítható. A terjedelem korlátai miatt cikkünkben elsősorban az elvi problémák felvetésére és tárgyalására koncentráltunk, és nem tértünk ki ezen utóbbi inkább "technikai" jellegű kérdésekre. Ezek részletes vizsgálata és leírása kimeríti egy újabb cikk kereteit.

Végezetül a szerző köszönetét szeretné kifejezni Nagypál Botondnak egyes matematikai problémák felvetésében és megfogalmazásában nyújtott segítségéért, valamint Veress Gábornak a kézirat áttanulmányozásáért és ennek kapcsán adott hasznos tanácsaiért és kritikai megjegyzése-
ért.

Jelölésjegyzék:

S :	tartóhalmaz (support)
p_γ :	paraméterező leképezés ($\gamma \in G$)
G :	halmazrendszert generáló halmaz
P_G :	a G halmaz által generált leképezésrendszer
$A_S(p_\gamma)$:	a p_γ leképezés által S -paraméterezett halmaz
$A_S(P_G)$:	az $A_S(p_\gamma)$ S -paraméterezett halmazoknak a G halmaz által generált halmazrendszere
R	általános reláció
$R[n]$	n tagú (általános) reláció
$dom_s(R)$	az R általános reláció s paraméterhez tartozó értelmezési tartománya
$R/\tilde{S}$	az S tartójú R általános relációnak az $\tilde{S}$ halmazra való megszorítása
$R^{(1)} \circ R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ kompozíciója
$R^{(1)} * R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ szuperpozíciója
$R^{(1)} \times R^{(2)}$	az $R^{(1)}$ és $R^{(2)}$ direkt szorzata
$\stackrel{\text{def}}{=} \text{ ill. } \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow}$	definíció szerint egyenlő, illetve "következik"
$\{x \mid F(x)[T(F)]\}$	a T tulajdonsággal rendelkező F feltételt kielégítő x objektumok halmaza

Irodalom

- [1] Almásy, G., Veress, G., Farkas, Z. and Pallai, I., Strategies of Optimizing Complex Steady–state Decision Systems
IFAC Symposium on Digital Simulation of Continuous Process. Győr – Hungary, September 6–10, 1971. Preprints IA2 1–10.
- [2] Ashby, W. R., "Constraint Analysis of many–dimensional Relations"
General Systems 2 (1964) 99–105.
- [3] Császár Á., Bevezetés az általános topológiába (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.)
- [4] Fraissé, R., "A Hypothesis Concerning the Extension of Finite Relations and its Verification for Certain Special Cases"
(Symposium on the Theory of Models North–Holland Publ. Co., Amsterdam, 1965. 96–106.)
- [5] Kuratowski, K. and Wostowski, A., Set Theory (Amsterdam–Warsawa, 1970).
- [6] Maurer I. G. és Virág I., A relációelmélet elemei (Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1972).
- [7] Mesarović, M. D., Views on General Systems Theory (J. Wiley and Sons, Inc., New–York, London, Sidney, 1964).
- [8] Riguet, J., Relations binaires, fermentures, correspondances de Galois.
Bulletin de la Société Mathématique de France 76 (1948) 1–4, 114–115.
- [9] Salovaara, S., "On Set Theoretical Foundations of System Theory. A Study of the State Concept." Acta Polytechnica Scand. Mathematics and Computing Machinery Series 15, Helsinki, 1967.
- [10] Wiener, N., "A simplification of the Logic of Relations"
Proceeding of the Cambridge Phil. Soc. 17 (1914) 387–390.

Summary

Some of the author's mathematical results connected with modelling large-scale systems by means of generalized relations are summarized briefly. A generalization of the relation is given without using notions of the ordered n -tuple and Cartesian product, using only the notion of mapping. On the basis of these generalized relations a connectivity operation is defined and some of its algebraic properties are examined. This approach offers some advantages in handling and computation large-scale systems.

Р е з ю м е

В настоящей статье кратко изложены некоторые результаты автора, связанные с моделированием сложных систем с помощью понятием обобщённых отношений. Дается обобщение понятия упорядоченной n -ки и декартового произведения, с применением только понятие отображения. Потом на базе этого понятия вводятся операции связи, определённых на отношениях, и исследуются их алгебраические свойства. Изложенный новый подход открывает новые перспективы в исследовании описанного выше круга вопросов, и реализации полученных результатов на ЦВМ.