MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

EGY GEOMETRIAI SZÉLSŐÉRTÉKFELADAT

Bán Ilona

Elektromágnesek vasmagjának tervezésénél merül fel a következő geometriai szélsőértékfeladat:

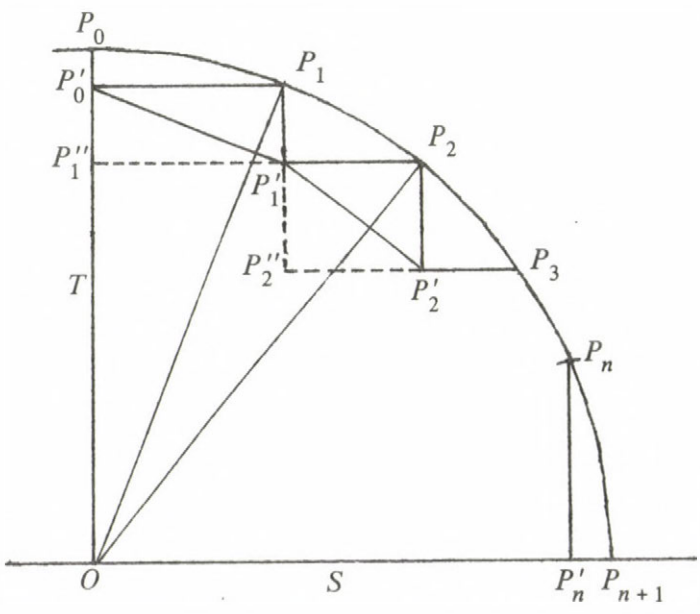
Egy O középpontú K kör kitöltendő előre megadott l számú, párhuzamos elhelyezkedésű, egymással oldalaik mentén érintkező, egymásba nem nyúló, legalább 2 csúcsukkal a köríven lévő téglalapokkal úgy, hogy a téglalapok egyesítéseként adódó L sokszög területe maximális legyen.

Nyilvánvaló, hogy L szimmetrikus az érintkező oldalak S felező merőlegesére. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor L szimmetrikus az S-re merőleges, O-n áthaladó T egyenesre is. Igy L-nek $4n$ csúcsa fekszik a körön. Jelölje L_n az ilyen tulajdonságú sokszögek valamelyikét, a maximális területű L_n-t pedig (ha létezik), L_n^*.

L_n^*-nak legalább $4n$ különböző csúcsa van a köríven, hiszen ha L_{n-k}^* csúcsaihoz tőlük különböző csúcsokat veszünk hozzá, akkor a sokszög területe nő, így a maximális terület is. Tehát $L_{n-k}^* < L_n^*$.

S-re és T-re való szimmetria miatt elegendő L_n-nek azt az N_n részét tekinteni, amely az S és T által határolt egyik N negyedkörbe esik. N_n területe változóinak folytonos függvénye, és e változók zárt intervallumon mozognak, ezért N_n területének van legalább egy N_n^* maximuma.

Vezessük be a következő jelöléseket: N_n-nek a negyedköríven levő pontjait T-nek a körívvel való P_0 metszéspontja felöl indulva $P_1, \ldots, P_n$-nek nevezzük. Húzzunk a $P_i (i = 0, \ldots, n)$ pontból T-vel és S-sel párhuzamosokat:



jelöljük T_i-vel illetve S_i-vel. T_i és S_{i+1} metszéspontja P_i', T_{i-1} és S_{i+1} metszéspontja P_i'' legyen. P_{n-1}-nek illetve P_n-nek S-re való vetületét P_n'' illetve P_n'-vel jelöljük.

Vegyük a pontoknak egy olyan elhelyezését, melynél a terület maximális. Ekkor a $P_{i-1}' P_i'' P_i' P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ téglalapok területének is maximálisnak kell lenni. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. $P_{i-1}' P_i'' P_i' P_i$ területe nem maximális az $P_{i-1}' P_i''$ és $P_i'' P_i'$ egyenesek által meghatározott tartományban. Keressük meg itt a maximális területű téglalapot és ezt vegyük hozzá az eredeti sokszöghöz. Igy egy nagyobb területű idomot kapunk, ami ellentmond a maximalitásnak.

Tekintsünk egy $P_{i-1}' P_i'' P_i' P_i$ téglalapot. A $P_{i-1}' P_i''$, $P_i'' P_i'$ egyenesekre támaszkodó, vele egyenlő területű téglalapoknak az egyeneseken nem lévő csúcsai egy $P_{i-1}' P_i''$, $P_i'' P_i'$ aszimptotájú hiperbolát írnak le. Ez a hiperbola nem metszheti a $P_{i-1} P_{i+1}$ körívet, hiszen P_i és a tőle különböző metszéspont közötti pontokhoz tartozó téglalap területe nagyobb lenne $P_{i-1}' P_i'' P_i' P_i$-nél, holott a feltevés szerint ez maximális. A hiperbola tehát csak érinti a kört (P_i-ben) és így P_i-ben az érintők közösek. A hiperbola érintője viszont párhuzamos a $P_{i-1}' P_i'' P_i' P_i$ téglalap $P_{i-1}' P_i'$ átlójával. $(i = 1, \ldots, n)$

Ebből következik, hogy P_1 vagy P_n ismeretében a többi csúcspontot már meg lehet szerkeszteni. Legyen pl. megadva a P_1 pont. P_0'-ből a kör P_1-beli érintőjével párhuzamost húzunk. Messük él ezt a P_1-ből az S-re bocsátott merőleges egyenessel. A metszéspontot átfektetett, S-sel párhuzamos egyenes a körívből kimetszi a P_2 pontot. A P_i $(i = 3, 4, \ldots, n)$ pontot úgy kapjuk, hogy a P_{i-1} ponthoz tartozó érintővel a P_{i-2}' pontból párhuzamost húzunk és elmetszük ezt a P_{i-1}-n áthaladó S-re merőleges egyenessel. A metszésponton átfektetett, S-sel párhuzamos egyenes a körívből kimetszi a P_i pontot.

A szerkesztés monotonitásából adódik, hogy egyetlen maximális területű N_n^* sokszög létezik. Megmutatjuk, hogy N_n^* szimmetrikus a negyedkör X szimmetriatengelyére.

Tegyük fel, hogy nem szimmetrikus. Vegyük N_n^*-nak X-re való tükrözését. Nyilván, ennek a területe is maximális, ami ellentmond annak, hogy egyetlen maximum létezik.

Beláttuk tehát, hogy létezik egyetlen maximális területű, n csúcspontú N_n^*, ez szimmetrikus X-re és P_1 vagy P_n ismeretében meg tudjuk szerkeszteni. N_n^*-t S-re és T-re tükrözve megkapjuk L_n^*-t.

A fentiek alapján többféle algoritmus is készíthető a probléma megoldására. Pl. a szimmetria miatt páratlan n esetén az $\frac{n+1}{2}$-edik pontnak X-re kell esnie, páros n esetén pedig $\frac{n}{2} - 1$ és $\frac{n}{2}$ pontok X-től egyenlő távolságra vannak. Ha páratlan n esetén az $\frac{n+1}{2}$-edik pont az optimálistól negatív irányba esik, P_1-et pozitív irányba kell mozgatni és fordítva. Páros n esetén is hasonló meggondolás alapján igazíthatjuk be a pontokat és előre megadott pontosságig számolhatjuk a pontok helyét. Ennél egyszerűbb az az algoritmus, ami csak azt használja ki, hogy P_n-ből az előző pontok képzésével megegyező módon kiszámított P_{n+1} pontnak S-

re kell esni n akár páros, akár páratlan.

MEGJEGYZÉSEK

1) Ha nem tesszük fel a T-re való szimmetriát, akkor is tudunk algoritmust adni L_n^* félköríven elhelyezkedő csúcsainak a meghatározására. Ha a félkörben fekvő sokszög területét változói szerint parciálisan deriváljuk és a deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé, akkor az adódik, hogy az egyik negyedkörben levő, T-hez legközelebb eső két pont ismeretében a többit a fent leírtakhoz hasonló módon megkaphatjuk.

2) $n = 1, \ldots, 100$ esetre numerikus számolással azt kaptuk, hogy a negyedkör N_n^* által le nem fedett területének n-szerese egységsugarú körnél 0.36 2 tizedesjegy pontosságig.

Köszönetet mondok Ruda Mihálynak, a Valószínűségszámítási osztály munkatársának e cikk megírásához adott hasznos tanácsaiért.

Táblázatok a CDC 3300-as gépen végzett számolás eredményéről:

1. N_n^* pontjainak elhelyezkedése:

n \ ∢	P_0OP_1	P_0OP_2	P_0OP_3	P_0OP_4	P_0OP_5	P_0OP_6	P_0OP_7	P_0OP_8	P_0OP_9	P_0OP_{10}
1	45°									
2	58,31°	31,73°								
3	64,94°	45°	25,1°							
4	68,99°	52,69°	37,35°	21,05°						
5	71,74°	57,78°	45°	32,26°	18,29°					
6	73,76°	61,44°	50,37°	39,64°	28,58°	16,26°				
7	75,31°	64,23°	54,39°	45°	35,67°	25,83°	14,76°			
8	76,53°	66,42°	57,51°	49,13°	40,89°	32,52°	23,61°	13,49°		
9	77,54°	68,21°	60,04°	52,42°	45°	37,63°	30,01°	21,84°	12,51°	
10	78,38°	69,69°	62,13°	55,11°	48,36°	41,70°	34,95°	27,94°	20,37°	11,69°

2. N_n^* területe és a negyedkörből N_n^* által le nem fedett terület n-szerese:

n	N_n^*	$n\left(\frac{\pi}{4} - N_n^*\right)$
1	0.5	0.285398
10	0.748816	0.365822
20	0.767140	0.365163
30	0.773259	0.364160
40	0.776313	0.363418
50	0.778141	0.362869
60	0.779357	0.362447
70	0.780225	0.362115
80	0.780875	0.361844
90	0.781380	0.361619
100	0.781784	0.361430

Summary

An algorithm is given for filling the quadrant of a circle with disjoint parallelograms with sides parallel to to the radii boundaring the quadrant, and with maximal total area.

Р е з ю м е

Дается алгоритм для напольнении четверти круга с непересекающимися параллелограмми, со стороному параллельными с граничными прямыми четверти круга и с максимальной общей площадью.

Beérkezett: 1973. szeptember 15.