MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 12. (1974)

Arató Mátyás:

A LINEÁRIS FILTRÁCIÓ VIZSGÁLATA DISZKRÉT GAUSS FOLYAMATOK ESETÉN

A lineáris filtráció Kálmán–Bucy egyenleteit vizsgáljuk abban a speciális esetben, amikor az ismeretlen idősor lineáris konstans együtthatós differencia egyenletnek tesz eleget s a megfigyelhető folyamat a nem megfigyelhetőből ugyancsak lineáris leképzéssel adódik, egy additiv zaj hozzáadásával. A tárgyalás ebben az esetben egészen elemi s nem kíván speciális valószínűségelméleti felkészülést.

Az (Ω, ϑ, P) valószínűségi mezőn egymással egyszerű sztochasztikus kapcsolatban lévő (Θ_n, η_n) valószínűségi változó sorozatokat vizsgálunk, ahol η_n a megfigyelhető Θ_n pedig a nem megfigyelhető komponens és Θ_n négyzetes középben legjobb becslését kívánjuk megadni. Kálmán és Bucy [1] mutatták meg, hogy egyszerű esetekben a megoldás a kiinduló egyenletekhez hasonló sztochasztikus differencia (illetve a folytonos esetben differenciál) egyenletet elégít ki, azaz az optimális megoldásra egy algoritmus adható.

Legyen a Θ_n $n = 1, 2, \ldots,$ sorozat Markov tipusú Gauss, mégpedig elégítse ki a

(1) $$\Theta_n = A_{n-1}\Theta_{n-1} + F_n\epsilon_n, \quad \Theta_0 = 0, \quad (E\Theta_n = E\epsilon_n = 0)$$

egyenletet, ahol ϵ_n egy független, egységnyi szórású, Gauss sorozat és ϵ_n független F_Θ^{n-1}-től is, ahol F_Θ^{n-1} a Θ változók által generált σ-algebra $F_\Theta^{n-1} = \sigma(\omega : \Theta_{n-1}(\omega), \ldots, \Theta_0(\omega))$. Feltessszük, hogy Θ_n közvetlenül nem megfigyelhető, csak az η_n sorozaton keresztül, ahol

(2) $$\eta_n = C_n\Theta_n + G_n w_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ahol w_n olyan független, egységnyi szórású, Gauss sorozat mely – az egyszerűség kedvéért – az $\{\epsilon_n\}$ sorozattól is független. Az A_n, C_n, F_n, G_n nem azonosan 0 mátrixok csak az időtől függnek s függetlenek az egyenletekben szereplő valószínűségi változóktól (a legegyszerűbb esetben a folyamatok egydimenziósak).

Jelölje $F_\eta^n = \sigma\{\omega : \eta_n(\omega), \eta_{n-1}(\omega), \ldots, \eta_0(\omega)\}$ az η változók által generált σ-algebrák sorozatát. Bevezetjük a következő valószínűségi változókat

(3) $$\hat{\Theta}_n = E(\Theta_n \mid F_\eta^n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

(4) $$e_n = \Theta_n - \hat{\Theta}_n, \quad d_n = Ee_n^2, \text{ és } e_n \text{ független } F_\eta^n\text{-től}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

(5) $$\xi_n^0 = \eta_n - E(\eta_n \mid F_\eta^{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A feltételes várható érték definíciója alapján $\hat{\Theta}_n$ és ξ_n^0 is olyan Gauss eloszlású változók,

Beérkezett: 1974. március 21.

melyek $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ lineáris kombinációi, továbbá ξ_n^0 független F_η^{n-1}-től és így egy független sorozatot alkot. A definíciók felhasználásával adódik ξ_n^0 következő előállítása

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi_n^0 &= C_n\Theta_n + G_n w_n - E(C_n\Theta_n + G_n w_n \mid F_\eta^{n-1}) = \\ &= C_n\Theta_n + G_n w_n - C_n A_{n-1}\hat{\Theta}_{n-1} = C_n\Theta_n + G_n w_n - C_n A_{n-1}(\Theta_{n-1} - e_{n-1}) \\ &= C_n F_n \epsilon_n + G_n w_n + C_n A_{n-1} e_{n-1}. \end{aligned}$$

A $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0$ változók az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók olyan lineáris kombinációi, melyből egyértelműen kölcsönösen meghatározhatók a ξ_i^0 és η_i változók. Ugyanis a leképezés mátrixa olyan háromszög mátrix, melynek fődiagonálisában 1-ek vannak. Ez azt jelenti, hogy a ξ_i^0 által generált σ-algebra sorozat megegyezik az η_i által generált σ-algebrák sorozatával: $F_{\xi 0}^n = F_\eta^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Tekintsük a következő valószínűségi változó sorozatot

$$(7) \qquad \begin{aligned} \xi_n^1 &= \hat{\Theta}_n - A_{n-1}\hat{\Theta}_{n-1} = (\hat{\Theta}_n - \Theta_n) + A_{n-1}(\Theta_{n-1} - \hat{\Theta}_{n-1}) + \\ &+ (\Theta_n - A_{n-1}\Theta_{n-1}) = -e_n + A_{n-1}e_{n-1} + F_n\epsilon_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

könnyen látható, hogy a (7)-ben értelmezett ξ_n^1 sorozat ugyancsak független Gauss sorozat. Ugyanis (7) jobboldalán minden változó független F_η^{n-1}-től és így mivel ξ_m^1 F_η^m mérhető, ξ_n^1 független ξ_m^1-től is, ha $m < n$.

Mivel ξ_n^1 F_η^n-mérhető és egyben $F_{\xi 0}^n$ mérhető, nemcsak az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók, hanem a $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ változók lineáris függvénye is. Továbbá, ϵ_n és F_η^{n-1} (tehát $F_{\xi 0}^{n-1}$) függetlensége miatt

$$(8) \qquad \begin{aligned} \xi_n^1 &= \hat{\Theta}_n - A_{n-1}\hat{\Theta}_{n-1} = E(\Theta_n \mid F_\eta^n) - A_{n-1}E(\Theta_{n-1} \mid F_\eta^{n-1}) = \\ &= E(\Theta_n \mid F_{\xi 0}^n) - A_{n-1}E(\Theta_{n-1} \mid F_{\xi 0}^n) = E(\Theta_n - A_{n-1}\Theta_{n-1} \mid F_{\xi 0}^n) = \\ &= E(F_n\epsilon_n \mid F_{\xi 0}^n) = K_n\xi_n^0. \end{aligned}$$

Innen ξ_n^0-al való szorzással

$$(9) \qquad E(\xi_n^1\xi_n^0) = K_n E(\xi_n^0)^2.$$

A K_n együttható meghatározása a következőképpen történik. Egyrészt (6) alapján

$$(10) \qquad \begin{aligned} E(\xi_n^0\xi_n^0) &= E[C_n F_n\epsilon_n + G_n w_n + C_n A_{n-1}e_{n-1}]^2 = \\ &= (C_n F_n)^2 + G_n^2 + (C_n A_{n-1})^2 d_{n-1}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk ϵ_n és w_n függetlenségét, valamint ezek függetlenségét (4) és (1) alapján e_{n-1}-től. Továbbá (7) és (6) alapján

$$(11) \qquad \begin{aligned} E(\xi_n^1\xi_n^0) &= E(-e_n + A_{n-1}e_{n-1} + F_n\epsilon_n)(C_n F_n\epsilon_n + G_n w_n + \\ &+ C_n A_{n-1}e_{n-1}) = E(A_{n-1}e_{n-1} + F_n\epsilon_n)(C_n F_n\epsilon_n + G_n w_n + \\ &+ C_n A_{n-1}e_{n-1}) = C_n(F_n)^2 + A_{n-1}C_n A_{n-1}d_{n-1}, \end{aligned}$$

felhasználva e_n és ξ_n^0 függetlenségét, valamint a már említett többi változó függetlenségét. (9)-ből (10) és (11) alapján

$$(12) \qquad K_n = \frac{E(\xi_n^1 \xi_n^0)}{E(\xi_n^0)^2} = [C_n(F_n)^2 + A_{n-1}C_nA_{n-1}d_{n-1}][(C_nF_n)^2 + G_n^2 + (C_nA_{n-1})^2 d_{n-1}]^{-1}$$

A (8) összefüggésből a $\hat{\Theta}_n$ sorozatra a következő rekurziót kapjuk

$$(13) \qquad \hat{\Theta}_n = A_{n-1}\hat{\Theta}_{n-1} + K_n\zeta_n^0$$

ahol ζ_n^0 az (5) szerinti független sorozat.
A d_n szórásnégyzetek sorozatára egy differencia egyenlet írható fel.
Ugyanis $d_0 = 0$

$$d_n = E(\Theta_n - \hat{\Theta}_n)^2$$

továbbá

$$(14) \qquad d_n = E[(\Theta_n - \hat{\Theta}_n)\Theta_n - (\Theta_n - \hat{\Theta}_n)\hat{\Theta}_n] =$$
$$= E(\Theta_n)^2 - E(\Theta_n\hat{\Theta}_n) = E(\Theta_n)^2 - E(E(\Theta_n\hat{\Theta}_n \mid F_\eta^n)) = E(\Theta_n)^2 - E(\hat{\Theta}_n)^2 .$$

Viszont (1) alapján

$$E(\Theta_n)^2 = A_{n-1}E(\Theta_{n-1})^2 A_{n-1} + (F_n)^2$$

és (13) alapján (10) felhasználásával

$$E(\hat{\Theta}_n)^2 = A_{n-1}E(\hat{\Theta}_{n-1})^2 A_{n-1} + K_nE(\zeta_n^0)^2 K_n .$$

Behelyettesítve (14)-be a két utolsó összefüggést és K_n (12) szerinti értékét

$$(15) \qquad d_n = A_{n-1}E(\Theta_{n-1})^2 A_{n-1} + (F_n)^2 - [A_{n-1}E(\hat{\Theta}_{n-1})^2 A_{n-1} +$$
$$+ \frac{[E(\zeta_n^1\zeta_n^0)]^2}{E(\zeta_n^0)^2}$$
$$= A_{n-1}d_{n-1}A_{n-1} + (F_n)^2 - \frac{[C_n(F_n)^2 + A_{n-1}C_nA_{n-1}d_{n-1}]^2}{(C_nF_n)^2 + G_n^2 + (C_nA_{n-1})^2 d_{n-1}}$$

adódik.

A fenti tárgyalás akkor is igaz marad, ha Θ és η vektor folyamatok. A megfelelő képletek felírását az olvasó is elvégezheti a számítások végig követésével.

Ha az (1) és (2) lineáris egyenletek helyett a következő egyenletek teljesülnek

$$(16) \qquad \Theta_n = A(\Theta_{n-1}, \eta_{n-1}, n) + F_n\epsilon_n, \qquad \Theta_0 = 0,$$

és

(17) $$\eta_n = C(\Theta_{n-1}, \eta_{n-1}, n) + G_n w_n,$$

ahol mint az előbbiekben ϵ_n és w_n független Gauss sorozatok, melyek egymástól is függetlenek a nemlineáris filtrációra jutunk. Ekkor a (Θ_n, η_n) pár egy nemlineáris sztochasztikus egyenletrendszer megoldása. Az előbbiekkel ellentétben ha $A(x, y, n)$ és $C(x, y, n)$ nem lineáris függvények Θ_n és η_n nem lesznek többé Gauss eloszlású változók.
Megmutatható, hogy a

$$\hat{\Theta}_\eta = E(\Theta_n \mid F^n_\eta)$$

sorozat ekkor is kielégít egy (7)-hez hasonló differencia egyenletet. A megfelelő, de időben folytonos eset tárgyalása megtalálható Lipcer és Sirjájev [2] összefoglaló dolgozatában. A (16) és (17) egyenletekkel leírt diszkrét folyamat nemlineáris filtrációjának elemi tárgyalásával egy későbbi dolgozatban foglalkozom.

Irodalom

[1] Kalman, R. E., Bucy, R. C., "New results in linear filtering and prediction theory" Trans. ASME Journ. Basic Engr. 83 D (1961) 95-108.

[2] Липцер, Р.Ш., Ширяев, А.Н., "Нелинейная фильтрация диффузионных процессов" Труды МИАН I04 (I968) I35-I80.

Summary

The linear filtering problem of discrete Gaussian processes

If the process (Θ_n, η_n), $n = 1, 2, \ldots$ is given by equations (1) and (2) the filtering problem of Θ_n, when the observed process is η_n, may be solved by equations (13) and (12). An elementary proff of this statement is given.

Резюме

Линейная фильтрация дискретных гауссовских процессов

Если процесс (Θ_n, η_n); $n = 1, 2, \ldots$; задан уравнениями (1) и (2), где процесс η_n является "наблюдаемым" а Θ_n ненаблюдаемым, то линейная фильтрация процесса Θ_n решается с помощью уравнений (12) и (13). В статье дается элементарное доказательство этого утверждения.