MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

AZ INPUT-OUTPUT TÁBLA ELŐREBECSLÉSÉRŐL*

Klafszky Emil

BEVEZETÉS

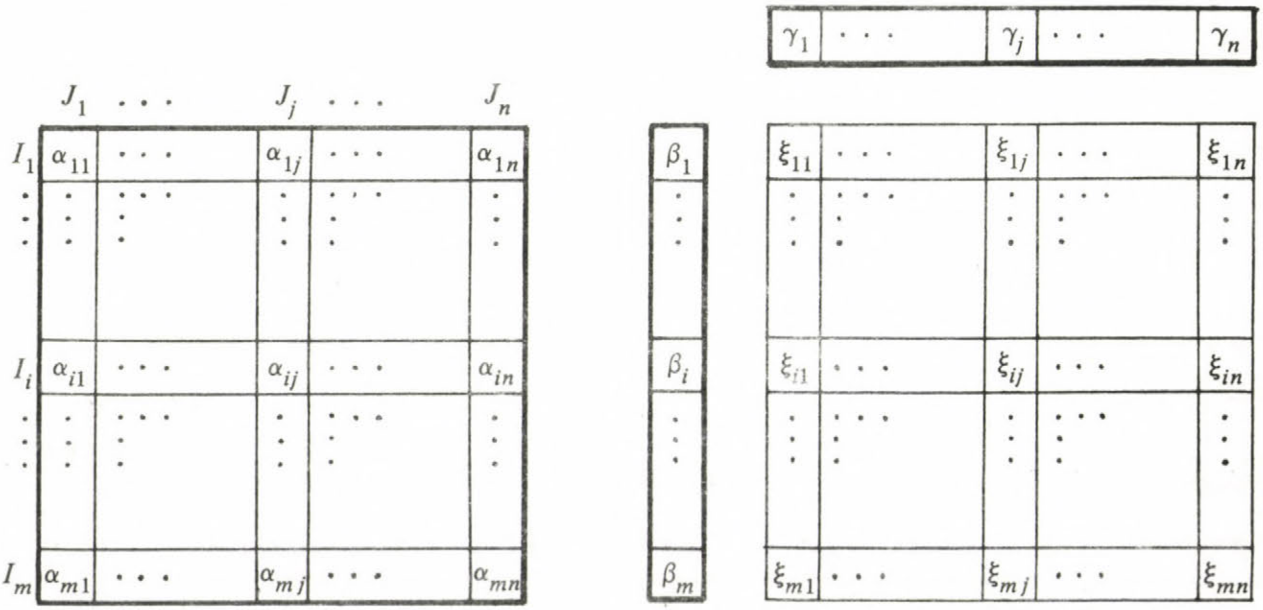
Jelöljön az $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_m$ kibocsátóhelyeket, a $J_1, J_2, \dots, J_j, \dots, J_n$ pedig fogadóhelyeket. Az $\alpha_{ij} \geqslant 0$ szám jelölje azt a mennyiséget, amely az I_i helyről a J_j helyre megy, vagy másképpen szólva, amelyet az I_i helyen termeltből a J_j hely elfogyaszt. Tömören az α_{ij} számokat az $A = (\alpha_{ij})$ mátrixba foglalhatjuk össze és ezt nevezzük *input-output táblázatnak*. A $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$ mennyiség az I_i hely teljes kibocsátása, a $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}$ mennyiség a J_j hely összes befogadása. Ezeket nevezzük az *input-output marginális értékeinek*.

A feladat az, hogy amennyiben ismerjük a jelenlegi $A = (\alpha_{ij})$ input-output mátrixot és ismerjük a megváltozott

$$b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots, \beta_m) > 0$$
$$c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n) > 0$$

marginális input és az output értékeket, akkor milyen prognózist adhatunk az új $X = (\xi_{ij})$ input-output tábláról.

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



(Jelenlegi input-output tábla) (Prognosztika az input-output táblára)

* A dolgozatot a szerző a Bólyai János Matematikai Társulat 1972-évi "Vándorgyűlésen" és az IFIP (1973. Róma) konferencián bemutatta.

1. A RAS MÓDSZER

A feladat megoldására elterjedt eljárás az úgynevezett RAS módszer* [3-11], amelyeknek a lényege a következő: olyan $\xi_{ij} \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, $\rho_i > 0, (i = 1, 2, \ldots, m)$ és $\sigma_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ számokat keresünk, melyre

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} = \beta_i, & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} = \gamma_j, & (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

és

$$(2) \quad \xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j .$$

A (2) feltevés – az, hogy ξ_{ij} értékét ilyen szorzat alakban keressük – adja az eljárás nevét. Ugyanis, ha a ρ_i számokból alkotott diagonál mátrixot R-rel, a σ_j számokból képzettet S-sel jelöljük, akkor a (2) feltétel az

$$X = RAS$$

formát ölti.

Azonnal adódik, hogy: ha az (1) (2) egyenletrendszer megoldható, akkor az (1) egyenletrendszerszernek van olyan megoldása, hogy

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_{ij} = 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} = 0, \quad \text{és} \\ \xi_{ij} > 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} > 0. \end{cases}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez a feltétel elégséges is és a ξ_{ij} megoldásra unicitást is biztosít, azaz a RAS modellre fennáll az alábbi:

1. Tétel. *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az (1) (2) rendszer megoldható legyen az, hogy az (1) rendszernek legyen (3) tipusú megoldása, és a feltétel fennállása esetén a megoldás ξ_{ij}-ben egyértelmű.*

A tételt majd a 2. fejezetben oly módon fogjuk igazolni, hogy a RAS modellt egy a szokásostól eltérő más módon, *mint egy matematikai programozási feladatot vezetjük be.*

Mielőtt azonban erre rátérnénk, a RAS modell egy fontos tulajdonságát mutatjuk meg, amely a fenti tétel következménye.

Tegyük fel, hogy az A kezdeti input-output érték valamint a b,c margiális értékek olyanok, hogy a tétel feltételét teljesítik. Ekkor a RAS módszer szerint egyértelműen adódik az új input-output X mátrix, amelyet a következőképpen jelöljük:

* A módszert az első alkalmazókról *Selejkovszkij*, illetve *Fratar* módszernek is nevezik, valamint a módszer indoklására elterjedt gravitációs elvről *Graviti* modellnek is.

$$X = \mathcal{R}(A,b,c)$$

A tétel következménye. *Legyenek* A,b,c; b^*,c^* *olyanok, hogy a tétel feltétele az* A, b,c,*-re és az* A,b^*,c^**-ra is teljesül, akkor*

$$\mathcal{R}(A,b,c) = \mathcal{R}(\mathcal{R}(A,b^*,c^*),b,c).$$

Azaz, lépésenkénti előrebecslés ugyanazt eredményezi, mint az egy lépésben történő előrebecslés.

A következmény bizonyítása. Az állítás jobb oldala az alábbi formába írható:

$$\mathcal{R}(\mathcal{R}(A,b^*,c^*),b,c) = \mathcal{R}(R^*AS^*,b,c) = R^{**}(R^*AS^*)S^{**} = (R^{**}R^*)A(S^*S^{**}).$$

A bal oldalból kapjuk, hogy

$$\mathcal{R}(A,b,c) = RAS.$$

De az *unicitás miatt*

$$RAS = (R^{**}R^*)A(S^*S^{**}). \blacksquare$$

2. A RAS MINT GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT

A továbbiakban a számolás egyszerűsítése érdekében, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1.$$

Ezenkívül feltehetjük, hogy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ és $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, mert ellenkező esetben sor illetve oszlop redukcióval a feladat ilyenné tehető.

Az előrebecslésre az alábbi *hipotézist* tesszük:

Akkor tartjuk "jónak" az $X = (\xi_{ij})$ *előrebecslést, ha – természetesen az* (1) *egyenletrendszer kielégitése mellett – az információnyereség (I-divergencia), amelyet az* X *tábla az* A *táblához képest ad, minimális, azaz, ha a*

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{4}$$

függvény értéke minimális.

A $\xi_{ij} \ln \dfrac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}}$ függvényt folytonos kiterjesztéssel a zárt pozitív ortánson értelmezzük úgy, hogy ha $\xi_{ij} = 0$, akkor $\xi_{ij} \ln \dfrac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = 0$ legyen.

A (4) függvénynek a feltételi halmazon akkor lehet csak véges infimuma, ha $\alpha_{ij} = 0$ esetén $\xi_{ij} = 0$.

Jelöljük Q-val azon (i,j) index párok (cellák) halmazát, ahol $\alpha_{ij} > 0$ azaz:

$$Q = \{(i,j) \mid \alpha_{ij} > 0\}.$$

Igy feladatunk olyan $X = (\xi_{ij})$ értékek meghatározása, melyekre:

$$\xi_{ij} \geqslant 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m\,;\; j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\xi_{ij} = 0, \quad \text{ha} \quad (i,j) \notin Q$$

$$\sum_{j \mid (i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i \mid (i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} = \gamma_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

és

$$\varphi(X) = \sum_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} \tag{6}$$

minimális.

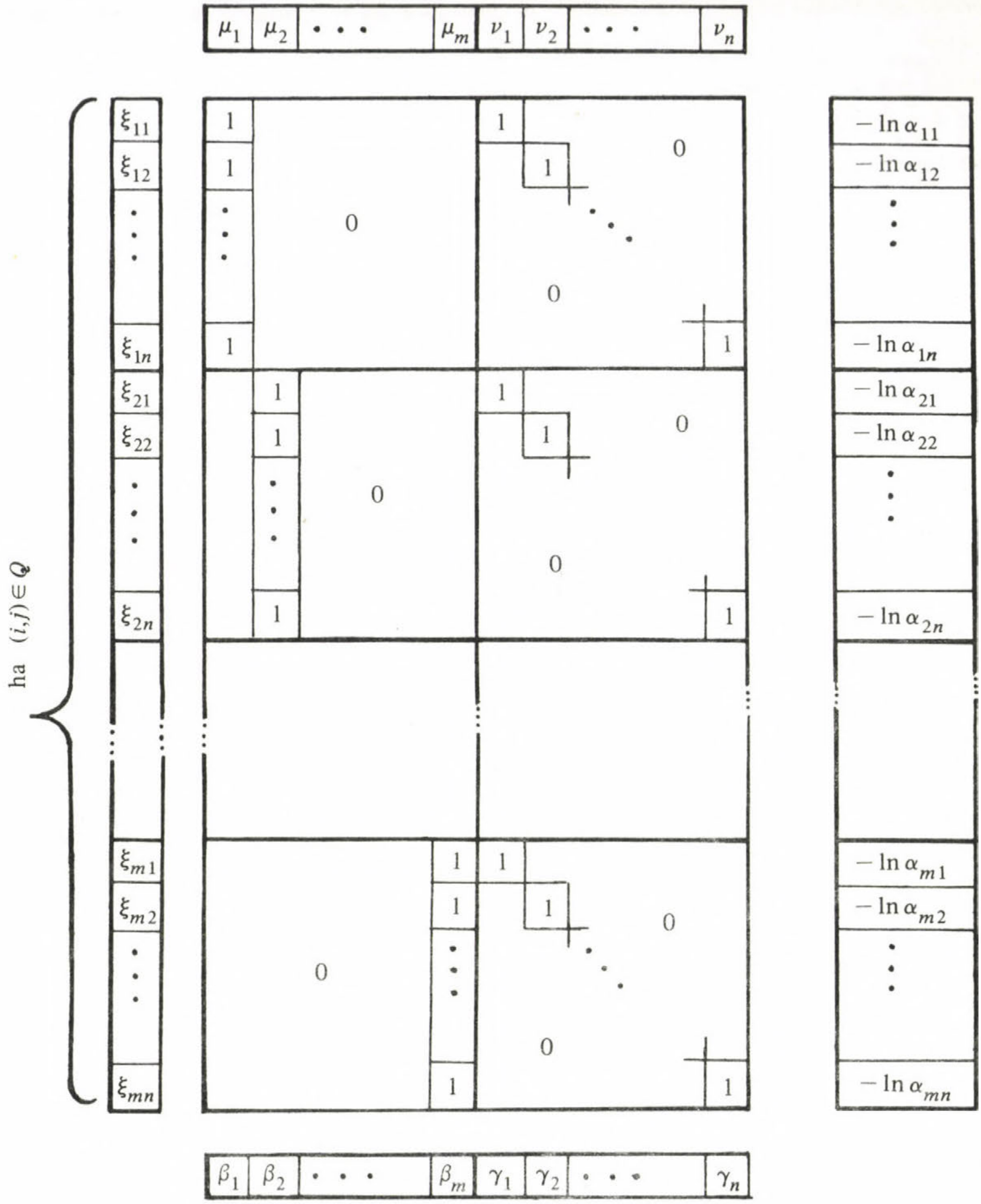
Az (5),(6) által leírt matematikai programozási feladat egy *geometriai programozási duál feladat* [1,2]. Hogy pontosabban lássuk ennek struktúráját, átírjuk a (6)-os célfüggvényt:

$$\varphi(X) = \sum_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\alpha_{ij}} = \sum_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} \ln \frac{\xi_{ij}}{\sum\limits_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij}} \cdot \frac{1}{\alpha_{ij}} = \sum_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} (-\ln \alpha_{ij}) + \tag{7}$$

$$+ \ln \frac{\prod\limits_{(i,j) \in Q} \xi_{ij}^{\xi_{ij}}}{\left(\sum\limits_{(i,j) \in Q}{}' \xi_{ij} \right)^{\sum\limits_{(i,j) \in Q} \xi_{ij}}}$$

Amennyiben az (5) által meghatározott feltételi halmaz nem üres (konzisztens a feladat), akkor a (7) célfüggvény felveszi minimumát, ugyanis a feltételi halmaz korlátos.

Irjuk fel ezen geometriai programozási duál feladat primál párját. Legyen a primál változók μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és ν_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. A feladat együtthatóit az alábbi sémán szemléltetjük:


μ_1 μ_2 . . . μ_m ν_1 ν_2 . . . ν_n
ξ_{11} ξ_{12} ξ_{1n} ξ_{21} ξ_{22} ξ_{2n} ξ_{m1} ξ_{m2} ξ_{mn}
ha $(i,j) \in Q$
$-\ln \alpha_{11}$ $-\ln \alpha_{12}$ $-\ln \alpha_{1n}$ $-\ln \alpha_{21}$ $-\ln \alpha_{22}$ $-\ln \alpha_{2n}$ $-\ln \alpha_{m1}$ $-\ln \alpha_{m2}$ $-\ln \alpha_{mn}$
β_1 β_2 . . . β_m γ_1 γ_2 . . . γ_n

A primál geometriai programozási feladat: Meghatározandó a μ_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és ν_j, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ változók értéke úgy, hogy a

$$(8) \qquad \sum_{(i,j)\in Q} e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} \leqslant 1$$

feltétel teljesüljön és a

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i\mu_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\nu_j$$

célfüggvényérték maximális legyen.

A következőkben a feladatot egyrészt a "kanonikusság" feltételezésével, majd e nélkül tárgyaljuk.

A. Tegyük fel, hogy az (5),(7) által adott geometriai programozási duál feladat *kanonikus*, azaz, hogy az (5) egyenletrendszernek van $\xi_{ij} > 0$ (ha $(i,j)\in Q$) megoldása. Ez pontosan azzal equivalens, hogy a (3) feltétel teljesül.

A geometriai programozás eredményeit használva a következő megállapításokat tehetjük:

(i) *a geometriai programozási duál feladat kanonikus, így konzisztens és mivel feltételi halmaza korlátos, ezért van a* (7)*-es célfüggvényt minimalizáló*

$$\xi_{ij}^* \quad (i = 1, 2, \ldots, m\,; j = 1, 2, \ldots, n)$$

megoldása (5)*-nek. Mivel a* (7)*-es célfüggvény szigorúan konvex, így csak egy minimumpont van.*

(ii) *A feladat kanonikus és a duál célfüggvény korlátos,* ((*i*) *miatt*) *így van a primál feladatnak optimális*

$$\mu_i^* \ (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{és} \quad \nu_j^*, \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

megoldása (*pl.* [2], 54. *old.*).

(iii) *A* μ_i, ν_j, ξ_{ij} *megoldáspár akkor és csak akkor optimális, ha*

$$e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} \sum_{(i,j)\in Q} \xi_{ij} = \xi_{ij}$$

minden $(i,j)\in Q$ *esetén* (*lásd pl.* [2] 47. *és* 59. *old.*).
Azaz

$$(10) \qquad \xi_{ij} = e^{\mu_i+\nu_j}\alpha_{ij}$$

minden $(i,j)\in Q$ *esetben.*

A fentiekből a RAS módszerrel és az *I*-divergencia minimalizálásával való előrebecslésekre az alábbi equivalenciát lehet kimondani.

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az A,b,c paraméterű előrebecslési feladat a* (3) *feltételt ("kanonikussági feltétel") teljesiti. Akkor a RAS módszerrel és az I-divergencia minimalizálásával kapott előrebecslések megegyeznek.*

Bizonyıtás. a/ Ha $X = (\xi_{ij})$ és ρ_i,σ_j RAS módszerrel kapott, akkor legyen $\mu_i = \ln \rho_i$, $\nu_j = \ln \sigma_j$. A ξ_{ij} értékek (5)-öt teljesítik. Ugyszintén a ξ_{ij},μ_i,ν_j értékek (10)-et is teljesítik. Egyszerűen adódik, hogy μ_i,ν_j (8)-at is teljesíti, ugyanis

$$\sum_{(i,j)\in Q} e^{\mu_i+\nu_j+\ln \alpha_{ij}} = \sum_{i,j} \xi_{ij} = 1.$$

Igy ξ_{ij},μ_i,ν_j optimális megoldáspár.

b/ Ha $X = (\xi_{ij})$ és μ_i,ν_j a minimalizálással kapott, akkor legyen $\rho_i = e^{\mu_i}$, $\sigma_j = e^{\nu_j}$. Mivel ezek optimális megoldáspárok, ezért (10)-et teljesítik, azaz $\xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j$. ∎

A 2. tételből az (1) *megállapitást is figyelembevéve nyilvánvalóan adódik az* 1. *tétel bizonyitása.*

B. Tegyük fel, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens.

Mielőtt ezt az esetet tárgyalnánk, megjegyezzük, hogy (5) konzisztenciájára a *König-Hall* tétel egy, számítástechnikailag is könnyen kezelhető, szükséges és elégséges feltételt ad: Jelentse Q a qualifikációt olyan értelemben, hogy I_i qualifikált J_j-hez akkor és csak akkor, ha $\alpha_{ij} > 0$. Jelöljön $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ és $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ index halmazokat. Valamely $P \subset I$ index halmazhoz a Q által kvalifikált $j \in J$ indexek halmazát jelöljük $J(P)$-vel. Ekkor az (5) konzisztenciájára szükséges és elégséges feltétel az, hogy bármely $P \subset I$ esetén a

$$\sum_{i\in P} \beta_i \leqslant \sum_{j\in J(P)} \gamma_j$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

Jelöljön $E = (e_i) = (e^{(j)}) = (\epsilon_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixot, ahol

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad \alpha_{ij} = 0. \end{cases}$$

Legyen $\|E\| = \sum_{i,j} \epsilon_{ij}$, $\|e_i\| = \sum_j \epsilon_{ij}$, $\|e^{(j)}\| = \sum_i \epsilon_{ij}$. Nyilván $\|E\| = \sum_i \|e_i\| = \sum_j \|e^{(j)}\|$.

Tekintsük a módosított A,b_ϵ,c_ϵ előrebecslési feladatot, ahol

$$(11) \qquad \begin{cases} \beta_i^{(\epsilon)} = \dfrac{\beta_i + \|e_i\|\epsilon}{1 + \|E\|\epsilon} \\[2ex] \gamma_j^{(\epsilon)} = \dfrac{\gamma_j + \|e^{(j)}\|\epsilon}{1 + \|E\|\epsilon} \end{cases}$$

és $\epsilon \geqslant 0$ tetszőleges, de rögzített szám.

Nyilvánvaló, hogy $\epsilon -$ 0 esetén $\beta_i^{(\epsilon)} \to \beta_i^{(0)}$ $(\beta_i^{(0)} \equiv \beta_i)$ és $\gamma_j^{(\epsilon)} \to \gamma_j^{(0)}$ $(\gamma_j^{(0)} \equiv \gamma_j)$.

A módosított feladat minden $\epsilon > 0$ esetén *kanonikus* és így RAS formában előállítható az optimális $\xi_{ij}^{(\epsilon)}$ megoldás. (2. tétel).

Megmutatjuk, hogy ha "kicsit" módositjuk a feladatot, akkor az optimális megoldás is kicsit módosul, azaz fennáll az alábbi:

3. Tétel. *Az optimum hely folytonosan változik, azaz ha* $\epsilon \to 0$, *akkor* $X_\epsilon^* \to X_0^*$ $(X_0^* = X^*)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k, \dots, \to 0$ sorozat, hogy $X_{\epsilon_k}^* \to \overline{X}$ és $\overline{X} \neq X_0^*$. Ekkor

(12) $\qquad \varphi(X_0^*) < \varphi(\overline{X}),$

mivel az eredeti $(\epsilon = 0)$ feladatnak csak egy minimum helye van.

A φ függvény folytonossága miatt:

$$\varphi(X_0^* + \epsilon_k E) \to \varphi(X_0^*), \qquad \text{ha} \qquad \epsilon_k \to 0,$$

és

$$\varphi(X_{\epsilon_k}^*) \to \varphi(\overline{X}), \qquad \text{ha} \qquad \epsilon_k \to 0.$$

De ekkor (12) miatt kell, hogy legyen olyan k_0 index, melyre már

(13) $\qquad \varphi(X_0^* + \epsilon_{k_0} E) < \varphi(X_{\epsilon_{k_0}}^*)$

Azonban $X_0^* + \epsilon_{k_0} E$ megengedett megoldása az ϵ_{k_0}-ás módosított feladatnak és (13) ellentétes azzal, hogy $X_{\epsilon_{k_0}}^*$ az optimális megoldás az ϵ_{k_0}-ás feladatra. ∎

A tételnek számítástechnikai jelentősége van. Ugyanis, mint említettük, a konzisztencia a Kőnig-Hall tétel feltételével egyszerűen ellenőrizhető, majd a kicsi pozitív ϵ számmal módosított feladat megoldása RAS formában kereshető.

3. ALGORITMUS

Tegyük fel, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens. Ekkor a RAS modell megoldására, az-az a

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} &= \beta_i, \qquad (i = 1, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} &= \gamma_j, \qquad (j = 1, \dots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

$$\xi_{ij} = \rho_i \alpha_{ij} \sigma_j, \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n), \qquad (2^*)$$
$$\rho_i > 0, \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$\sigma_j > 0, \quad (j = 1, \ldots, n),$$

egyenletrendszer ξ_{ij} megoldására kézenfekvő eljárás az, hogy a (2^*) kifejezést (1^*)-ba helyettesítve adódó

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\sigma_j}$$

$$\sigma_j = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i \alpha_{ij}}$$

egyenletrendszerre *iterációt* alkalmazunk:

az iteráció kezdő lépése:

$\rho_i^{(0)}$ = tetszőleges pozitív szám. (szokásos például a $\rho_i^{(0)} = 1$, $(i = 1, \ldots, m)$ illetve a $\rho_i^{(0)} = \beta_i$, $(i = 1, \ldots, m)$ választás)

az iteráció k-adik lépése:

$$\sigma_j^{(k)} = \frac{\gamma_j}{\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{(k)} \alpha_{ij}}, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\rho_i^{(k)} = \frac{\beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sigma_j^{(k-1)}}, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\xi_{ij}^{(k)} = \rho_i^{(k)} \alpha_{ij} \sigma_j^{(k)}, \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n).$$

A fenti eljárást a megoldást adó ξ_{ij} előállítására már Selejkovszkij alkalmazta a 30-as években [11]. Ugy szintén ezt az eljárást javasolják D' Esopo-Lefkowitz [12], és dolgozatunkban az eljárás gyorsaságára és konvergenciájára vonatkozóan kedvező számítástechnikai tapasztalatokról számolnak be. *Az eljárás konvergenciájának bizonyitását* azonban *csak később Bregman* [13] *adta*. Természetesen azon feltevés, hogy az (5) feltételi halmaz konzisztens, a $\rho_i^{(k)}$ és $\sigma_j^{(k)}$ konvergenciáját nem biztosítja. Azonban számos – főleg közlekedési áramlási – előrebecslési feladatnál szükséges a ρ_i, σ_j értékeknek ismerete is, ezek ugyanis közlekedési modelleknél "taszítási", illetve "vonzási" együttható szerepet töltenek be, és a kibocsátó, illetve fogadó helyekre jellemzőül szolgálnak. Ilyenkor célszerű a fenti, 2.B. alatt leírt módosítást kicsi $\epsilon > 0$ pozitív számmal elvégezni. A 3. tétel szerint ekkor a ξ_{ij} megoldás is csak kicsit tér el a ténylegestől, és ebben az esetben már módunk van a ρ_i, σ_j közelítő értékének meghatározására is.

Az elmúlt években az Intézetben több különböző megbízásként (ÉVM Pécsi Tervező Iroda, UVATERV, VÁTI, KÖTUKI) foglalkoztunk a RAS modellel, mint a közlekedési és a tömegáramlási modellek részfeladatával és a modell megoldó algoritmus gépi programjának elkészítésével.

Irodalom

[1] R.I. Duffin, – E.L. Peterson, – C. Zener "Geometric Programming", John Wiley, New York, 1966.

[2] Klafszky E., "Geometriai Programozás" MTA Számítástechnikai Központ Közlemények 8. (1972) pp. 41-65.

[3] Alan M. Voorhees, "A General Theory of Traffic Movement" Proc. Inst. Traffic Eng. (1955) pp. 46-56.

[4] Gerald A.P. Carruthers, "An Historical Review of the Gravity and Potential Concepts of Human Interaction" J. Am. Inst. of Planners 22 (1956)

[5] Fratar, Thomas J., "Vehicular Trip Distribution by Successive Approximations Traffic Ouartely pp. 53-65 (January 1954)

[6] R. Stone, – J. Bates, – M. Bacharach "A programme for Growth Input-output relationsships 1954-66" University of Cambridge, 1963.

[7] R. Stone, – A. Brown "A long term growth model for the British Economy" (Az "Europes Future in Figures" c. könyvében. Szerk: R.C. Geary)

[8] Németh S., – Pór A., "Az ÁKM koefficiens-számításainak egyik Módszeréről". Országos Tervhivatal, Budapest, 1968.

[9] Glattfelder O., – Váczi P., "Néhány megjegyzés a RAS módszer elméletéhez". II. Magyar ÁKM konferencia, Siklós 1971 okt.

[10] Г.В.Шелейховский "Транспортные основания композиции городского плана".
Гипрогор, Л., 1963.

[11] А.Г.Дынкин – Э.П.Мовчан "Методология расчета перспективных пассажиропотоков" /А "Применение матем. методов и ЭВМ в градостроительстве"
Киев, Будивельник, 1966./

[12] D.A. D'Esopo, – B. Lefkowitz, "An algorithm for computing intersonal transfers using the gravity model". Oper. Res., 1963, 11. No. 6, pp. 901-907.

[13] Л.Брэгман "Доказательство сходимости метода Г.В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями"
Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, 1967. No.1., 147-156.

Beérkezett: 1972. dec. 6.

Summary

ON THE PREDICTION OF THE INPUT-OUTPUT TABLE

In this paper we are going to show that the RAS method of prediction of the input table can be considered as a task of mathematical programming. From this fact the existence and the uniqueness of the solution of the RAS simply follow.

Резюме

О ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ТАБЛИЦЫ ВВОДА – ВЫВОДА

В этой работе мы покажем, что модель RAS, служащую для предварительной оценки таблицы ввода – вывода, можно рассматривать, как задачу математического программирования. Использование этого факта дает возможность легко получить существование и единственность решения модели RAS.