MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

EGY GAUSS-FOLYAMAT MARKOVITÁSÁRÓL ÉS REGULARITÁSÁRÓL

Pergel József

Hannan említi [1] könyvében, hogy az

$$(1)\qquad X_n = -\rho^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-1} \epsilon_{i+n}$$

folyamat, ahol $|\rho| > 1$, ϵ_i $(i = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ független, normális valószínűségi változók sorozata 0 várható értékkel és 1 szórással, stacionárius megoldása a $\xi_n = \rho\xi_{n-1} + \epsilon_n$ autóregressziós egyenletnek, amely azonban függ az ϵ_i változókban kifejezett "jövőtől", azaz ξ_n függ $\epsilon_{n+1}, \ldots, \epsilon_{n+i}, \ldots$ változóktól, ellentétben az ilyen esetekben támasztott szemléletes követelményekkel.

Arató Mátyás vetette fel a kérdést, vajon a fenti folyamat Markov tulajdonságú és reguláris-e. Jelen megjegyzés célja annak bizonyítása, hogy a válasz mindkét kérdésre igenlő. Valójában mindkét állítás bizonyítása igen egyszerű. Ismeretes [2], hogy egy η_n stacionárius Gauss-folyamat akkor és csak akkor Markov tulajdonságú, ha korrelációs függvénye q^n alakú, ahol $|q| < 1$. A fenti X_n stacionárius Gauss folyamat korrelációs függvényét kiszámítva kapjuk, hogy $EX_{t+n}X_t = \rho^{-n}$, tehát X_n Markov tulajdonságú. Más meggondolás is erre az eredményre vezethet. Az $y_n = X_{-n}$ folyamat (X_n időbeni "megfordítottja") (1) alapján eleget tesz az

$$y_n = \rho^{-1} y_{n-1} + \rho^{-1}\epsilon_n^1$$

(ahol $\epsilon_n^1 = -\epsilon_{-n+1}$) autóregressziós egyenletnek, ahol ϵ_n^1 független $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$-tól, tehát y_n Markov tulajdonságú [2]. Másrészt az egydimenziós Gauss folyamat akkor és csak akkor Markov tulajdonságú, ha a "megfordítottja" is az, ez azonnal következik a korrelációs függvény szimmetriájából.

Ebből az is látható, hogy létezik normális eloszlású valószínűségi változók egy δ_i sorozata $(i = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ 0 várható értékkel és ρ^{-1} szórással, hogy X_n-re fennáll az

$$X_n = \rho^{-1} X_{n-1} + \delta_n$$

autóregressziós egyenlet. δ_n kifejezhető az ϵ_n változók segítségével

$$\delta_n = X_n - \rho^{-1} X_{n-1} = \rho^{-2}\epsilon_{n-1} - \frac{\rho^2 - 1}{\rho^3} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-i}\epsilon_{i+n}$$

és a δ_n változók függetlensége közvetlen számolással is verifikálható. Hasonló módon fejezhető ki ϵ_n is δ_i változók segítségével. Érvényes tehát az

$$X_n = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^{-1} \delta_{n-i}$$

előállítás, bizonyítva X_n regularitását. Ilymódon kimondhatjuk a következő állítást.

Tétel. *A*

$$\xi_n = \rho \xi_{n-1} + \epsilon_n$$

autóregressziós egyenletnek $|\rho| < 1$ *és* $|\rho| > 1$ *esetén is létezik reguláris stacionárius, Gauss megoldása mely Markov tulajdonságú.* $|\rho| < 1$ *esetén a megoldás független a "jövőtől", még* $|\rho| > 1$ *esetén a "múlttól".*

Hasonló meggondolások érvényesek több dimenziós és folytonos idejű stacionárius Gauss-Markov folyamatok esetén is. Többdimenziós esetben ismeretesek példák olyan folyamatokra, amelyek regulárisak, de "megfordítottjuk" szinguláris (lásd pl. [3]). Eredményeinkből látszik, hogy Gauss-Markov esetben ez a helyzet nem állhat elő.

Természetesen többdimenziós esetben a korrelációs függvény szimmetriáján alapuló lépés nem használható, hiszen ebben az esetben nem szimmetrikus a korrelációs függvény. Azonban a közvetlen kiszámolás itt is célravezető. Legyen tehát Q egy k dimenziós mátrix, melynek összes sajátértéke 1-nél nagyobb abszolút értékű, $\underline{\epsilon}_i$ $(i = \ldots 1, 0, 1, \ldots)$ pedig k-dimenziós azonos, normális eloszlású, független valószínűségi változók egy sorozata. Akkor az

(2) $$\underline{\eta}_n = Q\underline{\eta}_{n-1} + \underline{\epsilon}_n$$

egyenletnek megoldása lesz a

(3) $$\underline{Z}_n = -Q^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} Q^{-i} \underline{\epsilon}_{i+n}$$

k dimenziós folyamat. (A $\underline{Z}_n$ szorzatot definiáló sor konvergens négyzetes középben és 1 valószínűséggel, mert Q^{-1} sajátértékei Q sajátértékeinek reciprokai, tehát abszolút értékben 1-nél kisebbek). Közvetlen számolással adódik, hogy a

$$\underline{\nu}_n = \underline{Z}_n - \underline{Q}^{-1} \underline{Z}_{n-1} = Q^{-2} \underline{\epsilon}_{n-1} - Q^{-3}(Q^2 - I) \sum_{i=0}^{\infty} Q^{-i} \underline{\epsilon}_{n+i}$$

(ahol I az egység mátrix) sorozat korrelálatlan, tehát, normális lévén, független is. $\underline{\nu}_n$ kovariancia mátrixa

(4) $$E(\underline{\nu}_n \cdot \underline{\nu}_n^*) = Q^{-2} B_{\underline{\epsilon}}\, Q^{-2*} + H$$

alakú, ahol H eleget tesz a

(5) $$Q^{-1} H Q^{-1*} + B_{\underline{\epsilon}} = H$$

egyenletnek és $B_{\underline{\epsilon}}$ pedig $\underline{\epsilon}_n$ kovariancia-mátrixa.

Irodalom

[1] E.J. Hannan: Multiple Time Series, John Wiley and Sons New York (1971.)

[2] Arató M.: Elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái. Doktori disszertáció (1969).

[3] Ю.А. Розанов: Спектральная теория многомерных случайных процессов с дискретным временем, Усп. мат. наук том XIII. выпуск 2I80, (I958).

1973. október 26.

Summary

On the Markovity and regularity of a Gaussian process

The regularity and Markovity of the processes (1) and (3) are proved where $|\rho| > 1$, $|\lambda_i| > 1$ (λ_i are the eigenvalues of Q) Q is a $k \times k$ matrix, $\epsilon_n, \underline{\epsilon}_n$ are 1 and k-dimensional i.i.d. Gaussian random variables. Process (3) is the solution of difference equation (2).

Р е з ю м е

О РЕГУЛЯРНОСТИ И МАРКОВОСКИ НЕКОТОРЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Доказывается релугярность и марковость процессов (I) и (3), где $|\rho| > 1$, $|\lambda_i| > 1$ (λ_i – собственные значения Q), а Q – $k \times k$ матрица, ϵ_n – действительные, $\epsilon_n - k$ – мерные случайные величины с одинаковыми, нормальными распределениями. Эти процессы удовлетворяют стохастическое разностное уравнение (2) в одно и многомерном случае.