MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 14/1975

A SHEFFER FÜGGVÉNYEK FŐÁTLÓJÁRÓL

Demetrovics János

0. Bevezetés

A k-értékű logikák Sheffer függvényeivel kapcsolatban több jelentős dolgozat jelent meg [1, 3 – 11]. Ezekben a dolgozatokban a szerzők többek között a shefferség kritériumával, illetve a sheffer függvények számosságával foglalkoznak. Az [1, 5] dolgozatokban a szerzők "sok" Sheffer függvény "általános alakját" adják meg olyan kritérium segítségével, amelyet "nagyon egyszerűen" lehet ellenőrízni.

Ez a dolgozat a Sheffer függvények főátlóját tanulmányozza. Szükséges és elégséges feltételt ad a főátlóra vonatkozóan abból a szempontból, hogy egy adott függvény értéktáblázatát miként lehet kitölteni – adott főátló mellett – úgy, hogy Sheffer függvényt kapjunk. Továbbá, a Sheffer függvények számosságára is tesz néhány megállapítást.

1. A Sheffer függvények főátlója

Legyen $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geqslant 2$. Az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt k-értékű függvénynek nevezzük, ha az $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n\text{-szer}}$ halmazon van értelmezve és az értékeit is az E_k halmazon veszi fel. A k-értékű függvények halmazát k-értékű logikának nevezzük és P_k-val jelöljük.

Ismert módon határozzuk meg a szuperpoziciót a k-értékű logikán P_k [4, 10].

Sheffer függvénynek nevezzük azt a $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$ $(n \geqslant 2)$ függvényt, amely a szuperpozició segítségével generálja a P_k-t. A továbbiakban, az egyszerűség kedvéért csak a 2 változós Sheffer függvényeket fogjuk vizsgálni.

Azt mondjuk, hogy az $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in P_k$ függvény lényegesen függ az x_i változótól, ha létezik olyan $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, illetve $\tilde{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ érték kombináció pár, hogy $\alpha_i \neq \alpha_i'$ és $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\alpha}')$.

A szemléletesség kedvéért az $f(x, y) \in P_k$ függvényeket értéktáblázattal adjuk meg. Lásd 1., illetve 2. ábra.

Beérkezett: 1974. december 6.

y \ x	0	1	2	3	4
0	1		$+_3$	$+_4$	$*_5$ $+_5$
1	$+_1$	2	$*_3$		
2		$+_2$	0	$*_4$	
3	$*_1$			0	
4		$*_2$			0

1. ábra

x	0	1	2	3	4
$g'(x)$	1	2	0	0	0
$\sigma'(x)$	2	0	4	1	3
$\tau'(x)$	0	1	2	4	3

$\varphi'_{g'}(x, g'(x)) = \sigma'(x)$

$\varphi'_{g'}(x, \sigma'^3(x)) = \tau'(x)$

y \ x	0	1	2	3	4
0	1		4	1	3
1	2	2	2		
2		0	0		
3	0			0	
4		1		4	0

$\varphi'_{g'}(x, y)$

2. ábra

1.1. **Lemma.** *Ha az* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *függvény generálja az* A_k *alternáló csoportot, akkor az* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *Sheffer függvény* $(k \geqslant 4)$, [5].

1.2. **Lemma.** *Legyen* $\sigma(x)$ *egy teljes ciklus, azaz*

$$\begin{array}{c|cccccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_0 \end{array},$$

továbbá

$$\begin{array}{c|cccccc} x & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-3} \\ \hline \tau_1(x) & \alpha_{i+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-3} \end{array},$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & \alpha_i & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau_2(x) & \alpha_j & \alpha_{j+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \end{array},$$

akkor a $\{\sigma(x),\ \tau_j(x)\}$ *függvényhalmazok generálják az* A_k*-t* $(1 \leqslant j \leqslant 2)$ [2].

Itt és a továbbiakban mindig, különböző indexű α-ák, különböző E_k-beli elemeket jelölnek. Vagyis, a $\tau_j(x)$, $\tau(x)$ és $\sigma(x)$ esetében a függvények minden E_k beli értéket egyszer vesznek fel.

1.1. **Tétel.** *Minden olyan* $g(x) \in P_k$ *függvényhez, amelyre* $g(\alpha) \neq \alpha$ $(\alpha \in E_k)$, *létezik olyan* $\varphi_g(x,y)$ *Sheffer függvény, amelyre igaz, hogy* $\varphi_g(x,x) = g(x)$.

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogyha az $f(x,y)$ függvény megőríz legalább egy értéket – – $f(\alpha,\alpha) = \alpha$, $\alpha \in E_k$ – akkor az $f(x,y)$ nem lehet Sheffer függvény [1, 10].

Bizonyítsuk be, hogyha $g(x)$ nem őríz meg egyetlenegy értéket sem, akkor a 2-változós $\varphi_g(x,y)$ függvény értéktáblázatát ki lehet úgy tölteni, hogy a $\varphi_g(x,y)$ Sheffer függvény legyen. Vagyis meghatározzuk a $\varphi_g(x,y)$ függvény értéktáblázatát úgy, hogy csak a $(0,0),(1,1),\ldots(k-1,k-1)$ koordinátákat vesszük ismertnek, ahol a $g(x)$ függvény van meghatározva. A többi (i,j) koordinátát csak ezután fogjuk megadni a $g(x)$ függvény segítségével, ahol $i \neq j, 0 \leqslant i,j \leqslant k-1$.

Vegyük a $\varphi_g(x,g(x))$ ill. $\varphi_g(g(x),x)$ szuperpoziciót. Világos, hogy a $\varphi_g(x,g(x))$ függvény által kiválasztott k koordináta közül $\{(0,g(0)),(1,g(1)),\ldots,(k-1,g(k-1))\}$ egy sem esik egybe az (i,i), $0 \leqslant i \leqslant k-1$ helyek egyikével sem, mivel a $g(x)$ függvény egyetlenegy értéket sem őríz meg. Ezért ezeken a helyeken elő tudunk állítani tetszőleges $\sigma(x)$ függvényt úgy, hogy $\varphi_g(x,g(x)) = \sigma(x)$, ahol

$$\begin{array}{c|cccccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} & \alpha_0 \end{array}.$$

Példánkban a $\varphi'_{g'}(x,g'(x))$ függvény a $+_i$-vel jelölt helyeket határozza meg növekvő sorrendben, ahová a $\sigma'(x)$ függvényt építjük be, (Lásd 2. ábra.), ahol

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \sigma'(x) & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}.$$

$\sigma^j(x)$-el jelöljük a $\underbrace{\sigma(\sigma\ldots(\sigma(x))\ldots)}_{j\text{-szer}}$-et.

Vizsgáljuk meg a $\varphi_g(x, \sigma^j(x))$ szuperpoziciók által kiválasztott koordinátákat $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$. Könnyű belátni, hogy létezik legalább egy olyan j, hogy a $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \ldots, (k-1, \sigma^j(k-1))\}$ helyek közül legfeljebb csak egy hely van lerögzítve a $\varphi_g(x, y)$ függvény értéktáblázatában $(k \geqslant 3)$. Példánkban, pl. a $\varphi'_{g'}(x, \sigma'^3(x))$ függvény kiválasztja a $*_i$-vel jelölt koordinátákat. (Lásd 1. ábra.)

Ha minden hely üres, akkor ide építsük be a $\tau(x)$ függvényt, azaz $g(x, \sigma^j(x)) = \tau(x)$, ahol $\tau(x)$ tetszőleges olyan függvény, amely a $\sigma(x)$-el együtt generálja az A_k alternáló csoportot.

Ha csak 1 hely van lerögzítve, akkor is be tudjuk ide építeni a $\tau(x)$ függvényt, pl. a következőképpen.

Legyen $\varphi_g(i, \sigma^j(i)) = \alpha$. Különböztessünk meg 3 esetet:

a) $\alpha = i$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	$i+1$	$i+2$	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-4}$
$\tau(x)$	i	$i+2$	$i+1$	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-4}$

b) $|\alpha - i| = 1$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	α	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-3}$
$\tau(x)$	α	i	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-3}$

c) $\alpha \neq i$ és $|\alpha - i| \neq 1$. Ebben az esetben $\tau(x)$ pl. legyen a következő függvény:

x	i	α	$\alpha+1$	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-4}$
$\tau(x)$	α	$\alpha+1$	i	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-4}$

Az 1.2. Lemma biztosítja, hogy ezekben az esetekben is a $\sigma(x)$ és a $\tau(x)$ generálja az A_k-t. Igy tehát a tételt bebizonyítottuk, ha $k \geqslant 4$.

Példánkban $\varphi'_{g'}(4, \sigma'^3(4)) = \varphi'_{g'}(4, 0) = 3 = \tau(4)$. Ebben az esetben a b) eset igaz, vagyis

x	0	1	2	3	4
$\tau(x)$	0	1	2	4	3

Lásd 2. ábra.

$k = 2$ esetén a tétel igaz, mivel mindkét $\varphi_g(x, y)$ Sheffer függvény esetén, $\varphi_g(x, x) = \overline{x}$. Az $\overline{x}$ generálja az S_2-t. A $\varphi_g(x, \overline{x}) = f(x)$, ahol $f(x)$ konstans kell, hogy legyen.

$k = 3$ esetén különböztessünk meg 2 esetet.

a) Ha $g(x)$ felveszi mind a 3 értéket, akkor $g(x) = \sigma(x)$ teljes ciklus. A $\varphi_g(x, g(x)) = \tau(x)$, ahol $\sigma(x)$ és $\tau(x)$ generálja az S_3 szimmetrikus csoportot. Az 1.2. Lemmából következik az ilyen tulajdonságú $\tau(x)$ létezése. Legyen $\varphi_g(x, g^2(x)) = \mu(x)$, ahol

x	0	1	2
$\mu(x)$	1	1	2

.

Ismert tény [10], hogy a $\sigma(x)$, $\tau(x)$ és $\mu(x)$ generálják az összes egyváltozós 3 értékű függvényt, G_3-t amely a $\varphi_g(x, y)$-al együtt generálja a P_3-t [12].

b) Ha $g(x)$ csak 2 értéket vesz fel, akkor vagy a $g(x)$ vagy pedig a $g^2(x)$ függvény $\mu(x)$ tipusú. A $\varphi_g(x, y)$ táblázat többi helyeit pedig úgy töltsük ki, hogy $\varphi_g(x, g(x)) = \sigma(x)$, vagy a $\varphi(x, \sigma(x))$, vagy pedig a $\varphi(x, \sigma^2(x))$ legyen egyenlő $\tau(x)$-el, ahol a $\sigma(x)$ és a $\tau(x)$ generálják az S_3 szimmetrikus csoportot. Az $S_3, g(x), \varphi_g(x, y)$ függvényhalmaz pedig generálja a P_3-t [12].

c) Ha $g(x)$ – konstans, akkor a tétel triviális, mert létezik olyan $\alpha \in E_3$, hogy $g(\alpha) = \alpha$.

A tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A $\varphi_g(i, \sigma^j(i)) = \alpha$ esetén másképpen is el lehet járni. Az 1.2. lemmából következik, hogy a $\tau(x)$ minden értéket felvesz, ahol a $\tau(x)$ és a $\sigma(x)$ generálja az A_k-t. Legyen $\tau(t) = \alpha$, $0 \leqslant t \leqslant k-1$. Világos, hogy ilyen tulajdonságú $\tau(x)$-et is be tudunk építeni a $\varphi_g(x, y)$ értéktáblázatába, a $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \ldots, (k-1, \sigma^j(k-1))\}$ helyekre egészen más megoldás alapján. Vegyük a $\sigma^l(t) = i$ és $\sigma^m(t) = \sigma^j(i)$ függvényeket, $1 \leqslant l, m, j \leqslant k$. Könnyű belátni, hogy a $\varphi_g(\sigma^l(x), \sigma^m(x)) = \tau(x)$, ahol $\{(0, \sigma^j(0)), (1, \sigma^j(1)), \ldots, \ldots (k-1, \sigma^j(k-1))\} = \{(\sigma^l(0), \sigma^m(0)), (\sigma^l(1), \sigma^m(1)), \ldots, (\sigma^l(k-1), \sigma^m(k-1))\}$.

2. A Sheffer függvények számosságáról

Legyen $\sigma(x)$ teljes ciklus és a $\tau(x)$-el együtt generálják az A_k-t. Az 1.1. Tételből következik, hogyha létezik olyan i illetve j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, hogy $\varphi_\sigma(x, \sigma^i(x)) = \tau(x)$ illetve $\varphi_\sigma(\sigma^j(x), x) = \tau(x)$, akkor $\varphi_\sigma(x, y)$ Sheffer függvény.

2.1. **Lemma.** *Ha*

x	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-2}$	α_{k-1}
$\sigma(x)$	α_1	$\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}$	α_0

és

x	α_i	α_{i+1}	α_0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{k-4}$	α_{k-3}
$\tau(x)$	α_{i+1}	α_i	α_1	$\alpha_2 \ldots \alpha_{k-3}$	α_0

, $k = 2m + 1$ *esetén, ill.*

x	α_i	α_{i+1}	α_0	α_1	$\alpha_2 \ldots \alpha_{k-4}$	α_{k-3}
$\tau(x)$	α_{i+1}	α_i	α_0	α_2	$\alpha_3 \ldots \alpha_{k-3}$	α_1

, $k = 2m$ *esetén,*

akkor a $\sigma(x)$, $\tau(x)$ *generálja az* A_k*-t.*

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy a

$$\tau''(x) = \sigma^{k-2}(x) \quad (k = 2m + 1) \quad \text{ill.} \quad \tau''(x) = \sigma^{k-3}(x) \quad (k = 2m)$$

esetén a következőképpen néz ki:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_{k-3} \\ \hline \tau''(x) & \alpha_{i+1} & \alpha_i & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_{k-3} \end{array}.$$

Az 1.2. Lemma szerint $\sigma(x)$ és $\tau''(x)$ generálja az A_k-t.
A Lemmát bebizonyítottuk.

Könnyű belátni, hogy egy $\sigma(x)$-hez $k(k-3)!$ különböző $\tau(x)$ felel meg, amely a 2.1. Lemmában lévő tulajdonsággal rendelkezik.

2.2. **Lemma.** *Ha*

$$\begin{array}{c|cccc} x & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-1} \\ \hline \sigma(x) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_0 \end{array} \quad \textit{és } (k-3, 3) = 1 \textit{ esetén}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & \alpha & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau(x) & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_0 \end{array}, \quad \textit{ill. } (k-3, 3) = 3 \textit{ esetén}$$

$$\begin{array}{c|cccccccccc} x & \alpha & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-5} & \alpha_{k-4} \\ \hline \tau(x) & \alpha_i & \alpha_{i+1} & \alpha & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{k-4} & \alpha_1 \end{array},$$

akkor a $\sigma(x)$, $\tau(x)$, *generálja az* A_k*-t.*

Bizonyítás. A Lemma bizonyítása azonos a 2.1. Lemma bizonyításával.

Könnyű belátni, hogy egy $\sigma(x)$-hez $k(k-1)(k-4)!$ különböző $\tau(x)$ felel meg, amely a 2.2. Lemmában lévő tulajdonsággal rendelkezik.
A Lemmát bebizonyítottuk.

2.1. **Tétel.** *Legyen* $\sigma(x)$ *teljes ciklus és* $k \geqslant 5$. *Akkor a különböző* $\varphi_\sigma(x, y)$ *Sheffer függvények száma* $> (k-1)!\, k(2k-4)(k-4)!\, k^{k^2-2k+1}$.

Bizonyítás. A 2.1. Tétel bizonyítása közvetlenül adódik a 2.1. és a 2.2. Lemmából, valamint az 1.1. Tételhez fűzött megjegyzésből.

2.2. **Tétel.** *Minden* $g(x)$ *függvényhez* $(g(x) \in P_k,\ \forall \alpha, \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha)$ *létezik legalább* $k(k-4)!(2k-4)k^{k^2-3k+1}$ *különböző* $\varphi_g(x, y)$ *Sheffer függvény.*

Bizonyítás. A 2.2. Tétel bizonyítása közvetlenül adódik az 1.1. és 2.1. Tételből.

Megjegyzés. Legyen m az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ függvény ismert értékeinek a száma. Salomaa az [5] munkájában felvetette a következő kérdést: mi az a minimális m szám, amely mellett meg tudjuk állapítani, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sheffer függvény, függetlenül attól, hogy milyen a többi $k^n - m$ hely. Salomaa [5] bebizonyította, hogy $m \geqslant k + 2$ és ha k primszám, akkor $m = k + 2$. Itt szeretném megjegyezni, hogy nem minden Sheffer függvény ilyen tulajdonságú, hanem csak léteznek ilyen tulajdonságú Sheffer függvények. Az 1.1. és 1.2. Tételekből következik, hogy minden k-ra $(k \geqslant 2)$ léteznek olyan Sheffer függvények, amelyekre $m \leqslant 2k$.

Irodalom

[1] R. L. Graham, On n-valued functionally complete truth functions, The Journal of Symbolic Logic, 32 (1967), 190–195.

[2] S. Piccard, Sur les bases du groupe symetrique, Paris, 1946.

[3] I. Rosenberg, La structure des functions de plusiers variables sur un ensemble fini, Comptes rendus Acad. Sci. 260 (1965).

[4] A. Salomaa, A theorem concerning the composition of functions of several variables ranging over a finite domain, The Journal of Symbolic Logic, 25 (1960).

[5] A. Salomaa, Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I, II, Annales Universitates Turkuensis, 53 (1962), 1–9 and 63 (1963), 1–19.

[6] R. F. Wheeler, Complete connectives for the 3-valued propositional calculs. Preceendings of the London Mathematical Society, 16 (1966), 167–191.

[7] Р. А. Байрамов, Выведение критериев фундаменталности групп подстановок и полугрупп отоброжений из теоремы Розенберга, Кибернетика, vol. 3 (1972), pp. 71–76.

[8] Р. А. Байрамов, К вопросу о функциональной полноте в многозначной логике, Дискретный анализ, vol. 11 (1967), pp. 3–20.

[9] Е. Ю. Захарова, Критерий полноты систем функций из P_k, Проблемы кибернетики, vol. 18 (1967), pp. 5–10.

[10] В. Б. Кудрявцев, О покрытиях предполных классов к-значной логики, Дискретный анализ, vol. 17 (1970), pp. 32–44.

[11] А. И. Мальцев, Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского, Алгебра и логика, vol. 6 (1967), 3.

[12] С. В. Яблонский, Функциональные построения в к-значной логике, Труды Математического института им.-на В. А. Стеклова, vol. 51 (1958), pp. 5–142.

Summary

The present paper studies the main diagonal of Sheffer functions $(\varphi(x, x, \ldots, x))$. It gives a necessary and sufficient condition for the main diagonal of a matrix to be extendible to a matrix a Sheffer function i.e. for all functions $g(x) \in P_k$ which has no fixed point i.e. $\forall \alpha, \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha$ there exists a Sheffer–functions $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ such that $\varphi_g(x, x, \ldots, x) = g(x)$. As a conclusion some estimates are given for the number of Sheffer functions.

Р е з ю м е

В настоящей работе исследуется главная диагональ Шеффер функций и дается некоторая оценка для чисел Шеффер функций. Более того доказывается, что каждую функцию $g(x)$, несохраняющую никакое значение – т.е. $\forall \alpha \in E_k : g(\alpha) \neq \alpha$ – можно растпространять до $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ Шеффер функции, где $\varphi_g(x, x, \ldots, x) = g(x)$. Для этой цели, достаточно зафиксировать не больше чем $3k$ значений функций $\varphi_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ т.е. $\varphi_g(\widetilde{\alpha}_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3k$.