MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

GAUSS FOLYAMATOK ELTOLÁSI PARAMÉTERÉNEK BAYES FÉLE BECSLÉSE

Pham Ngoc Phuc

1. Tekintsük az

(1) $$y(j) = \xi(j) + \Theta, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

sztochasztikus folyamatot.

Tegyük fel, hogy $\xi(j)$ a következő elsőrendű autoregressziós folyamat

(2) $$\xi(1) = \epsilon(1)$$
$$\xi(k) = \lambda\xi(k-1) + \epsilon(k), \qquad k = 2, \ldots, n$$

ahol $\epsilon(j)$ független sorozat, $F_j(x)$ eloszlással. A Θ $(\Theta \in R^1)$ paraméter becslésének Bayes-féle megfogalmazásában feltesszük, hogy Θ olyan valószínűségi változó, amelynek (a priori) eloszlása $\Pi(\Theta)$, továbbá Θ független $\epsilon(1), \ldots, \epsilon(n)$-től.

A sztochasztikus folyamatok elméletéből (lásd pl. [2]) tudjuk, hogy Θ legjobb (torzítatlan) becslése a

$$\hat{\Theta} = E(\Theta \mid y(1), \ldots, y(n))$$

statisztika*, és Θ legjobb lineáris (torzítatlan) becslése

$$\hat{\Theta}_1 = \hat{E}(\Theta \mid H_y),$$

ahol H_y jelöli az $y(1), \ldots, y(n)$ változók által generált zárt lineáris sokaságot, és $\hat{E}(\cdot \mid H_y)$ a H_y-ra való vetületét jelenti.

Abban az esetben, amikor a $(\Theta, y(1), \ldots, y(n))$ valószínűségi vektorváltozó Gauss eloszlású, akkor Θ legjobb becslése megegyezik Θ legjobb lineáris becslésével, azaz

(3) $$E(\Theta \mid y(1), \ldots, y(n)) = \hat{E}(\Theta \mid H_y).$$

Vizsgáljuk ennek a megfordítását. Megmutatjuk, hogy az (1)-(2) séma esetén ha (3) teljesül, akkor bizonyos egyszerű feltétel mellett, $\Pi(\Theta), F_j(x)$ Gauss-eloszlások.

A bizonyítás Kagan-Karpov [1] cikk gondolatmenetén alapszik.

* Ebben a dolgozatban a becslések optimalitásának fogalma a négyzetes veszteségfüggvényhez kapcsolódik.

Bevezetjük az

$$(4)\qquad \begin{aligned} x(1) &= \epsilon(1) + \Theta \\ x(2) &= \epsilon(2) + \Theta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x(n) &= \epsilon(n) + \Theta \end{aligned}$$

változókat.

Belátható, hogy

$$(5)\qquad \begin{aligned} y(1) &= x(1) \\ y(2) &= x(2) + \lambda\epsilon(1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(n) &= x(n) + \lambda^{n-1}\epsilon(1) + \ldots + \lambda\epsilon(n-1). \end{aligned}$$

H_x-szel jelöljük az $x(1), \ldots, x(n)$ változók által generált zárt lineáris sokaságot. (5)-ből következik, hogy H_y megegyezik H_x-szel, amiből

$$(6)\qquad \hat{E}(\Theta \mid H_y) = \hat{E}(\Theta \mid H_x)$$

adódik.

Legyenek

$$E\epsilon(j) = \mu_1^{(j)}, \qquad E\Theta = \alpha_1$$

$$E(\epsilon(j) - \mu_1^{(j)})^k = \mu_k^{(j)}, \qquad E(\Theta - \alpha_1)^k = \alpha_k \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

Tegyük fel, hogy

$$(7)\qquad 0 < \alpha_2 < \infty\,; \qquad 0 < \mu_2^{(j)} < \infty\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ismeretes (lásd [1]), hogy az $x(j) = \epsilon(j) + \Theta$ séma esetén Θ legjobb lineáris becslése a tágabb értelemben vett Bayes-féle becslés és a következő alakú:

$$(8)\qquad \hat{E}(\Theta \mid H_x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x(j)$$

ahol

$$(9)\qquad c_0 = \frac{\alpha_1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_2 \mu_1^{(j)}}{\mu_2^{(j)}}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_2}{\mu_2^{(j)}}}, \qquad c_j = \frac{\dfrac{\alpha_2}{\mu_2^{(j)}}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\alpha_2}{\mu_2^{(j)}}} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ily módon (6), (8)-ból kapjuk, hogy az $y(j) = \xi(j) + \Theta$ folyamat esetén, ahol $\xi(j)$ (2) alakú elsőrendű autoregressziós folyamat, és $\epsilon(j)$-re, Θ-ra teljesül a (7) feltétel, Θ legjobb lineáris becslése

$$(10) \qquad \hat{\Theta}_1 = \hat{E}(\Theta \mid H_y) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y(j) - (\lambda c_2 + \ldots + \lambda^{n-1} c_n)\epsilon_1 - \ldots - \lambda c_n \epsilon_{n-1} ,$$

ahol c_0, c_j, $j = 1, \ldots, n$ együtthatók meghatározhatók (9) segítségével.

Legyenek

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_j(x) , \qquad g_j(t) = \frac{f_j'(t)}{f_j(t)} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\Theta} d\Pi(\Theta) , \qquad \psi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} ,$$

ahol a $g_j(t)$, $\psi(t)$ függvények a $t = 0$ pont valamilyen környezetében vannak értelmezve.

Tegyük most fel, hogy Θ legjobb becslése megegyezik Θ legjobb lineáris becslésével, így (3)-ból és (10)-ből következik, hogy

$$(11) \qquad E(\Theta \mid y_1, \ldots, y_n) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j - (\lambda c_2 + \ldots + \lambda^{n-1} c_n)\epsilon_1 - \ldots - \lambda c_n \epsilon_{n-1}$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha_1 = \mu_1^{(j)} = 0$ $j = 1, \ldots, n$; tehát $c_0 = 0$.

Legyenek

$$(12) \qquad \begin{aligned} -(\lambda c_2 + \ldots + \lambda^{n-1} c_n) &= r_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -\lambda c_n &= r_{n-1} \end{aligned}$$

akkor (11) az

$$(13) \qquad E(\Theta \mid y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + r_1 \epsilon_1 + \ldots + r_{n-1}\epsilon_{n-1} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + \sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j$$

alakra hozható. A feltételes várható érték jól ismert tulajdonsága és (13) alapján kapjuk az

$$(14) \qquad E\left(\Theta \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) = E\left[\left(\exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) E(\Theta \mid y_1, \ldots, y_n)\right] = E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) +$$
$$+ E\left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right)$$

összefüggést.

Mivel

$$\sum_{j=1}^{n} t_j y_j = \sum_{j=1}^{n} t_j(\lambda^{j-1}\epsilon_1 + \ldots + \lambda\epsilon_{j-1} + \epsilon_j + \Theta) = \nu_1\epsilon_1 + \nu_2\epsilon_2 + \ldots + \nu_n\epsilon_n + \tau\Theta = \tag{15}$$

$$= \tau\Theta + \sum_{j=1}^{n} \nu_j\epsilon_j$$

ahol

$$\begin{aligned} \nu_1 &= t_1 + \lambda t_2 + \ldots + \lambda^{n-1} t_n \\ \nu_2 &= t_2 + \lambda t_3 + \ldots + \lambda^{n-2} t_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_n &= t_n \end{aligned} \tag{16}$$

és

$$\tau = \sum_{j=1}^{n} t_j = \nu_1 + (1-\lambda)\sum_{j=2}^{n} \nu_j ,$$

látható, hogy

$$E\left(\Theta \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) = E\left(\Theta \cdot e^{i\tau\Theta + i\sum_{j=1}^{n} \nu_j\epsilon_j}\right) = E(\Theta \cdot e^{i\tau\Theta})E\left(e^{i\sum_{j=1}^{n}\nu_j\epsilon_j}\right) = -i\varphi'(\tau)\prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j) \tag{17}$$

Tekintsük (14) jobb oldalát.

Egyrészt

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\epsilon_j + \gamma\Theta\right)\exp i\left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\epsilon_j + \tau\Theta\right) \tag{18}$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\epsilon_j e^{i\sum_{j=1}^{n}\nu_j\epsilon_j + i\tau\Theta} + \gamma\Theta e^{i\sum_{j=1}^{n}\nu_j\epsilon_j + i\tau\Theta}\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\epsilon_j e^{i\sum_{j=1}^{n}\nu_j\epsilon_j}\right)E(e^{i\tau\Theta}) + E(\gamma\Theta e^{i\tau\Theta})E\left(e^{i\sum_{j=1}^{n}\nu_j\epsilon_j}\right)$$

$$= -i\sum_{j=1}^{n} u_j f_j'(\nu_j)\prod_{k\neq j} f_k(\nu_k)\varphi(\tau) - i\gamma\varphi'(\tau)\prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j) ,$$

ahol

ahol

$$(19)\qquad \begin{aligned} u_1 &= c_1 + \lambda c_2 + \ldots + \lambda^{n-1} c_n \\ u_2 &= c_2 + \lambda c_3 + \ldots + \lambda^{n-2} c_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= c_n \end{aligned}$$

és

$$\gamma = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \,.$$

Másrészt

$$E\left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j \exp i \sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j e^{i(\sum_{j=1}^{n} \nu_j \epsilon_j + \tau\Theta)}\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j e^{i \sum_{j=1}^{n} \nu_j \epsilon_j}\right) \cdot E(e^{i\tau\Theta})$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n-1} r_j \epsilon_j e^{i \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \epsilon_j}\right) E(e^{i\nu_n \epsilon_n}) E(e^{i\tau\Theta})$$

$$= -i \sum_{j=1}^{n-1} r_j f_j'(\nu_j) \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{n-1} f_k(\nu_k) \cdot f_n(\nu_n) \cdot \varphi(\tau)$$

Ily módon (14), (17), (18) és (20) alapján kapjuk a következő relációt:

$$(21)\qquad \varphi'(\tau) \prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j) = \varphi(\tau) \sum_{j=1}^{n} u_j f_j'(\nu_j) \prod_{k \neq j} f_k(\nu_k) + \gamma \varphi'(\tau) \prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j) + \varphi(\tau) f_n(\nu_n) \sum_{j=1}^{n-1} r_j f_j'(\nu_j) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} f_k(\nu_k)$$

Mivel $\varphi(\tau) \prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j)$ folytonos a $(\nu_1, \ldots, \nu_n) = (0, \ldots, 0)$ pontban és $\varphi(0) \prod_{j=1}^{n} f_j(0) = 1$, létezik olyan ϵ-környezet, amelyben $\varphi(\tau) \prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j)$ különbözik 0-tól. (21) mindkét oldalát $\varphi(\tau) \prod_{j=1}^{n} f_j(\nu_j)$-val osztva kapjuk az

$$(1 - \gamma)\, \psi(\tau) = \sum_{j=1}^{n} u_j g_j(\nu_j) + \sum_{j=1}^{n-1} r_j g_j(\nu_j)$$

összefüggést, amiből $u_j + r_j = c_j$, $j = 1, \ldots, n-1$; $u_n = c_n$ miatt

$$(22)\qquad (1 - \gamma)\, \psi(\tau) = \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(\nu_j)$$

adódik. A (7) feltétel teljesülése esetén $\psi(t), g_j(t)$ differenciálható és

$$c_j > 0\,, \qquad 1-\gamma = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_2}{\mu_2^{(j)}}} > 0\,.$$

(22) mindkét oldalát ν_1, majd ν_j $(j = 2, \dots, n)$ szerint differenciálva

(23a) $\quad (1-\gamma)\psi'(\tau) = c_1 g_1'(\nu_1)\,,$

(23b) $\quad (1-\gamma)\psi'(\tau)(1-\lambda) = c_j g_j'(\nu_j)$-hez

jutunk. Legyen $\nu_1 = 0$, (23a)-ból következik

(24) $\quad \psi'(t) = \text{const} = -s^2 < 0$

a $t = 0$ valamilyen környezetében.

Feltesszük, hogy $1-\lambda > 0$; (23a), (23b), (24)-ből belátható, hogy

(25) $\quad g_j'(t) = \text{const} = -s_j^2 < 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n$

ha $|t|$ eléggé kicsiny.

Mivel $\varphi(0) = f_j(0) = 1$ és $\varphi'(0) = f_j'(0) = 0$, (24), (25) alapján

$$\varphi(t) = e^{-\frac{s^2}{2}t^2}$$

$$f_j(t) = e^{-\frac{s_j^2}{2}t^2}$$

a $t = 0$ egy környezetében, ahonnan adódik, hogy $\Pi(\Theta)$, $F_j(x)$ Gauss eloszlású. Ily módon igazoltuk a következő állítást:

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (1)-(2) *sémában* $n \geqslant 2$, $1-\lambda > 0$ *és teljesül a* (7) *feltétel.*

A Θ paraméter legjobb becslése akkor és csak akkor egyezik meg a legjobb lineáris becsléssel, ha $\Pi(\Theta)$ normális eloszlás és $y(j)$ Gauss folyamat.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a fenti állítás – bizonyos egyszerű feltételek teljesülése esetén – érvényben marad abban az esetben, amikor $\xi(j)$ a következő p-edrendű autoregressziós folyamat:

$$\xi(1) = \epsilon(1)$$
$$\xi(2) + a_1\xi(1) = \epsilon(2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi(p) + a_1\xi(p-1) + \ldots + a_{p-1}\xi(1) = \epsilon(p)$$
$$\xi(k) + a_1\xi(k-1) + \ldots + a_p\xi(k-p) = \epsilon(k) \qquad k = p+1, \ldots, n\,,$$

ahol $\epsilon(j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ független sorozat, $F_j(x)$ eloszlással és $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ független Θ-tól.

2. Tekintsük most az (1)-(2) sémát azzal a feltevéssel, hogy $\epsilon(j)$, $j = 1, \ldots, n$ független sorozat, azonos $F(x)$ aloszlással.
Ebben az esetben az

$$E\epsilon(j) = \mu_1\,, \qquad E\Theta = \alpha_1\,,$$
$$E[\epsilon(j) - \mu_1]^k = \mu_k\,, \qquad E(\Theta - \alpha_1)^k = \alpha_k\,, \qquad k \geqslant 2$$

jelölésekkel belátható, hogy a

(26) $$0 < \alpha_2 < \infty$$
$$0 < \mu_2 < \infty$$

feltétel teljesülése esetén Θ-nak (10) legjobb lineáris becslése a következő alakú:

(27) $$\hat{\Theta}_1 = \hat{E}(\Theta \mid H_y) = c_0 + c\sum_{j=1}^{n} y(j) + c\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j\epsilon(j)$$

ahol

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - n\alpha_2\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}{1 + n\dfrac{\alpha_2}{\mu_2}}\,, \qquad c = \frac{\dfrac{\alpha_2}{\mu_2}}{1 + n\dfrac{\alpha_2}{\mu_2}} = \frac{\alpha_2}{\mu_2 + n\alpha_2}\,,$$

és

$$\rho_1 = -(\lambda + \ldots + \lambda^{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho_{n-1} = -\lambda$$

Legyen $l = \sum_{j=1}^{n} b_j y(j)$ egy általános alakú lineáris becslés. Vizsgáljuk azt a problémát, hogy milyen esetben áll fenn a következő reláció:

$$E\left(\Theta \mid \sum_{j=1}^{n} y(j) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon(j),\ \sum_{j=1}^{n} b_j y(j)\right) = \hat{\Theta}_1 = c_0 + c\left(\sum_{j=1}^{n} y(j) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon(j)\right). \tag{28}$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $\alpha_1 = \mu_1 = 0$, ekkor $c_0 = 0$ és a (28) formula az

$$E\left(\Theta \mid \sum_{j=1}^{n} y(j) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon(j),\ \sum_{j=1}^{n} b_j y(j)\right) = c\sum_{j=1}^{n} y(j) + c\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon(j) \tag{29}$$

alakra hozható.

Tegyük most fel, hogy (29) teljesül. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} E\left[\Theta \exp i\left(t\sum_{j=1}^{n} y_j + t\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j + z\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)\right] &= E\left[\exp i\left(t\sum_{j=1}^{n} y_j + t\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + z\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right) E\left(\Theta \mid \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j,\ l\right)\right] \\ &= E\left[c\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j\right) \exp i\left(t\sum_{j=1}^{n} y_j + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + t\sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j + z\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)\right] \end{aligned} \tag{30}$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j = n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j = \beta_1 \epsilon_1 + \ldots + \beta_n \epsilon_n + (b_1 + \ldots + b_n)\Theta = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \epsilon_j + n\beta\Theta\,,$$

ahol

$$\beta_1 = b_1 + \lambda b_2 + \ldots + \lambda^{n-1} b_n$$

$$\beta_2 = b_2 + \lambda b_3 + \ldots + \lambda^{n-2} b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n = b_n\,,$$

és

$$\beta = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

(30)-ból kapjuk az

$$(31) \qquad E\left\{\Theta \exp i\left[t\left(n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\right) + z\left(n\beta\Theta + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\epsilon_j\right)\right]\right\} = E\left\{c\left(n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\right) \exp i\left[t\left(n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\right) + z\left(n\beta\Theta + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\epsilon_j\right)\right]\right\}$$

összefüggést.

Belátható, hogy egyrészt

$$(32) \qquad E\left\{\Theta \exp i\left[t\left(n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\right) + z\left(n\beta\Theta + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\epsilon_j\right)\right]\right\} = E\left[\Theta \cdot e^{i(tn+zn\beta)\Theta + i\sum_{j=1}^{n}(t+z\beta_j)\epsilon_j}\right]$$

$$= E\left[\Theta \cdot e^{i(tn+zn\beta)\Theta}\right] \cdot E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}(t+z\beta_j)\epsilon_j}\right]$$

$$= -i\varphi'(nt + n\beta z)\prod_{j=1}^{n} f(t + z\beta_j),$$

ahol $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$, $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\Theta}\, d\Pi(\Theta)$, másrészt

$$(33) \qquad E\left[c\left(n\Theta + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j\right) e^{i(nt+n\beta z)\Theta + i\sum_{j=1}^{n}(t+z\beta_j)\epsilon_j}\right] =$$

$$= E\left[cn\Theta e^{i(nt+n\beta z)\Theta}\right] E\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}(t+z\beta_j)\epsilon_j}\right] + E\left[c\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e^{i\sum_{j=1}^{n}(t+z\beta_j)\epsilon_j}\right] \cdot E\left[e^{i(nt+n\beta z)\Theta}\right]$$

$$= -icn\varphi'(nt + n\beta z)\prod_{j=1}^{n} f(t + z\beta_j) - ic \cdot \varphi(nt + n\beta z)\sum_{j=1}^{n} f'(t + \beta_j z)\prod_{k \neq j} f(t + \beta_k z)$$

Ily módon (31), (32) és (33)-ból következik

$$-i\varphi'(nt + n\beta z)\prod_{j=1}^{n} f(t + z\beta_j) = -icn\varphi'(nt + n\beta z)\prod_{j=1}^{n} f(t + z\beta_j) - ic\varphi(nt + n\beta z)\sum_{j=1}^{n} f'(t + \beta_j z)\prod_{k \neq j} f(t + \beta_k z),$$

ahonnan

$$(34) \qquad \frac{\varphi'(nt+n\beta z)}{\varphi(nt+n\beta z)}(1-cn) = c\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{f'(t+\beta_j z)}{f(t+\beta_j z)}$$

adódik, ha $|t|$ és $|z|$ eléggé kicsiny.

$\psi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$, $g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ jelölésekkel, $\frac{c}{1-nc} = \frac{\alpha_2}{\mu_2} > 0$ miatt, (34)-ből kapjuk a

$$(35) \qquad \psi(nt+n\beta z) = \frac{c}{1-nc}\sum_{j=1}^{n}{}' g(t+\beta_j z)$$

összefüggést.

Legyen $t = -\beta z$, így (35)-ből

$$(36) \qquad \sum_{j=1}^{n}{}' g(\delta_j z) = 0$$

adódik, ahol $\delta_j = \beta_j - \beta$, $|z| < \epsilon$, ϵ eléggé kicsiny.

Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő feltételek:

(37) δ_j, $j = 1, \ldots, n$,

közül létezik pontosan egy δ_k abszolút értékben legnagyobb, mondjuk δ_n, azaz

$$|\delta_n| > \max\ |\delta_1|, \ldots, |\delta_{n-1}|\ ,$$

továbbá

$$\frac{\delta_j}{\delta_n} < 0 \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

(38) $g(t)$ deriváltja az origóban folytonos (vagy ami ezzel ekvivalens, $f''(t)$ az origóban folytonos).

[3]-ban bebizonyították, hogy (37), (38) teljesülése esetén a (36) egyenletből következik, hogy $F(x)$ normális eloszlásfüggvény. Ilyen esetben (35)-ből belátható, hogy

$$\psi(t) = -q^2 t$$

alakú (q állandó), ha $|t|$ eléggé kicsiny, ami azt jelenti, hogy $\Pi(\Theta)$ normális eloszlás.

Megfordítva, $y(j)$ Gauss folyamat és $\Pi(\Theta)$ normális eloszlás esetén megmutattuk, hogy $E(\Theta|y_1, \ldots, y_n) = c\left(\sum_{j=1}^{n}{}' y_j + \sum_{j=1}^{n-1}{}' \rho_j\epsilon_j\right)$ és még inkább $E\left(\Theta|\sum_{j=1}^{n}{}' y_j + \sum_{j=1}^{n-1}{}' \rho_j\epsilon_j, l\right) =$

$$= c\left(\sum_{j=1}^{n}{}' y_j + \sum_{j=1}^{n-1}{}' \rho_j\epsilon_j\right).$$

Tehát igazoltuk a következő állítást:

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n \geq 2$ *és teljesülnek a (26), (37), (38) feltételek. Az*

$$E\left(\Theta \mid \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j ,\ \sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right) = c_0 + c\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \epsilon_j\right)$$

reláció akkor és csak akkor áll fenn, ha $y(j)$ *Gauss-folyamat és* $\Pi(\Theta)$ *normális eloszlás.*

Hálámat és köszönetemet szeretném ezúton is kifejezni Arató Mátyás professzornak a sokoldalú és nagyon értékes tanácsaiért és segítségéért.

Irodalom

[1] А.М. Каган – Ю.Н. Карпов: Байесовская постановка задачи оценивания параметра сдвига. Зап.науч. семинаров ленингр. отд.мат. ин-та АН СССР 1972, 29, 62-73.

[2] И.И. Гихман – А.В. Скороход: Введение в теорию случайных процессов, М.1965.

[3] Rao C.R.: On some characterizations of the normal law. Sankhyā, Ser. A, 29, 1(1967) 1-14.

Beérkezett: 1973. szeptember 19.

Summary

ON THE BAYES' ESTIMATOR OF LOCATION PARAMETER IN THE CASE OF GAUSSIAN PROCESS

In this paper we consider the stochastic process:

(1) $y(j) = \xi(j) + \Theta \qquad j = 1, \ldots, n,$

where $\xi(j)$ is the first order autoregressive process, and Θ is a random variable with distribution $\Pi(\Theta)$.

It is given some conditions of linearity of the Bayes' estimate of the location parameter in the case of the scheme (1).

In particular, Theorem 1 shows that with certain simple assumptions the best estimate and the best linear estimate of Θ are equivalent if and only if $\Pi(\Theta)$ is normal and the process $y(j)$ is Gaussian.

Р е з ю м е

О БАЙЕСОВСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРА СДВИГА В СЛУЧАЕ ГАУССОВКИХ ПРОЦЕССОВ

В этой работе рассматривается случайный процесс:

(1) $y(j) = \xi(j) + \Theta \qquad j = 1, \ldots, n,$

где $\xi(j)$ авторегрессионный процесс первого порядка, и Θ случайная величина с распределением $\Pi(\Theta)$.

Указаны некоторые условия линейности байесовской оценки параметра сдвига Θ в случае схемы (1).

В частности, в теореме 1 показывается, что при некоторых простых условия наилушая оценка и наилушая линейная оценка для Θ эквиваленты тогда и только тогда, когда $\Pi(\Theta)$ нормальное распределение и $y(j)$ гауссовский процесс.