MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

A KÉTLÉPCSŐS SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI PROBLÉMA EGY MEGOLDÁSI MÓDJÁRÓL

Strazicky Beáta

I.

A Dantzig és Madansky féle kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma a következő:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & \min z(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x} + E(\min \underline{q}'\underline{y} \mid T\underline{x} + M\underline{y} = \underline{\zeta}, \underline{y} \geq \underline{0}), \\ & A\underline{x} = \underline{b}, \\ & \underline{x} \geq \underline{0}, \end{aligned}$$

ahol A mxn, T m_0xn, M m_0xn_0 méretű mátrixok, $\underline{\zeta} \in R_{m_0}$ véletlen vektor, $\underline{b} \in R_m$, $\underline{c} \in R_n$, $\underline{q} \in R_{n_0}$, $\underline{x} \in R_n$, $\underline{y} \in R_{n_0}$ vektorok és E várható értéket jelöl.

A
$$\begin{aligned} & \min \underline{q}'\underline{y} \\ & M\underline{y} = \underline{\zeta} - T\underline{x} \\ & \underline{y} \geq \underline{0} \end{aligned}$$

problémát, ahol $\underline{x}$ rögzített, második lépcső problémának nevezzük.
Megengedett egy $\underline{x}$ vektor az (1) feladatban, ha $A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$ és minden lehetséges $\underline{\zeta}$ esetén a második lépcső problémának van optimális megoldása.

Tegyük fel, hogy a $\underline{\zeta}$ valószínűségi vektorváltozó véges sok lehetséges értéket vehet fel, legyenek ezek $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$, a megfelelő valószínűségek pedig $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
Ekkor a kétlépcsős probléma a következő feladattal ekvivalens:

$$\begin{aligned} & \min(\underline{c}'\underline{x} + p_1\underline{q}'\underline{y}_1 + \ldots + p_k\underline{q}'\underline{y}_k), \\ (2) \qquad & A\underline{x} = \underline{b}, \\ & T\underline{x} + M\underline{y}_1 = \underline{f}_1, \\ & T\underline{x} + \qquad M\underline{y}_2 = \underline{f}_2, \\ & \qquad \vdots \\ & T\underline{x} + \qquad\qquad M\underline{y}_k = \underline{f}_k, \\ & \underline{x} \geq \underline{0}, \underline{y}_1 \geq \underline{0}, \ldots, \underline{y}_k \geq \underline{0}. \end{aligned}$$

E lineáris programozási feladat duálisának megoldására fogunk egy módszert kidolgozni, amely a megoldást nagy k érték esetén is lehetővé teszi.

A (2) feladat duálisa a következő:

$$
\begin{aligned}
&\max(\underline{b}'\underline{u} + \underline{f}_1'\underline{v}_1 + \ldots + \underline{f}_k'\underline{v}_k)\,, \\
(3)\qquad &A'\underline{u} + T'\underline{v}_1 + \ldots + T'\underline{v}_k \leqslant \underline{c}\,, \\
&M'\underline{v}_1 \qquad\qquad \leqslant p_1\underline{q}\,, \\
&\qquad\vdots \\
&\qquad\qquad M'\underline{v}_k \leqslant p_k\underline{q}\,,
\end{aligned}
$$

Vezessük be a $\underline{w}_i = \frac{1}{p_1}\underline{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ új változókat és legyen $\underline{u} = \underline{u}^+ - \underline{u}^-$, $\underline{w}_i = \underline{w}_i^+ - \underline{w}_i^-$, $i = 1, 2, \ldots, k$, ahol $\underline{u}^+, \underline{u}^- \geqslant \underline{0}$, és $\underline{w}_i^+, \underline{w}_i^- \geqslant \underline{0}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Az $\underline{u}^+, \underline{u}^-, \underline{w}_i^+, \underline{w}_i^-$, $i = 1, 2, \ldots, k$ változókban megfogalmazott duálfeladat így a következő lesz:

$$
\begin{aligned}
&\max(p_1\underline{f}_1'\underline{w}_1^+ - p_1\underline{f}_1'\underline{w}_1^- + \ldots + p_k\underline{f}_k'\underline{w}_k^+ - p_k\underline{f}_k'\underline{w}_k^- + \underline{b}'\underline{u}^+ - \underline{b}'\underline{u}^-)\,, \\
(4)\qquad &p_1T'\underline{w}_1^+ - p_1T'\underline{w}_1^- + \ldots + p_kT'\underline{w}_k^+ - p_kT'\underline{w}_k^- + A'\underline{u}^+ - A'\underline{u}^- \leqslant \underline{c}\,, \\
&M'\underline{w}_1^+ - M'\underline{w}_1^- \qquad\qquad \leqslant \underline{q}\,, \\
&\qquad\vdots \\
&\qquad\qquad M'\underline{w}_k^+ - M'\underline{w}_k^- \qquad \leqslant \underline{q}\,, \\
&\qquad\qquad \underline{w}_i^+, \underline{w}_i^- \geqslant \underline{0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,, \ \underline{u}^+ \geqslant \underline{0}\,, \ \underline{u}^- \geqslant \underline{0}\,.
\end{aligned}
$$

A (4) feladat feltételeit slack változók bevezetésével egyenlőséggé alakítva a kapott feladat szimplex módszerrel megoldható. A megoldás azonban nagy k esetén a rendelkezésre álló szimplex algoritmusokkal nem lehetséges nagy memóriaigény és számítási idő igény miatt. Ha Bakes [2] gondolatmenetét alkalmazzuk e speciális feladatra, egy olyan bázisdekompozíciós algoritmust kapunk, amelynek felhasználása esetén a fenti problémák nem lépnek fel.

II.

Alkalmazzuk Bakes gondolatmenetét a

$$
\begin{aligned}
&\max(p_1\underline{f}_1'\underline{w}_1^+ - p_1\underline{f}_1'\underline{w}_1^- + \ldots + p_k\underline{f}_k'\underline{w}_k^+ - p_k\underline{f}_k'\underline{w}_k^- + \underline{b}'\underline{u}^+ - \underline{b}'\underline{u}^-)\,, \\
&M'\underline{w}_1^+ - M'\underline{w}_1^- + I\underline{s}_1 \qquad\qquad = \underline{q}\,, \\
&\qquad\vdots \\
&\qquad\qquad M'\underline{w}_k^+ - M'\underline{w}_k^- + I\underline{s}_k \qquad = \underline{q}\,, \\
&p_1T'\underline{w}_1^+ - p_1T'\underline{w}_1^- + \ldots + p_kT'\underline{w}_k^+ - p_kT'\underline{w}_k^- + A'\underline{u}^+ - A'\underline{u}^- + I\underline{s} = \underline{c}\,, \\
&\underline{w}_i^+, \underline{w}_i^-, \underline{s}_i \geqslant \underline{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad \underline{u}^+, \underline{u}^-, \underline{s} \geqslant \underline{0},
\end{aligned}
$$

lineáris programozási feladat megoldására, ahol I megfelelő méretű egységmátrix. Tekintsük ennek során alapfeladatnak a

$$
\begin{array}{lll}
 & \max\,(p_1 \underline{f}_1' \underline{w}_1^+ - p_1 \underline{f}_1' \underline{w}_1^- + \ldots + p_k \underline{f}_k' \underline{w}_k^+ - p_k \underline{f}_k' \underline{w}_k^-)\,, & \\
(6) & M' \underline{w}_1^+ - M' \underline{w}_1^- + I\underline{s}_1 \qquad\qquad = \underline{q}\,, & \\
 & \qquad\qquad \vdots & \\
 & \qquad\qquad\qquad M' \underline{w}_k^+ - M' \underline{w}_k^- + I\underline{s}_k = \underline{q}\,, & \\
 & \underline{w}_i^+\,,\ \underline{w}_i^-\,,\ \underline{s}_i \geqslant \underline{0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,, &
\end{array}
$$

feladatot, addicionális feltételeknek pedig a

$$
\begin{array}{ll}
(7) & p_1 T' \underline{w}_1^+ - p_1 T' \underline{w}_1^- + \ldots + p_k T' \underline{w}_k^+ - p_k T' \underline{w}_k^- + A' \underline{u}^+ - A' \underline{u}^- + I\underline{s} = \underline{c}\,, \\
 & \qquad\qquad \underline{u}^+, \underline{u}^-, \underline{s} \geqslant \underline{0}
\end{array}
$$

feltételeket.

A gondolatmenet a következő:

Megmutatjuk, hogy

a/ az (5) feladat egy megengedett bázisa speciális felépítésű,

b/ ilyen speciális felépítésű megengedett bázis esetén a megfelelő szimplex iterációhoz szükséges információk a teljes bázis-inverz ismerete nélkül, egyszerűen számíthatók,

c/ a báziscsere végezhető úgy is, hogy a bázis speciális felépítése ne változzon.

Ha a szimplex iterációk sorát egy ilyen speciális felépítésű bázis vizsgálatával kezdjük, majd minden iterációban a bázis felépítését változatlanul hagyjuk, akkor minden iteráció végezhető a fenti "egyszerű" módon. Igy a szimplex módszer egy, a problémára specializált változatát nyerjük. Megjegyzés: ugyanez a gondolata a [2], [3], [4], [5], [6] cikkekben szereplő eljárásoknak.

a/ Tegyük fel, hogy a (6) feladatnak van megengedett megoldása. Ha a (6)-nak nincs megengedett megoldása, akkor (5)-nek sincs. Legyen B (6) egy megengedett bázisa. Feltehető, hogy ez

$$
B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}
$$

felépítésű, ahol a $B_1, \ldots, B_k$ blokkokon kívül csupa nulla szerepel, B_i pedig az

$$
(8) \qquad M' \underline{w}^+ - M' \underline{w}^- + I\underline{s} = \underline{q}\,, \quad \underline{w}^+ \geqslant \underline{0}\,, \quad \underline{w}^- \geqslant \underline{0}\,, \quad \underline{s} \geqslant \underline{0}
$$

megengedett bázisa, minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén.

Nevezzük a továbbiakban az (5) illetve (6) feladat együttható mátrixának i-edik oszlopvektorát

$$(l-1)(2m_0+n_0) < i \leq l(2m_0+n_0)$$

teljesülése esetén az l-edik lépcsőfokhoz tartozónak, ahol $1 \leq l \leq k$, illetve az (5) feladat i-edik oszlopvektorát a 0-adik lépcsőfokhoz tartozónak, ha

$$K(2m_0+n_0) < i \leq K(2m_0+n_0) + 2m + n\,.$$

Előző feltevésünk megfogalmazható úgy is, hogy (6) egy megengedett bázisa olyan, hogy az i-edik lépcsőfokhoz tartozó vektorok közül tartalmaz olyanokat és csak olyanokat, melyeknek j-edik komponenseiből, ahol $(i-1)n_0 < j \leq in_0$, alkotott vektorok (8) megengedett bázisát alkotják és a vektorok sorrendje olyan, hogy ez a bázis szerepel B i-edik blokkjában.
Legyen

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ L & I^* \end{pmatrix}$$

ahol az L mátrixot a (7) együtthatómátrixának a B-beli vektorokkal azonos indexű oszlopvektorai alkotják, az I^* mátrix oszlopvektorait a következő módon választjuk:

Legyen $\underline{x}_{B1}$ a $B\underline{x}_{B1} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \vdots \\ \underline{q} \end{pmatrix}$ egyenlőségrendszer megoldásvektora, $\underline{x}_{B1} \geq \underline{0}$ mivel B megengedett bázisa (6)-nak;
és legyen $\underline{t} = L\underline{x}_{B1} - \underline{c}$. Jelölje t_i a $\underline{t}$ vektor i-edik komponensét.
Ha $t_i \geq 0$, akkor válasszuk I^* i-edik oszlopául az i-edik n-dimenziós egységvektort, ha pedig $t_i < 0$, akkor az i-edik n-dimenziós egységvektor -1 szeresét, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ha minden $t_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, akkor $\hat{B}$ (5) egy megengedett bázisa. Ha nem, akkor $\hat{B}$ az 5-ből, a $t_i < 0$ komponensekhez tartozó

$$\begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{e}_i \end{pmatrix},$$

$\underline{0} \epsilon R_{kn_0}$ vektorokkal bővített feladat egy megengedett bázisa. Ha van ilyen komponens, akkor eljárásunk során $\hat{B}$-ból kiindulva egy első fázisnak megfelelő célfüggvényt kell először maximalizálnunk.

Tegyük fel, hogy a szimplex iteráció során vizsgálandó megengedett bázis

(9) $$\hat{B} = \begin{pmatrix} B & Y \\ L & Z \end{pmatrix}$$

felépítésű, ahol B (6) egy bázisa, ezért feltehetően

$$(9a) \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}$$

felépítésű. Feltevésünk mindenesetre az első iterációban az előzőek miatt teljesül, mégpedig $Y = 0$ és $Z = I^*$. A továbbiakban:

Y a (6) együtthatómátrix $\hat{B}$-ban szereplő további oszlopvektoraiból

Z a (7), az Y-ban szereplő oszlopvektorokkal azonos indexű oszlopvektoraiból áll.

Feltesszük még, hogy Y-ban az oszlopvektorok a lépcsőfoknak megfelelő sorrendben követik egymást, eltekintve a 0. lépcsőfokhoz tartozó bázisbeli vektoroktól, melyek Y utolsó oszlopai. Mivel B bázis, $Y = BX$ alakban írható, s az oszlopok sorrendje miatt

$$(9b) \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & X_k & \end{pmatrix}$$

ahol az X mátrix valamely X_i blokkja esetleg egyetlen oszlopot sem tartalmaz. (Akkor ugyanis, ha a megfelelő lépcsőfokhoz tartozó vektorok közül csak n_0 szerepel a bázisban.)

Bontsuk B és Y particiójának megfelelően L-et és Z-t is blokkokra.

Legyen

$$L = (p_1 L_1, \dots, p_k L_k),$$
$$Z = (p_1 Z_1, \dots, p_k Z_k, Z_0)$$

ahol L_i, $(i = 1, 2, \dots, k)$ a $(T', -T', 0)$ mátrix B_i bázisbeli vektorokkal azonos indexű oszlopvektorait tartalmazza, Z_i, $(i = 1, 2, \dots, k)$ pedig e mátrixnak X_i-beli vektorokkal azonos indexű vektorait tartalmazza.

Z_0 oszlopai a bázisbeli, 0-adik lépcsőfokhoz tartozó vektorokkal azonos indexű oszlopok az $(A', -A', I)$ mátrixból.

Feltevésünk szerint tehát:

$$(10) \qquad \hat{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} B_1 & & & B_1 X_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & B_k & & & B_k X_k \\ \hline p_1 L_1, & \dots, & p_k L_k & p_1 Z_1, & \dots, & p_k Z_k, Z_0 \end{array}\right)$$

felépítésű.

b/ Jelölje $\underline{\rho}$ az (5) feladat célfüggvényegyütthatóinak bázisbeli komponenseiből álló vektort. Bontsuk ezt $\underline{\rho}^T = (\underline{\rho}_1^T, \underline{\rho}_2^T)$ részekre a $\hat{B}$ (9) felbontásának megfelelően. $\hat{B}$ optimális bázis, ha a

$$(11) \qquad (\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')\hat{B} = \underline{\rho}'$$

egyenlőségrendszer $(\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')$ megoldására, (ahol: $\underline{\pi}_1 \epsilon R_{k \cdot n_0}$, $\underline{\pi}_2 \epsilon R_n$),

$$(12) \qquad (\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2') \begin{pmatrix} M', & -M', & I, & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & M', & -M', I, & & \\ p_1T', & -p_1T', 0, & \ldots, & p_kT', & -p_kT', 0, A', -A', I \end{pmatrix} \geqslant$$

$$\geqslant (p_1\underline{f}_1', -p_1\underline{f}_1', \underline{0}', \ldots, p_k f_k', -p_k f_k', \underline{0}', \underline{b}', -\underline{b}', \underline{0}')$$

teljesül.

Határozzuk meg a $(\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')$ vektort (9) felbontás felhasználásával a következők alapján:

(11) a következő alakú:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \underline{\pi}_1' B + \underline{\pi}_2' L &= \underline{\rho}_1' \\ \underline{\pi}_1' BX + \underline{\pi}_2' Z &= \underline{\rho}_2' \end{aligned}$$

innen

$$(14) \qquad \begin{aligned} \underline{\pi}_1' BX + \underline{\pi}_2' LX &= \underline{\rho}_1' X \\ \underline{\pi}_1' BX + \underline{\pi}_2' Z &= \underline{\rho}_2' \end{aligned}$$

ebből pedig

$$\underline{\pi}_2'(LX - Z) = \underline{\rho}_1' X - \underline{\rho}_2' .$$

Az $(LX - Z)$ mátrix oszlopainak száma megegyezik sorainak számával és oszlopai lineárisan függetlenek. Tegyük fel ugyanis, hogy nem lineárisan függetlenek, azaz létezik olyan $\underline{\lambda}$, $\underline{\lambda} \neq \underline{0}$, melyre:

$$(LX - Z)\underline{\lambda} = \underline{0} .$$

Legyen $\underline{\mu} = X\underline{\lambda}$. Ekkor $(\underline{\mu}', -\underline{\lambda}')$ vektorra:

$$\begin{pmatrix} B & BX \\ L & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mu} \\ -\underline{\lambda} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

ami ellentmondás azzal, hogy $\hat{B}$ bázis. $(LX - Z)$ tehát invertálható, és így:

$$(15)\qquad \underline{\pi}_2' = (\underline{\rho}_1' X - \underline{\rho}_2')(LX - Z)^{-1}\,,$$

$$\underline{\pi}_1' = (\underline{\rho}_1' - \underline{\pi}_2' L)B^{-1}\,.$$

Ezért: $(\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')$ meghatározásához k $(n_0 \times n_0)$ méretű mátrix inverzének és egy $(n \times n)$ méretű mátrix inverzének ismerete szükséges.

Legyen $\underline{\pi}_1' = (\underline{\pi}_{11}', \ldots, \underline{\pi}_{1k}')$, $\underline{\pi}_{1i} \in R_{n_0}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ha a $(\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')$ vektorra teljesülnek a

$$(16)\qquad \underline{\pi}_{1i}' M' + p_i \underline{\pi}_2' T' = p_i \underline{f}_i'\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

$$(17)\qquad \underline{\pi}_{1i} \geqslant \underline{0}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

$$(18)\qquad \underline{\pi}_2' A' = \underline{b}'\,,$$

$$(19)\qquad \underline{\pi}_2 \geqslant \underline{0}$$

feltételek, akkor a $\hat{B}$ bázis optimális.

Egyébként:

1. ha van olyan i és j index, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m$, melyre

$$(\underline{\pi}_{1i}' M' + p_i \underline{\pi}_2' T')_j < p_i \underline{f}_{ij}$$

vagy

$$(\underline{\pi}_{1i}' M' + p_i \underline{\pi}_2' T')_j > p_i \underline{f}_{ij}$$

azaz

$$\underline{\tilde{\pi}}_{1l} = \frac{\underline{\pi}_{1l}}{p_l}\,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k$$

jelölésekkel:

$$(\underline{\pi}_2' T')_j < (\underline{f}_i^T - \underline{\tilde{\pi}}_{1i}' M')_j$$

vagy

$$(\underline{\pi}_2' T')_j > (\underline{f}_i' - \underline{\tilde{\pi}}_{1i} M')_j$$

akkor a bázisba vonandó vektor:

$$\begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{m}_j \\ \underline{0}_2 \\ p_i \underline{t}_j \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ -\underline{m}_j \\ \underline{0}_2 \\ -p_i \underline{t}_j \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{0}_1 \epsilon R_{(i-1)n_0}$, $\underline{0}_2 \epsilon R_{(k-1)n_0}$ zéró vektor, $\underline{m}_j$ ill. $\underline{t}_j$ az M' ill. T' mátrix j-edik oszlopa.

2. ha van olyan i és j index, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n_0$ melyre: $(\underline{\pi}_{1i})_j < 0$ akkor a bevonandó vektor:

$$\begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{e}_j \\ \underline{0}_2 \end{pmatrix}$$

, ahol $\underline{0}_1 \epsilon R_{(i-1)n_0}$ és $\underline{0}_2 \epsilon R_{(k-1)n_0+n}$ zéró vektor, $\underline{e}_j \epsilon R_{n_0}$, j-edik egységvektor.

3. ha van olyan j index, $1 \leq j \leq m$, melyre $(\underline{\pi}_2' A')_j < (\underline{b})_j$ vagy $(\underline{\pi}_2' A')_j > (\underline{b})_j$ akkor a bevonandó vektor

$$\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{a}_j \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{a}_j \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{0} \epsilon R_{k \cdot n_0}$, $\underline{a}_j$ pedig A' j-edik oszlopa.

4. ha van olyan j index, $1 \leq j \leq n$ melyre: $(\underline{\pi}_2)_j < 0$, akkor a bevonandó vektor

$$\begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{e}_j \end{pmatrix}$$

, ahol $\underline{0} \epsilon R_{k \cdot n_0}$, $\underline{e}_j \epsilon R_n$: j-edik egységvektor.

Ha a bázis nem optimális, akkor a bevonandó vektor meghatározását ennek az aktuális bázisban történő előállítása, illetve az aktuális bázishoz tartozó bázismegoldás meghatározása követi.

Használjuk ennek során a következő jelöléseket:

Legyen $\underline{d}$ a bevonandó vektor előállítása az aktuális bázisban, ill. $\underline{x}_{\hat{B}}$ a megfelelő bázismegoldás.

Bontsuk fel $\underline{d}$-t és $\underline{x}_{\hat{B}}$-t a $\hat{B}$ bázis (9) felbontásának megfelelően. Legyen

$$\underline{d}' = (\underline{d}_1', \underline{d}_2') \quad \text{ill.} \quad \underline{x}_{\hat{B}}' = (\underline{x}_{\hat{B}1}', \underline{x}_{\hat{B}2}')$$

ahol tehát: $\underline{d}_1$ és $\underline{x}_{\hat{B}1} \epsilon R_{k \cdot n_0}$ és $\underline{d}_2$, $\underline{x}_{\hat{B}2} \epsilon R_n$.

Bontsuk tovább $\underline{d}_1$-et és $\underline{x}_{\hat{B}1}$-et

$$\underline{d}_1' = (\underline{d}_{11}', \ldots, \underline{d}_{1k}') \quad \text{ill.} \quad \underline{x}_{\hat{B}1}' = (\underline{x}_{\hat{B}1,1}', \ldots, \underline{x}_{\hat{B}1,k}')$$

részekre, ahol: $\underline{d}_{1i}$, $\underline{x}_{\hat{B}1,i} \epsilon R_{n_0}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, és legyen $\underline{d}_2$ ill. $\underline{x}_{\hat{B}2}$ (9b)-vel azonos módon felbontva:

$$\underline{d}_2' = (\underline{d}_{21}', \ldots, \underline{d}_{2k}', \underline{d}_{20}'), \qquad \underline{x}_{\hat{B}2}' = (\underline{x}_{\hat{B}2,1}', \ldots, \underline{x}_{\hat{B}2,k}', \underline{x}_{\hat{B}2,0}')$$

Meghatározandó tehát először az a $(\underline{d}_1', \underline{d}_2')$ melyre:

(20) $\quad B\underline{d}_1 + BX\underline{d}_2 = \underline{u}$

(21) $\quad L\underline{d}_1 + Z\underline{d}_2 = \underline{v}$

ahol $\begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix}$ a bevonandó vektor.

(20)-ból: $B(\underline{d}_1 + X\underline{d}_2) = \underline{u}$.

Legyen $\underline{d}_0 = \underline{d}_1 + X\underline{d}_2$, ekkor: $\underline{d}_0 = B^{-1}\underline{u}$ és $\underline{d}_1 = \underline{d}_0 - X\underline{d}_2 - t$ (21)-be behelyettesítve:

$$L\underline{d}_0 - LX\underline{d}_2 + Z\underline{d}_2 = \underline{v}$$

azaz:

$$\underline{d}_2 = (LX - Z)^{-1}(L\underline{d}_0 - \underline{v}) .$$

Most vizsgáljuk $\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2$ értékét a bevonandó vektor négy lehetséges típusa szerint:

1/a $\quad \underline{u}' = (\underline{0}', \ldots, \underline{0}', \underline{m}_j', \underline{0}', \ldots, \underline{0}')$, $\underline{v} = p_i \underline{t}_j$

$$\underline{d}_0 = \begin{pmatrix} B_1^{-1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & B_k^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{0}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{0}^{(i-1)} \\ \underline{m}_j \\ \underline{0}^{(i+1)} \\ \underline{0}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Legyen:

$$\underline{d}_0' = (\underline{d}_{01}', \ldots, \underline{d}_{0k}') , \quad \underline{d}_{0l} \in R_{n_0} , \quad l = 1, 2, \ldots, k .$$

$$\underline{d}_{0t} = \underline{0} \qquad t = 1, 2, \ldots, k , \quad t \neq i .$$

$$\underline{d}_{0i} = B_i^{-1} \underline{m}_j$$

$$L\underline{d}_0 = p_i L_i B_i^{-1} \underline{m}_j$$

$$L\underline{d}_0 - \underline{v} = p_i (L_i B_i^{-1} \underline{m}_j - \underline{t}_j)$$

$$\underline{d}_2 = p_i (LX - Z)^{-1} (L_i B_i^{-1} \underline{m}_j - \underline{t}_j) ,$$

$$\underline{d}_1 = \underline{d}_0 - X\underline{d}_2 .$$

1/b $\underline{u} = (\underline{0}, \ldots, \underline{0}, -\underline{m}_j, \underline{0}, \ldots, \underline{0})$, $\underline{v} = -p_i \underline{t}_j$

alapján:

$$(22) \quad \underline{d}_{0t} = \underline{0} \quad t = 1, 2, \ldots, k, \quad t \neq i,$$

$$\underline{d}_{0i} = -B_i^{-1} \underline{m}_j,$$

$$\underline{d}_2 = -p_i (LX - Z)^{-1} (L_i B_i^{-1} \underline{m}_j - \underline{t}_j),$$

$$\underline{d}_1 = \underline{d}_0 - X \underline{d}_2 .$$

2. esetben:

$$(23) \quad \underline{u}' = (\underline{0}', \ldots, \underline{0}', \underline{e}_j, \underline{0}', \ldots, \underline{0}'), \quad \underline{v} = \underline{0}$$

$$\underline{d}_{0t} = \underline{0}, \quad t = 1, 2, \ldots, k, \quad t \neq i,$$

$$\underline{d}_{0i} = B_i^{-1} \underline{e}_j,$$

$$\underline{d}_2 = p_i (LX - Z)^{-1} L_i B_i^{-1} \underline{e}_j,$$

$$\underline{d}_1 = \underline{d}_0 - X \underline{d}_2, \quad \underline{d}_{1t} = \underline{d}_{0t} - X_t \underline{d}_{2t}, \quad t = 1, 2, \ldots, k .$$

3. esetben: a) $\underline{u} = \underline{0}$, $\underline{v} = \underline{a}_j$

$$(24) \quad \underline{d}_0 = \underline{0}$$

$$\underline{d}_2 = -(LX - Z)^{-1} \underline{a}_j$$

$$\underline{d}_1 = X(LX - Z)^{-1} \underline{a}_j$$

$$\underline{d}_{1t} = X_t \underline{d}_{2t}, \quad t = 1, 2, \ldots, k .$$

b) $\underline{u} = \underline{0}$, $\underline{v} = -\underline{a}_j$, így $\underline{d}_1, \underline{d}_2$ az előző -1 szerese.

4. esetben:

$$\underline{u} = \underline{0}, \quad \underline{v} = \underline{e}_j$$

$$(25) \quad \underline{d}_0 = \underline{0}, \quad \underline{d}_2 = -(LX - Z)^{-1} \underline{e}_j, \quad \underline{d}_1 = X(LX - Z)^{-1} \underline{e}_j .$$

Az $(\underline{x}'_{\hat{B}1}, \underline{x}'_{\hat{B}2})$ megoldásvektor esetén: $\underline{u}' = (\underline{q}', \ldots, \underline{q}')$, $\underline{v} = \underline{c}$.

Legyen $\underline{x}_0 = \underline{x}_{\hat{B}1} + X \underline{x}_{\hat{B}2}$, $\underline{x}_0 \in R_{kn_0}$. Ekkor:

$$(26) \quad \underline{x}_0' = (\underline{x}_{01}', \ldots, \underline{x}_{0k}'), \quad \underline{x}_{0i} \in R_{n_0}, \quad i = 1, 2, \ldots, k .$$

$$\underline{x}_{0l} = B_l^{-1} \underline{q}, \quad l = 1, 2, \ldots, k .$$

$$\underline{x}_{\hat{B}2} = (LX - Z)^{-1}(L\underline{x}_0 - \underline{c}),$$

$$\underline{x}_{\hat{B}1} = \underline{x}_0 - X\underline{x}_{\hat{B}2},$$

$$L\underline{x}_0 - \underline{c} = \sum_{i=1}^{k} p_i L_i B_i^{-1}\underline{q} - \underline{c},$$

$$\underline{x}_{\hat{B}1,i} = B_i^{-1}\underline{q} - X_i\underline{x}_{\hat{B}2,i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

c/ Megmutatjuk, hogy a báziscsere végezhető úgy is, hogy a bázis felépítése ne változzék, s hogy ekkor egy-egy iteráció során a szükséges inverz-mátrixok közül legfeljebb kettő változik meg, valamely B_i^{-1} és az $(LX - Z)^{-1}$.

Vizsgáljuk a következő lehetséges eseteket:

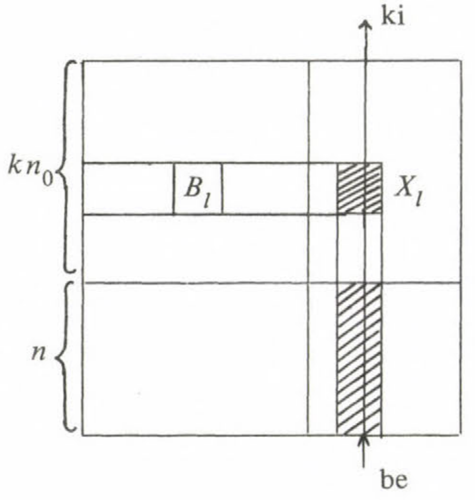
I. A bázist elhagyó vektor az együtthatómátrix l-edik lépcsőfokához tartozik, $1 \leqslant l \leqslant k$.

I/1 a bázist elhagyó vektor a bázis utolsó n oszlopvektora között szerepel.

I/2 a bázist elhagyó vektor a bázis első $k \cdot n_0$ oszlopvektora között szerepel.

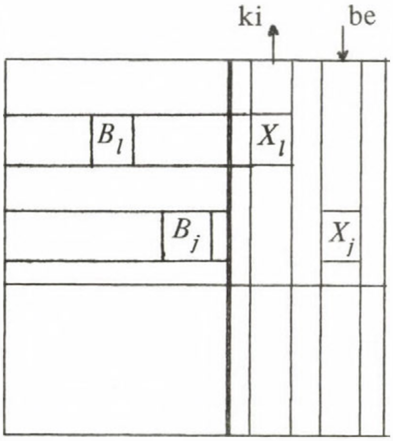
II. A bázist elhagyó vektor az együtthatómátrix 0. lépcsőfokához tartozik.

I/1 esetben:

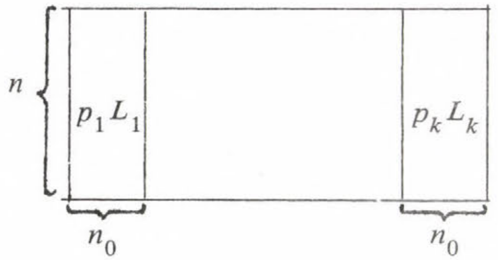


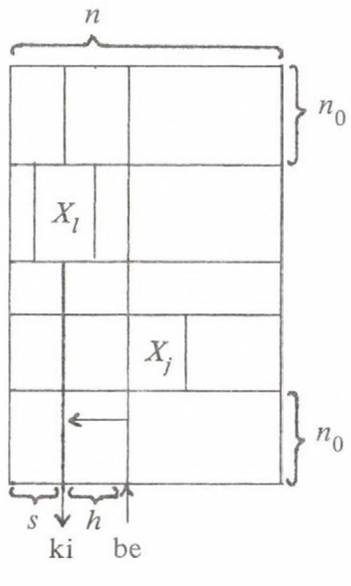
a) ha a bevonandó vektor is az l-edik lépcsőfokhoz tartozik, akkor a két vektor kicserélése a bázis felépítését nem változtatja meg. Ha a kilépő vektor az X_l blokkban az s-edik helyen szerepel, akkor a báziscserénél csak az X_l és Z_l blokkok s-edik oszlopa és ezek miatt az $(LX - Z)$ mátrix s-edik oszlopa változik meg. Mégpedig:

Ha a bevonandó vektor l-edik lépcsőfokhoz tartozó része $\underline{m}$, (7) együtthatómátrixhoz tartozó része pedig $\underline{t}$, akkor $(LX - Z)$ s-edik oszlopvektora $\underline{r} = L_l B_l^{-1}\underline{m} - \underline{t}$ lesz.



b) ha a bevonandó vektor a j-edik lépcsőfokhoz tartozik, $1 \leqslant j \leqslant k$, $j \neq l$, akkor végezzük a báziscserét úgy, hogy az X_l blokkhoz tartozó vektorok közül hagyjuk el a bázisból kilépőt, a bevonandó vekvektort pedig X_j blokkba vonjuk. Ekkor tehát az X_l blokk oszlopainak száma csökken, az X_j blokk oszlopainak száma növekszik, a bázis felépítése pedig változatlan. $(LX - Z)$ a következő módon változik:





ha a bázisból kilépő vektor az X blokk s-edik vektora, a bázisba vonandó vektor pedig az X blokk $s + h$-adik helyére kerül, akkor, ha $h > 0$ akkor:

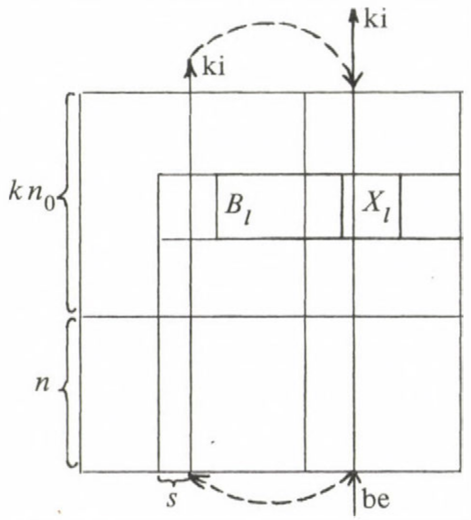
az $(LX - Z)$ első $s - 1$ oszlopa változatlan, $s + i$-edik oszlopa helyére az $(s + i + 1)$-edik oszlopvektor kerül, $i = 1, 2, \ldots, h - 1$.

$(s + h)$-adik oszlopa $\underline{r} = L_j B_j^{-1} \underline{m} - \underline{t}$ lesz, ahol $\underline{m}$ a bevonandó vektor j-edik lépcsőfokához tartozó, $\underline{t}$ pedig a (7) együtthatómátrixhoz tartozó része. $(LX - Z)$ további oszlopai nem változnak.

$h < 0$ eset hasonlóan meggondolható.

c) A bevonandó vektor a 0. lépcsőfokhoz tartozik: ha a bevonandó vektort a Z_0 blokkba vonjuk az X_l blokk elemeinek száma csökken, a Z_0 blokk elemeinek száma nő, de a bázis felépítése nem változik. Ha a bázisból kilépő vektor az X-ben az s-edik oszlopvektor, a bevonandó vektor pedig az X $s + h$-adik helyére kerül, akkor $(LX - Z)$ ugyanúgy változik, mint az előző esetben, eltekintve attól, hogy $s + h$-adik oszlopa: $-\underline{t}$ lesz.

1/2 eset: A bázist elhagyó vektor az l-edik lépcsőfokhoz tartozik és a bázisban az első $k \cdot n_0$ vektor között szerepel.



Tegyük fel, hogy a bázist elhagyó vektor a B_l blokk s-edik oszlopa. Két eset lehetséges:

a, X_l s-edik sorában van nem zéró érték

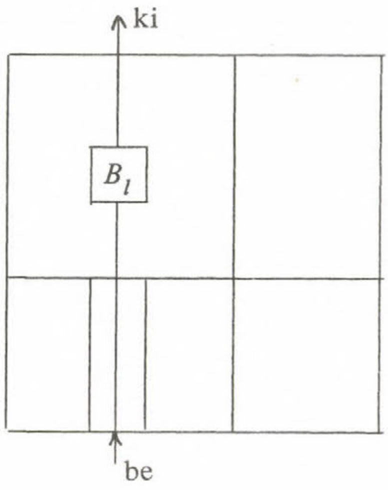
b, X_l s-edik sorában nincs nem zéró érték.

Végezzük a báziscserét az első esetben a következő módon:

Először cseréljük ki B_l s-edik oszlopvektorát X_l egy olyan vektorával, melynek s-edik komponense nem zéró.
E csere után kapott új B_l blokk ismét bázisa lesz (8)-nak, így e csere elvégzése a bázis felépítését nem módosítja.

A tulajdonképpeni báziscserét ezután már I/1 alapján végezhetjük, a bázis felépítése nem változik. A csere során a B_l, X_l, L_l, Z_l blokkok változnak a két vektor bázison belüli felcserélése miatt, majd a tulajdonképpeni báziscsere során I/1-nek megfelelően változnak a blokkok.

b. Ha X_l s-edik sorában nincs nem zéró érték, akkor a bázisba bevonandó vektor csakis az l-edik lépcsőfokhoz tartozó lehet, mégpedig olyan, hogy az l-edik lépcsőfokhoz tartozó része B_l további vektoraival (8) bázisát alkotja. [Megjegyzés (1) miatt.] Igy a két vektor felcserélése a bázis felépítését nem módosítja.



A csere során megváltozik a B_l és L_l blokk, B_l megváltozása miatt az X_l blokk, X_l és L_l megváltozása miatt az $(LX - Z)$ mátrix változik. Mégpedig:

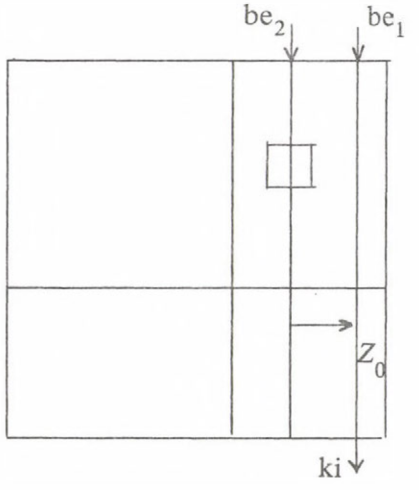
Ha E a B_l báziscsere során az inverz szorzat előállításához szükséges majdnem-egységmátrixot, F pedig az L_l s-edik oszlopának felcseréléséhez szükséges majdnem-zéró mátrixot jelöli (melynek tehát csak s-edik oszlopa nem zéró, és ennek értéke: $\underline{r} = \underline{t} - \underline{t}_0$, ahol:

$\underline{t}$ a bevonandó vektor 0-adik lépcsőfokhoz tartozó része

$\underline{t}_0$ pedig L_l s-edik oszlopa, akkor: az LX szorzatmátrix X_l-vel azonos indexű oszlopai változnak csak, az általuk alkotott blokk új értéke:

$$(L_l + F)EX_l \, .$$

II. eset. A bázist elhagyó vektor a 0. – lépcsőfokhoz tartozik.



Ha a bevonandó vektor is a 0. lépcsőfokhoz tartozik, akkor a két vektor felcserélése a bázisfelépítést nem módosítja, csak a Z_0 blokk változik.

Ha a bevonandó vektor a j-edik lépcsőfokhoz tartozik, végezzük a báziscserét úgy, hogy a bevonandó vektorral X_j elemeinek számát növeljük, Z_0-ból pedig a bázisból kilépő vektort hagyjuk el, a bázisban a két vektor között elhelyezkedő vektorok mindegyikét tegyük a bázis tőle eggyel jobbra lévő oszlopába. A bázisfelépítés nem változik, a blokkok I.1/b-hez hasonlóan módosulnak.

Megjegyzés: (1)

(5) együtthatómátrixának tetszőleges $\hat{B}$ bázisában az l-edik lépcsőfokhoz tartozó vektorok olyanok, hogy a nem-nulla komponenseikből alkotott vektorok (8) egy bázisát tartalmazzák minden $l = 1, 2, \dots, k$ esetén.

Ha ugyanis a $\hat{B}$ bázis olyan, hogy l_0-adik lépcsőfokhoz tartozó vektorai nem ilyenek, akkor jelöljék ezeket:

$$\begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{a}_{i_1} \\ \underline{0}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{a}_{i_2} \\ \underline{0}_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{a}_{i_r} \\ \underline{0}_2 \end{pmatrix},$$

ahol: $\underline{0}_1 \in R_{(l_0-1)n_0}$, $\underline{0}_2 \in R_{(k-l_0)n_0+n}$, $\underline{a}_{i_j} \in R_{n_0}$, $\underline{a}_{ij}$ (8) bizonyos együttható vektorai.

Feltevésünk szerint van olyan $\underline{a}$ vektor (8) együtthatóvektorai között, mely nem állítható elő az $\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_r}$ vektorok lineáris kombinációjaként. De akkor a

$$\begin{pmatrix} \underline{0}_1 \\ \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

vektor nem állítható elő a $\hat{B}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként, bármi legyen is a $\underline{b} \in R_{(k-l_0)n_0+n}$ vektor. Ez ellentmondás.

III.

Az (5) feladat megoldására így a következő algoritmust alkalmazhatjuk:

(1) Határozzuk meg a (8) egy B_0 megengedett bázisát, legyen a hozzátartozó bázismegoldás $\underline{x}_0$. Ha (8)-nak nincs megengedett bázisa, fejezzük be az eljárást.

(2) Definiáljuk a B_i bázisokhoz tartozó vektorok indexeinek halmazait $i = 1, 2, \dots, k$. Minden ilyen indexhalmaz tartalmazza most a B_0-beli vektorok indexeit, és

$$B_i^{-1} = B_0^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

(3) Legyen L_0 a $(T', -T', 0)$ mátrix B_0-beli vektorokkal azonos indexű vektoraiból alkotott mátrix.

$\underline{t} = L_0 \underline{x}_0 - \underline{c}$ felhasználásával határozzuk meg I^*-ot. Definiáljuk a (ρ_1', ρ_2') vektort:

ha I^* tartalmaz negytív egységvektort, akkor $\underline{\rho}_1 = \underline{0}, \underline{\rho}_2$ néhány komponense -1 és első fázisban vagyunk. Egyébként

$$\underline{\rho}_2 = \underline{0}\,, \quad \underline{\rho}_1' = (p_1 \underline{f}_{1,B_0}', \ldots, p_k \underline{f}_{k,B_0}')$$

ahol f_{i,B_0}' a $(\underline{f}_i', -\underline{f}_i', \underline{0}')$ vektor B_0-beli vektorokkal azonos indexű komponenseit tartalmazza; $i = 1, 2, \ldots, k$.

(4) $(LX - Z)^{-1} = -I^*$

(5) $\underline{\pi}_2 = \underline{\rho}_2\,, \quad \underline{\pi}_{1i} = p_i \underline{\rho}_2 L_0 B_0^{-1}$.

(6) $(\underline{\pi}_1, \underline{\pi}_2)$-vel (16), (17), (18), (19) szerint végezzünk optimalitás vizsgálatot.

Első fázis esetén:

(16)-ban $\underline{f}_i = \underline{0}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k$.

(18)-ban $\underline{b} = \underline{0}$ szerepel, és ha az optimalitás kritérium teljesül: módosítsuk $(\underline{\rho}_1', \underline{\rho}_2')$-t és folytassuk az eljárást 10-nél.

Második fázis esetén, ha az optimalitási kritérium teljesül: határozzuk meg az optimális megoldást (26) alapján és fejezzük be az eljárást.

(7) Határozzuk meg a bázisba vonandó vektor bázisbeli előállítását (22), (23), (24) illetve (25) felhasználásával. Ha $(\underline{d}_1', \underline{d}_2') \leq \underline{0}'$ fejezzük be az eljárást.

(8) (26)-tal határozzuk meg az $(\underline{x}_{B1}', \underline{x}_{B2}')$ megoldásvektort.

(9) Végezzük el a báziscserét és $(LX - Z)^{-1}$ ill. B_i^{-1}, a megfelelő indexhalmazok és $(\underline{\rho}_1', \underline{\rho}_2')$ módosítását c) alapján.

(10) Határozzuk meg $(\underline{\pi}_1', \underline{\pi}_2')$-t (15) felhasználásával.
Folytassuk az eljárást (6)-nál.

Irodalom

[1] Dantzig, G.B. and Mandasky, A: On the solution of Two-stage Linear Programs under Uncertainty, The RAND Corporation paper, P-2039, 28 July, 1960.

[2] Bakes, M.D.: Solution of Special Linear Programming Problems with Additional Constraints, Naval Research Logistics Ouartely 1970. Vol. 17. Nr.4. 411-429 p.

[3] Dantzig–Van Slyke: Generalized Upper Bounding Techniques, Journal of Computer and System Sciences, 1(1967).

[4] Hadley: Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Company

[5] Kaul, R.N.: An Extension of Generalized Upper Bounded Techniques for Linear Programming, Operation Research Center University of California 65-27.

[6] Hartmann, K.J. and Lasdon, L.S.: A Generalized Upper Bounding Method for Doubly Coupled Linear Programs.

Summary

ON AN ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF THE TWO STAGE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM

An algorithm is presented for the solution of the two stage Stochastic Programming problem, when the random variable has a finite number of possible values. In this case the problem reduces to a linear programming problem, and the dual of this is solved using the simplex algorithm. The problem has a very special form, and this gives the idea of specializing the simplex algorithm. This anables us to solve the problem even in case of a high number of values of the random vector.

Р е з ю м е

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДВУХСТЕПЕННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье излагается метод решения проблемы двухстепенчатого стохастического программирования Данцига-Маданского при условии, если вероятностный конечный ряд векторного изменения может принимать возможные величины. Процесс для эту задачу специализированный вариант симплексного метода, базовое разложение применяемое на двойное проблемы линейного программирования возникшей в этом случае.

Beérkezett: 1973. szeptember 25.