MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

A FOLYTONOS ÉS DISZKRÉT IDEJŰ STACIONÁRIUS GAUSS-MARKOV FOLYAMAT KAPCSOLATÁRÓL

Krámli András

Arató Mátyás 1969-ben – doktori disszertációjának egy eredményével kapcsolatban – megkérdezte a szerzőtől (és több más matematikustól), hogy a diszkrét és folytonos idejű stacionárius Gauss-Markov folyamat közötti kapcsolatot leíró, a spektrálsűrűség függvényekre vonatkozó analitikus összefüggés igazolható-e egyszerűen, a valószínűségszámítás nélkül is. A keresett bizonyítás a probléma pontos megfogalmazása után néhány sorban leírható:

A folytonos idejű elemi Gauss folyamatok szimulációjával és statisztikájával kapcsolatban felmerült az a kérdés, hogy a $\xi(t)$ autoregressziós folyamat diszkrét idejű megfigyeléseinek $\xi(n)$ sorozata milyen törvényszerűségeknek tesz eleget.

A megoldást az az egyszerű – Doob [2] ismert tételén alapuló – észrevétel szolgáltatta (l. Arató [1]), hogy a folytonos idejű elsőrendű autoregressziós vektorfolyamat "diszkrétizáltja" is elsőrendű autoregressziós folyamat – mert ez folytonos és diszkrét időben egyaránt szükséges és elégséges feltétele a stacionárius Gauss-Markov tulajdonságnak.

A magasabbrendű autóregressziós folyamat diszkrétizáltját ennek az észrevételnek az alapján könnyen kifejezhetjük, mert egy k dimenziós n-edrendű autoregressziós folyamat $k \cdot n = m$ dimenziós elsőrendűként fogható fel. A megfelelő diszkrét idejű folyamat általában nem tiszta autóregressziós hanem autóregressziós-mozgóátlag típusú lesz. Az autóregressziós és mozgóátlag típusú stacionárius Gauss-folyamatok a spektrál elmélet segítségével egyértelműen jellemezhetők: a spektrálsűrűségfüggvényük racionális függvénye λ-nak $(-\infty < \lambda < \infty)$ a folytonos idejű esetben ill. φ-nek $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ a diszkrét idejű esetben.
A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós esetet vizsgáljuk.

Ismeretes, hogy a spektrálelmélet alapján a $\xi(t)$ stacionárius Gauss folyamat a második momentumok szempontjából azonosítható az $e^{it\lambda}\, g(h)$ függvénnyel:

$$R(\xi(t), \xi(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} |g(\lambda)|^2 d\lambda$$

– ahol $|g(\lambda)|^2 = \tilde{g}(\lambda)$ a spektrálsűrűségfüggvény. Hasonló a $\xi(n)$ folyamat azonosítható $e^{in\varphi} f(\varphi)$-vel, ahol $|f(\varphi)|^2 = \tilde{f}(\varphi)$ a spektrálsűrűségfüggvény.

Minthogy a $\xi(t)$ és a $\xi(n)$ folyamat t egész értékeire ugyanaz és $e^{in\varphi}$ periódikus 2π periódussal, a $[0, 2\pi]$ szakaszon érvényes a következő összefüggés

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} |f(\varphi)|^2 d\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\lambda} |g(\lambda + 2k\pi)|^2 d\lambda$$

azaz – felhasználva a Fourier-sor előállítás egyértelműségét:

$$\widetilde{f}(\varphi) = |f(\varphi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(\varphi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{g}(\varphi + 2k\pi)$$

Az $\widetilde{f}(\varphi)$ ill. $\widetilde{g}(\lambda)$ függvények konkrét alakját behelyettesítve és felhasználva az ismert – Cauchytól származó – komplex függvénytani tételt (1. [3].) azonnal leolvasható, hogy a $\sum_k \widetilde{g}(z + 2k\pi)$ (z most már komplex változó) összeg az $\widetilde{f}(z)$ függvény parciális törtekre való felbontása:

$$\frac{1}{(1 - e^{a+iz})(1 - e^{a-iz})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a + i(z + 2k\pi))(a - i(z + 2k\pi))}$$

A többdimenziós esetben meromorf mátrixfüggvényekre kell megkonstruálni a parciális törtekre való felbontás analogonját, de jelen dolgozatnak csak az alapgondolat ismertetése volt a célja.

Irodalom

[1] Arató M.: Az elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái doktori disszertáció (1969)

[2] Doob J. L.: The elementary Gaussian processes, Ann. of Math. Stat. 15, 229-281.

[3] Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan, egyetemi jegyzet.

1973. október 15.

Summary

In this note there is given a simple analytic proof of a theorem due to M. Arató, which describes the connection between the continuous time parameter elementary Gaussian process and its discrete time parameter sample-process.

Р е з ю м е

В настоящем заметке дается простое аналитическое доказательство теоремы М. Арато, описывающей связь между элементарным гауссовским процессом с непрерывным временем и процессом дискретных наблюдений того же процесса.