Szerkesztőség:
1061 Budapest V., Anker köz 1. I. em. 101.
Telefon: 423-943, 229-870, 229-876.
Postacím: BKL BÁNYÁSZAT Szerkesztősége
1368 Budapest, Pf.: 240

BÁNYÁSZATI ÉS KOHÁSZATI LAPOK

BÁNYÁSZAT

AZ ORSZÁGOS MAGYAR BÁNYÁSZATI ÉS KOHÁSZATI EGYESÜLET LAPJA

111. évfolyam 9. szám 1978. szeptember

Az útvonaltervezések elméleti alapjairól

Dr. h. c. dr. ZAMBÓ JÁNOS okl. bányamérnök,
Kossuth-díjas és Állami-díjas tanszékvezető egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja
(Nehézipari Műszaki Egyetem, Bányaművelléstani Tanszék, Miskolc)

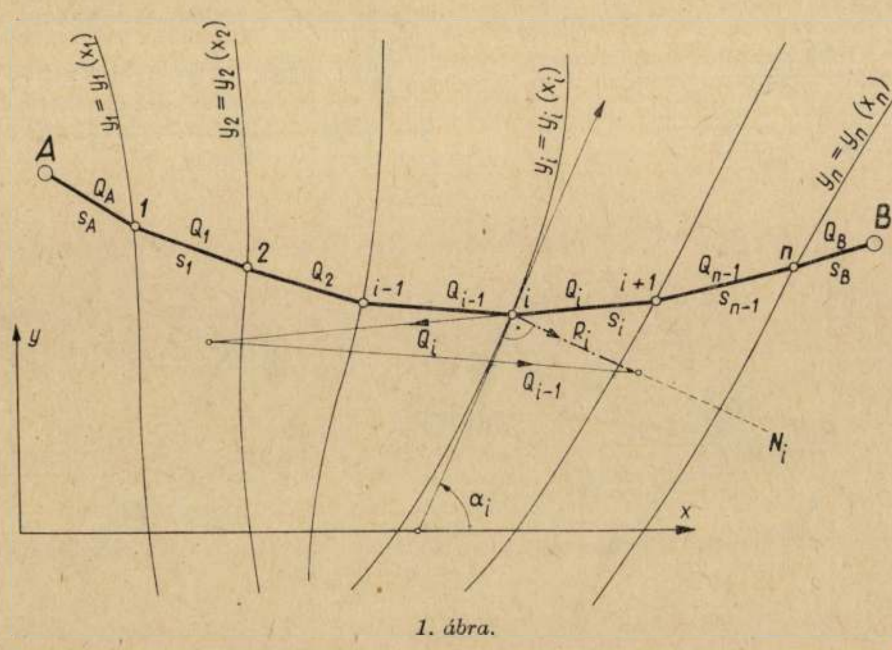
Síknak tekintett terepen két vagy több pont közé útvonalat kell fektetni, amikor a terepen egy $Q=Q(x, y)$ súlyfelület izovonalai $[y_i=y_i(x_i)]$ adottak és az izovonalak közötti sávok, területek súlyát állandónak tekintjük.

Keressük a $\Sigma Q_i s_i$ minimumát, ahol Q_i a sávhoz tartozó súlyt, s_i pedig a sávot átszelő útvonalszakasz hosszát jelenti. A szerző levezeti azokat a feltételi egyenletrendszereket, amelyek kielégítése iterációs úton elvezet a megoldáshoz.

Kiderül, dinamikus programozással való körülményes megszerkesztésnél lényegesen egyszerűbb eljáráshoz jutunk. A súlyok többféleképpen jelentkezhetnek, például származhatnak az útvonalon való végigjutás idejéből, az építési költségből stb.

Derékszögű koordináta-rendszerben legyen adva két pont (A és B) és egy görbesereg: $y_1=y_1(x_1)$, $y_2=y_2(x_2)$, ..., $y_i=y_i(x_i)$, ..., $y_n=y_n(x_n)$. Ezek a görbék egy adott felület, $Q=Q(x, y)$ izovonalai, amikor Q súlyt jelent. Fektessünk a két pont közé egy sokszögmenetet, amelynek oldalai: $s_A, s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_{n-1}, s_B$, a sarokpontok pedig: A, $1, 2, \ldots, i, \ldots, n, B$ (*1. ábra*). Az egyes oldalakhoz tartozó súlyok legyenek: $Q_A, Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_{n-1}, Q_B$, amikor az egyes súlyok azokra a mezőkre érvényesek, amelyek a görbék között találhatók. Például a Q_1 súly az $y_1=y_1(x_1)$ és $y_2=y_2(x_2)$ görbék közötti mezőre vonatkozik. Ezek szerint egy vagy két izovonal által határolt területen belül a súlyt állandónak tekintjük.

Írjuk fel a sokszögmenet oldalainak súlyozott összegét:



1. ábra.

$$S_{AB}=Q_A s_A+\sum_{i=1}^{i=n-1} Q_i s_i+Q_B s_B$$

Vizsgáljuk meg, hogy a végtelen sok sokszögmenet közül melyik jelöli ki S_{AB}-nek minimumát.

Az s oldalakat kifejezve írhatjuk:

$$S_{AB}=Q_A\sqrt{(x_1-x_A)^2+[y_1(x_1)-y_A]^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{i=n-1} Q_i\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+[y_{i+1}(x_{i+1})-y_i(x_i)]^2}+$$

$$+Q_B\sqrt{(x_B-x_n)^2+[y_B-y_n(x_n)]^2}$$

Képezzük az $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ szerinti differenciálhányadosokat és tegyük azokat nullával egyenlővé:

$$Q_A(\cos\varphi_A+\sin\varphi_A \operatorname{tg}\alpha_1)-Q_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\operatorname{tg}\alpha_1)=0$$

$$Q_1(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\operatorname{tg}\alpha_2)-Q_2(\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\operatorname{tg}\alpha_2)=0$$

$$\vdots$$

$$Q_{i-1}(\cos\varphi_{i-1}+\sin\varphi_{i-1}\operatorname{tg}\alpha_i)-Q_i(\cos\varphi_i+\sin\varphi_i\operatorname{tg}\alpha_i)=0$$

$$\vdots$$

$$Q_{n-2}(\cos\varphi_{n-2}+\sin\varphi_{n-2}\operatorname{tg}\alpha_{n-1})-Q_{n-1}(\cos\varphi_{n-1}+\sin\varphi_{n-1}\operatorname{tg}\alpha_{n-1})=0$$

$$Q_{n-1}(\cos\varphi_{n-1}+\sin\varphi_{n-1}\operatorname{tg}\alpha_n)-Q_B(\cos\varphi_B+\sin\varphi_B\operatorname{tg}\alpha_n)=0$$

ahol

$$\cos\varphi_A=\frac{x_1-x_A}{s_A}$$

$$\cos\varphi_B=\frac{x_B-x_n}{s_B}$$

$$\cos\varphi_i=\frac{x_{i+1}-x_i}{s_i}$$

$$\sin\varphi_A=\frac{y_1(x_1)-y_A}{s_A}$$

$$\sin\varphi_B=\frac{y_B-y_n(x_n)}{s_B}$$

$$\sin\varphi_i=\frac{y_{i+1}(x_{i+1})-y_i(x_i)}{s_i}$$

és α_i az $y_i=y_i(x_i)$ görbe i pontjában a görbéhez húzott érintő irányszöge.

A megfelelő goniometriai átalakítások után írható:

$$Q_A\cos(\varphi_A-\alpha_1)-Q_1\cos(\varphi_1-\alpha_1)=0$$

$$Q_1\cos(\varphi_1-\alpha_2)-Q_2\cos(\varphi_2-\alpha_2)=0$$

$$\vdots$$

$$Q_{i-1}\cos(\varphi_{i-1}-\alpha_i)-Q_i\cos(\varphi_i-\alpha_i)=0$$

$$\vdots$$

$$Q_{n-2}\cos(\varphi_{n-2}-\alpha_{n-1})-Q_{n-1}\cos(\varphi_{n-1}-\alpha_{n-1})=0$$

$$Q_{n-1}\cos(\varphi_{n-1}-\alpha_n)-Q_B\cos(\varphi_B-\alpha_n)=0$$

Az egyenletrendszer bármelyik Q-értékkel osztható, például Q_i-vel osztva:

$$\lambda_A\cos(\varphi_A-\alpha_1)-\lambda_1\cos(\varphi_1-\alpha_1)=0$$

$$\vdots$$

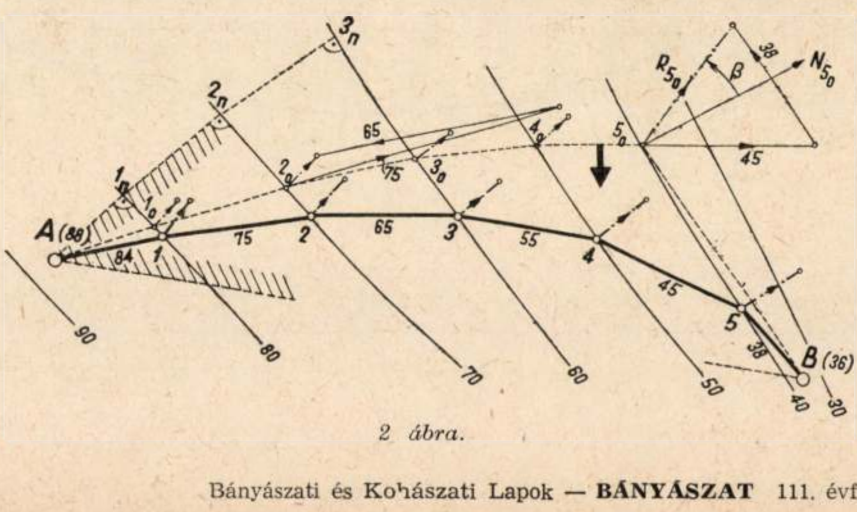
$$\lambda_{i-1}\cos(\varphi_{i-1}-\alpha_i)-\cos(\varphi_i-\alpha_i)=0$$

$$\vdots$$

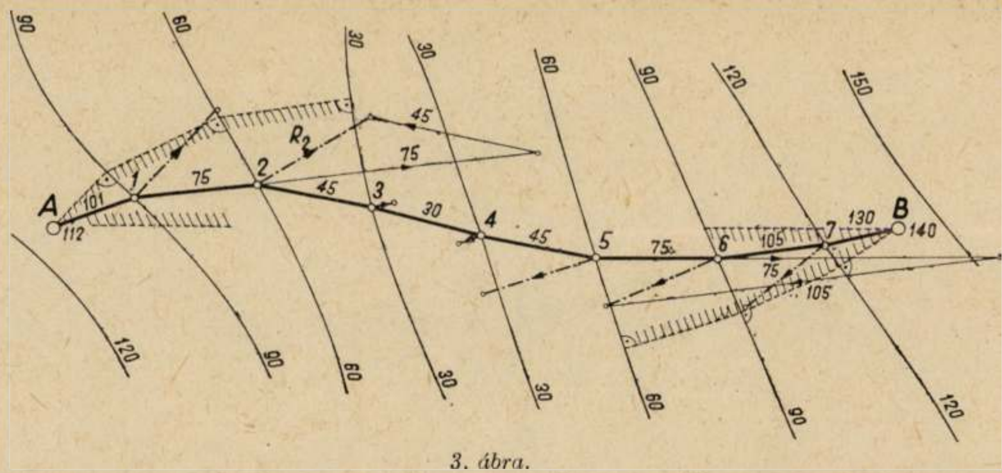
$$\lambda_{n-1}\cos(\varphi_{n-1}-\alpha_n)-\lambda_B\cos(\varphi_B-\alpha_n)=0$$

Ez az egyenletrendszer azt jelenti, hogy az A és B pontok közötti sokszögmenet akkor adja S_{AB}-nek szélső értékét, ha a sokszögmenet bármelyik sarokpontját támadó két vektor eredője a sarokponton átmenő $y=y(x)$ izovonalnak a sarokponthoz tartozó normálisába esik. Így az i sarokpontot támadó két vektor eredője, R_i az i ponthoz tartozó normálisba (N_i) esik. A két vektor skalárértéke Q_i vagy *1*, illetve Q_{i-1} vagy λ_{i-1}, irányukat az i és $i+1$, illetve az i és $i-1$ pontok adják meg, a vektorok értelme az i pont felé mutat.

A λ relatív súlyok bevezetése nem szükségszerű, a gyakorlatban az egyszerűség indokolhatja, különösen akkor, ha a súlyoknak az aránya könnyebben megadható.



2. ábra.



3. *ábra.*

Az extrém eseteket (például $\alpha_r = 90°$) nem vizsgáljuk, mert gyakorlatilag ezzel számolni nem kell, másrészt a koordináta-rendszer tetszőlegesen vehető fel.

Teljesen világos, hogy a fenti egyenletrendszert kielégítő sokszögmenet csak közelítéssel, iterációs úton határozható meg.

A *2. ábrán* rajzban adva van a két pont: A és B, valamint a súlyfelület izovonalai, az $y = y(x)$ görbék. Két izovonal közötti sáv súlyát a két izovonal súlyának átlagaként tekintjük. Ennél a viszonylag egyszerű súlyfelületnél egyszerűen belátható, hogy a keresett sokszögmenet A pontból induló szárnya a normális sokszögmenet (A, 1_n, 2_n, ...) és a két pontot összekötő egyenesszakasz közé esik. Jelölje ki az első lépés az A, 1_0, 2_0, ..., 5_0, B sokszögmenetet. Látható, hogy az R_{5_0} eredő nem esik bele az 5_0 ponthoz rendelt normálisba (N_{5_0}), attól β szöggel eltér, így a sokszögmenetet a rajzon látható irányban kell elforgatni, esetleg több lépésben addig, amíg az A, 1, 2, 3, 4, 5, B sokszögmenethez jutunk, amely a súlyozott oldalak összegének szélső értékét adja. Esetünkben egyértelműen megállapítható, hogy a szélső érték abszolút minimumot jelent. Ennek vizsgálatát minden gyakorlati esetben el kell végezni.

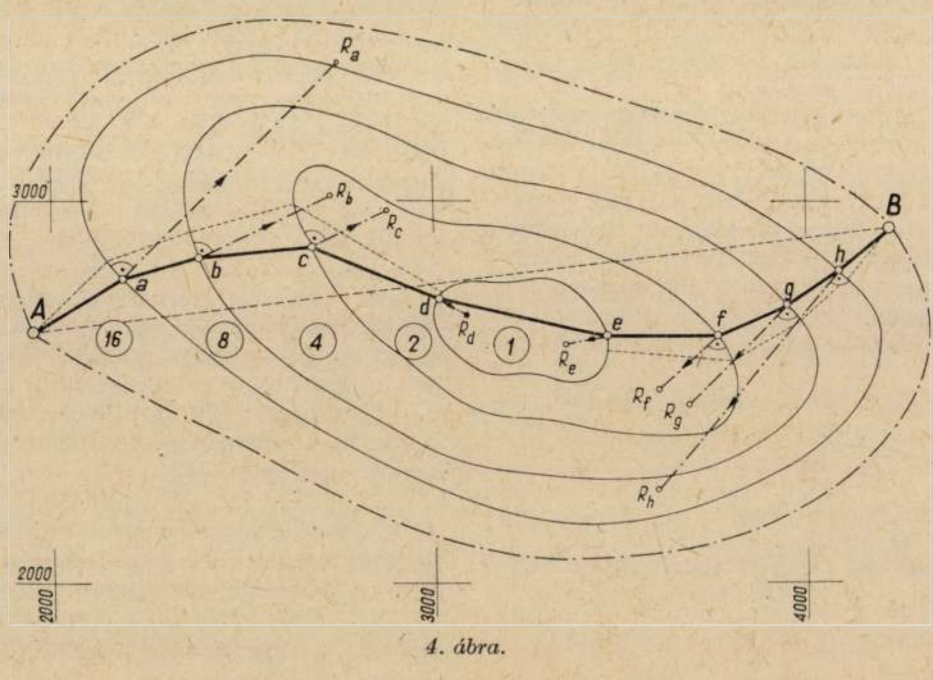
Elvileg előfordulhat ugyanis, hogy a feltételi egyenletrendszert több sokszögmenet is kielégítheti. Gyakorlatilag az ilyen eset a ritkaságok közé tartozik, de ha előfordul, az abszolút minimum kijelölése gyakorlatilag egyszerű.

Különlegességnek számít az az eset, amikor az izovonalak párhuzamosak és az AB egyenesszakaszra merőlegesek. Ebben az esetben az abszolút minimumot az AB egyenesszakasz adja meg. Ilyen azonban a gyakorlatban nincsen.

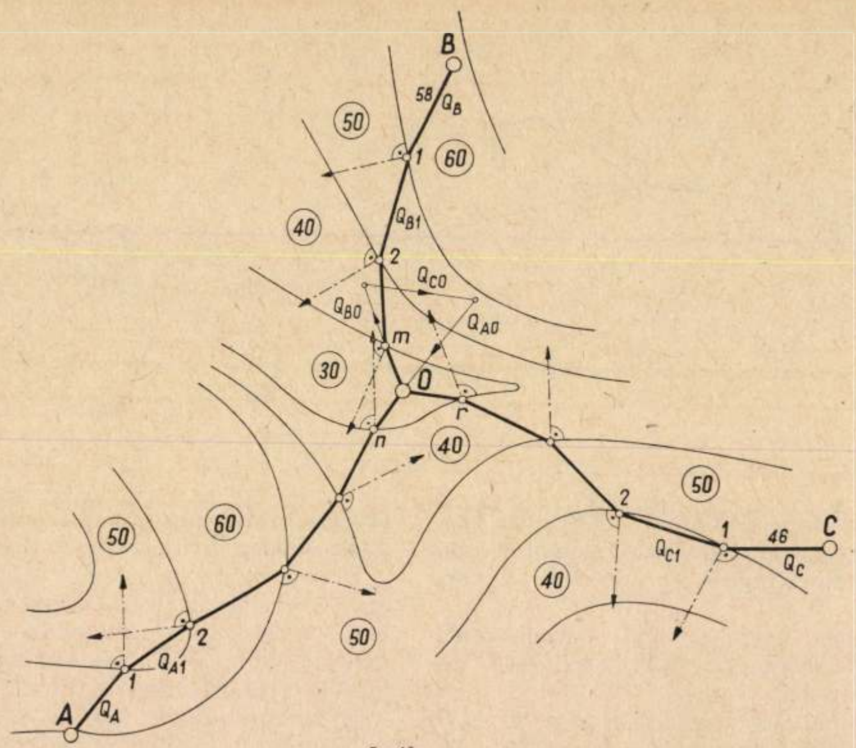
Ha az izogörbéket sűrítjük, a sokszögmenet oldalainak száma növekszik és közelít egy, az A és B pontok közé fektethető görbéhez.

A *3. ábra* viszonylag egyszerű súlyfelületet ábrázol. Mivel az izovonalak az AB egyenesszakaszra merőleges iránytól nem nagyon térnek el, azért a minimumot biztosító sokszögmenet sem lényegesen tér el az AB egyenesszakasztól.

A *4. ábra* egy gyakorlati esetet mutat be. Egy rézérces előfordulásban a bányaüzem szintmezejét ábrázolja. A két pont, A és B két függőleges akna. A két aknát szintfolyósóval kell összekötni. Az



4. *ábra.*



5. ábra.

ércesedés nem egyenletes, a mező közepe gazdagabb, így a szintfolyosó fajlagos költsége, a méterenkénti veszteség változó. Az izovonalak által határolt területeken a Cu-tartalom rendre: 4; 2; 1; 0,5; 0,25%. Ennek megfelelően a kalkulált veszteség legyen rendre: 100, 200, 400, 800, 1600 \$/m. Keresni kell azt a sokszögmenetet, amely mellett a szintfolyosó vesztesége a legkisebb.

Megfelelő iterációs eljárás után a minimumot az *A, a, b, c, d, e, f, g, h, B* sokszögmenet biztosítja. Ennek a sokszögmenetnek nem súlyozott hossza 2420 m, az *AB* egyenesszakasz hossza pedig 2300 m. Ezzel szemben a súlyozott sokszögmenet értéke $138 \cdot 10^4$ \$, az egyenes szakaszé pedig $164 \cdot 10^4$ \$, azaz a különbség $26 \cdot 10^4$ \$. Emellett előnynek kell számítani azt is, hogy a sokszögmenet jobban simul az ércesedés sűrűségéhez, mint az *AB* egyenesszakasz.

A két pont közötti súlyozott sokszögvonal esete után térjünk rá a több adott pont esetére. A könnyebb áttekintés érdekében legyen csak három adott pontunk (*5. ábra*). Keresni kell egy olyan *O* pontot, amelyet a három ponttal (*A, B, C*) súlyozott sokszögmenetek kötnek össze úgy, hogy a három sokszögmenet súlyozott oldalainak összege a legkisebb legyen.

Az előzőek alapján a feltételi egyenletrendszer felírható:

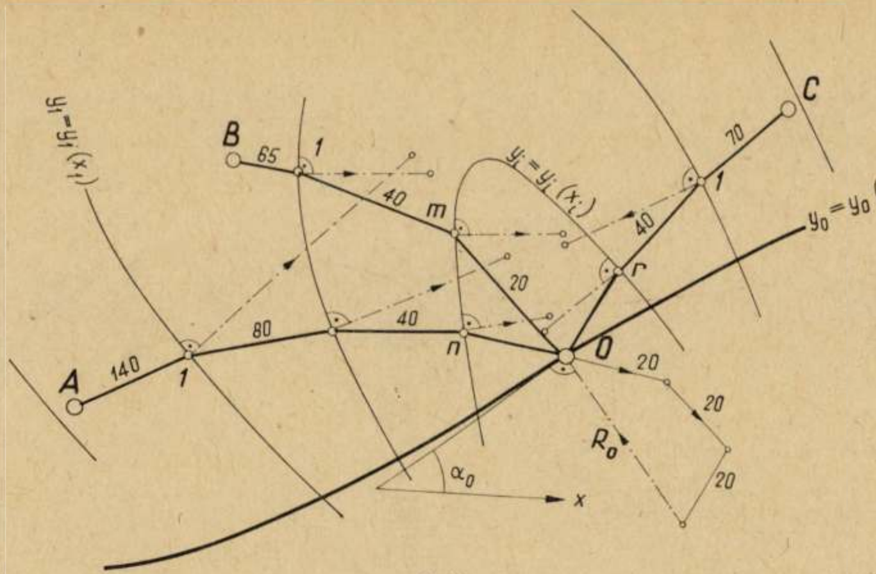
$$Q_A \cos(\varphi_A - \alpha_{A1}) - Q_{A1} \cos(\varphi_{A1} - \alpha_{A1}) = 0$$
$$Q_{A1} \cos(\varphi_{A1} - \alpha_{A2}) - Q_{A2} \cos(\varphi_{A2} - \alpha_{A2}) = 0$$
$$\vdots$$
$$Q_{A(n-1)} \cos(\varphi_{A(n-1)} - \alpha_{An}) - Q_{AO} \cos(\varphi_{AO} - \alpha_{An}) = 0$$
$$Q_B \cos(\varphi_B - \alpha_{B1}) - Q_{B1} \cos(\varphi_{B1} - \alpha_{B1}) = 0$$
$$Q_{B1} \cos(\varphi_{B1} - \alpha_{B2}) - Q_{B2} \cos(\varphi_{B2} - \alpha_{B2}) = 0$$
$$\vdots$$
$$Q_{B(m-1)} \cos(\varphi_{B(m-1)} - \alpha_{Bm}) - Q_{BO} \cos(\varphi_{BO} - \alpha_{Bm}) = 0$$
$$Q_C \cos(\varphi_C - \alpha_{C1}) - Q_{C1} \cos(\varphi_{C1} - \alpha_{C1}) = 0$$
$$Q_{C1} \cos(\varphi_{C1} - \alpha_{C2}) - Q_{C2} \cos(\varphi_{C2} - \alpha_{C2}) = 0$$
$$\vdots$$
$$Q_{C(r-1)} \cos(\varphi_{C(r-1)} - \alpha_{Cr}) - Q_{CO} \cos(\varphi_{CO} - \alpha_{Cr}) = 0$$
$$Q_{AO} \cos \varphi_{AO} + Q_{BO} \cos \varphi_{BO} + Q_{CO} \cos \varphi_{CO} = 0$$
$$Q_{AO} \sin \varphi_{AO} + Q_{BO} \sin \varphi_{BO} + Q_{CO} \sin \varphi_{CO} = 0$$

Az utóbbi két feltételi egyenlet azért alakult így, mert a keresett *O* pontot nem kötöttük hozzá egyetlen egy meghatározott izovonalhoz sem.

Az egyenletrendszerből következik: az *O* ponthoz akkor tartozik szélső érték, ha az *O* pontot közvetlenül támadó vektorok eredője zérus értékű, továbbá a sokszögmenetek sarokpontjait (*1, 2, . . . , n; 1, 2, . . . , m; 1, ,2 . . . , r*) támadó két vektor eredője az izovonalnak a ponthoz rendelt normálisába esik, amikor a vektorok skalárértékei az előzőekben foglaltaknak megfelelően rendre a súlyok, irányukat a két-két sarokpont adja meg, értelmük pedig a pont felé mutat.

A keresett *O* pont kijelölése itt is csak egymást követő lépésekkel, iterációval lehetséges. Ha elfogadjuk azt, hogy egy vagy két izovonal által határolt területen a súly állandó, akkor az *O* pontból induló három sokszögoldal ($O-n$; $O-m$; $O-r$) egymással 120°-os szöget zárhat be, de csak akkor, ha a keresett *O* pont nem esik egybe valamelyik adott ponttal.

A pontosság fokozása érdekében célszerű kellő tájékozódás után az *O* pont várható helyének környékén a rajzban adott izovonalakat sűríteni, hogy a sokszögmeneteknek utolsó oldalai (s_{AO}, s_{BO}, s_{CO}) minél rövidebbek legyenek, sőt megtehetjük azt is, hogy az iteráció során az egyes lépések



6. ábra.

O pontjain átmenő izovonalat megszerkesztjük. Erről még a későbbiek során szó lesz.

Ha az adott pontok száma háromnál több, akkor a fenti összefüggéseket értelemszerűen kell alkalmazni.

A 6. *ábra* egy újabb feladat megoldásához vezet. Legyen adva az egyszerűség kedvéért három pont (A, B, C), továbbá az izovonalak [$y_i = y_i(x_i)$]. A súlyos sokszögmenetek síkjában legyen adva egy görbe vonal (nem izovonal), amelynek egyenlete legyen $y_0 = y_0(x_0)$. Keresni kell az $y_0 = y_0(x_0)$ görbének azt az O pontját, amelyet az A, B és C pontokkal súlyozott sokszögmenet köt össze úgy, hogy a sokszögmenetek ($A, 1, \ldots, n, O$; $B, 1, \ldots, m, O$; $C, 1, \ldots, r, O$) súlyozott értéke a legkisebb legyen.

Könnyű belátni, hogy a feltételi egyenletek az n, m és r pontig ugyanazok, mint voltak akkor, amikor az O pont szabadon volt választható. Most, amikor az O pont csak az $y_0 = y_0(x_0)$ görbe pontja lehet, az utolsó feltételi egyenlet:

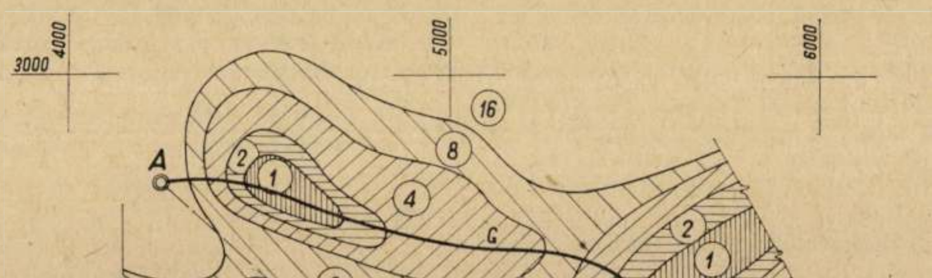
$$Q_{AO} \cos(\varphi_{AO} - \alpha_0) + Q_{BO} \cos(\varphi_{BO} - \alpha_0) + \\ + Q_{CO} \cos(\varphi_{CO} - \alpha_0) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy az O pontot közvetlenül támadó vektorrendszer eredője az $y_0 = y_0(x_0)$ adott görbének az O ponthoz rendelt normálisába esik.

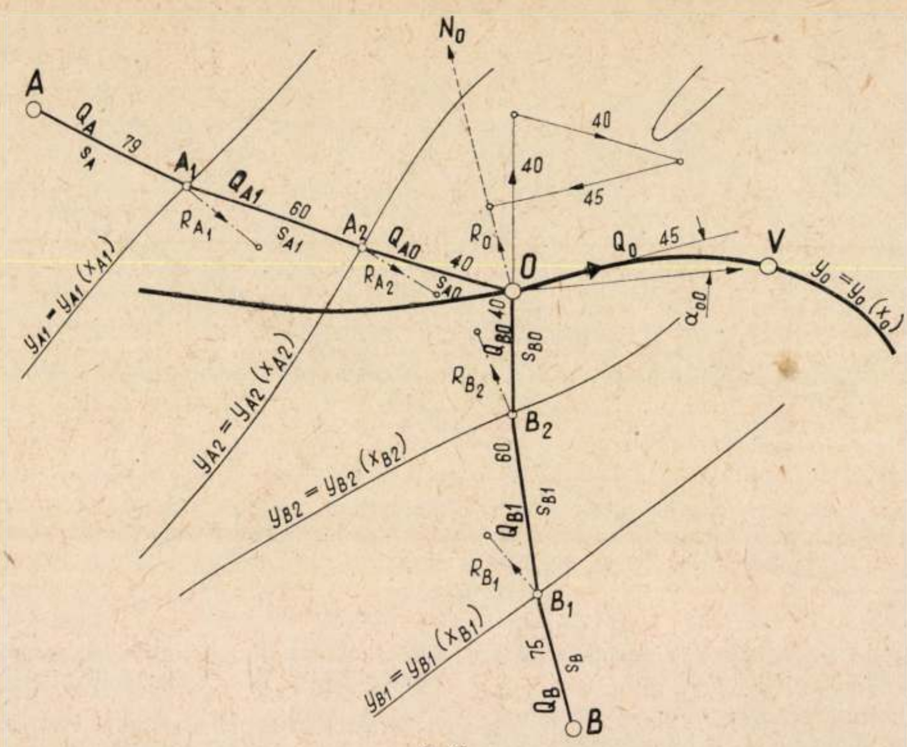
Most térjünk vissza az 5. *ábrához*. Amikor a végleges O pontot keressük, az iterációs eljárás első lépésében egy O_1 pontot veszünk fel, ehhez megszerkeszthetjük a rajta átmenő izovonalat: $y_{01} = y_{01}(x_{01})$. Az O_1 pontot akkor vettük fel jól, ha most az ott megadott utolsó két feltételi egyenlet helyébe a

$$Q_{AO_1} \cos(\varphi_{AO_1} - \alpha_{O_1}) + Q_{BO_1} \cos(\varphi_{BO_1} - \alpha_{O_1}) + \\ + Q_{CO_1} \cos(\varphi_{CO_1} - \alpha_{O_1}) = 0$$

feltételi egyenlet lép, azaz az O_1 pontot közvetlenül támadó három vektor eredője az $y_{01} =$



7. ábra.



8. ábra.

$=y_{01}(x_{01})$ izovonal O_1 pontjához rendelt normálisába esik. Természetesen az első lépésben ez általában nem következik be. A következő lépésben, illetve lépésekben ezt az eljárást ismételni kell, míg a gyakorlati igényeket kielégítő O ponthoz jutunk. Ez a módszer pontosabb megoldáshoz vezet, mint az a módszer, amelynél a keresett O pont környékén nem sűrítettük az izovonalakat. Bármelyik módszert is követjük, az iterációs eljárás körültekintést és kellő gyakorlatot kíván, szerencsére a gyakorlatban a pontosság túlzott fokozásának nincs értelme, mert a súlyozott érték (S) alig változik, ha a valódi O pont helyett egy O' pontot jelölünk ki, amikor az OO' távolság nem nagy.

A *7. ábra* egy gyakorlati esetet mutat be. A feladat hasonlít ahhoz, amelyet a *4. ábrán* láthattunk. Az A adott pontból elindulva folyosót kell kihajtani úgy, hogy a másik végpontja a B adott ponton átmenő adott E egyenes egy pontja, és a kihajtás költségvesztesége a legkisebb legyen. A meddőben hajtott folyosó költsége 1600 \$/m. Az ércesedés fokával összefüggően a folyosóhajtás fajlagos költségvesztesége csökken. Így az izovonalak megszerkeszthetők, illetve szintén adottak. Mi csak a veszteségfelező izovonalakat, illetve sávokat tüntettük fel. Így például a 4-gyel jelölt sáv azt jelenti, hogy a sávon áthaladó folyosószakaszon 400 \$/m az átlagos veszteség.

Az elméleti összefüggések ismeretében egyértelműen meg lehet állapítani, hogy a keresett G görbe merőlegesen érkezik az adott E egyenesre. A részletes szerkesztést és az ismétléseket mellőzve a minimumot biztosító G görbe az E_0 pontban éri el az E egyenest. A G görbét az izovonalak sűrítésével lehetett megközelítően előállítani.

Természetesen a veszteség teljes értéke is számítható. Ez a G görbe esetén kereken $80\cdot10^4$ \$. Ha az A és B pontot egyenessel kötjük össze, akkor teljes veszteség kereken $230\cdot10^4$ \$, a különbség tehát $150\cdot10^4$ \$.

Ahogy a *4. ábra* esetében, úgy itt is elmondható, hogy a G görbe előnye még az is, hogy jól simul az ércesedéshez.

Természetesen, ha a célszerűség úgy kívánja, a görbe szakaszosan kiegyenesíthető.

Ismerkedjünk meg még egy alapvető feladattal (*8. ábra*). Legyenek adva rajzban a súlyos felület izovonalai: $y_{A1}=y_{A1}(x_A)$, $y_{A2}=y_{A2}(x_{A2}),\ldots;y_{B1}=y_{B1}(x_{B1})$, $y_{B2}=y_{B2}(x_{B2}),\ldots$, legyen adva rajzban az alapsíkon egy $y_0=y_0(x_0)$ görbe, ezen egy pont: V, legyen adva az egyszerűség kedvéért csak két pont: A, B, és végül legyen adva az $y_0=y_0(x_0)$ görbéhez rendelt Q_0 súly.

Keresni kell az $y_0=y_0(x_0)$ görbén egy olyan O pontot, hogy

$$S=Q_As_A+Q_{A1}s_{A1}+\ldots+Q_{AO}s_{AO}+$$
$$+Q_Bs_B+Q_{B1}s_{B1}+\ldots+Q_{BO}s_{BO}+$$
$$+Q_0\widehat{OV}$$

a legkisebb legyen.

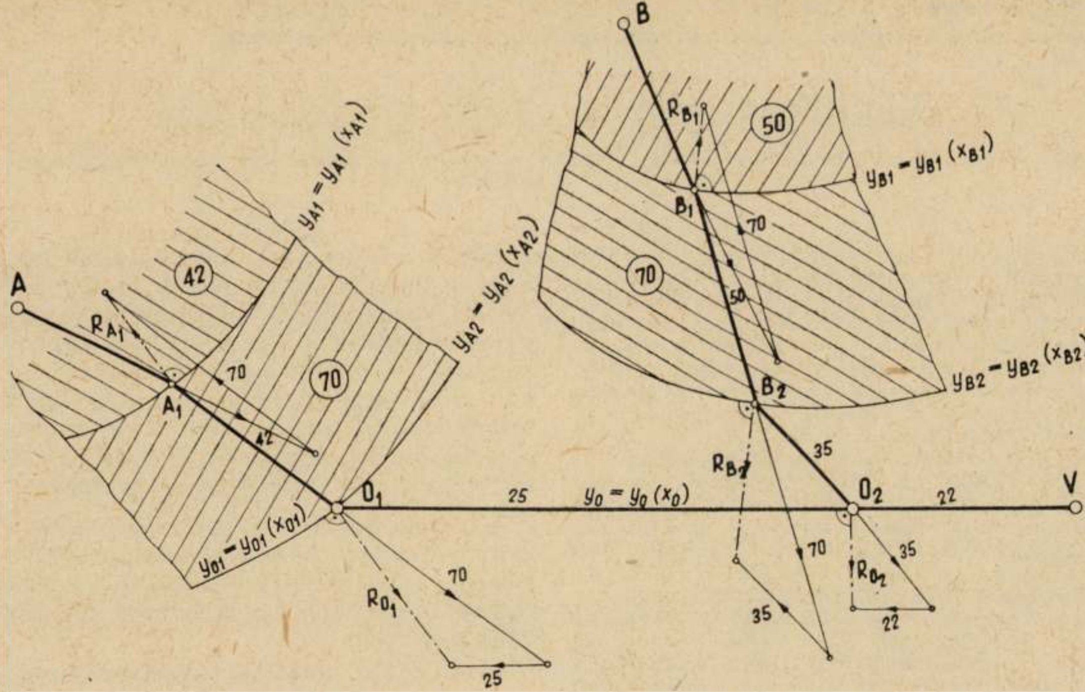
Fejezzük ki az $\widehat{OV}$ görbeszakaszt:

$$\widehat{OV}=\int_{x_0O}^{x_0V}\sqrt{1+y_0'^2}\,dx_0$$

Az s_A, $s_{A1},\ldots$, s_{AO}; s_B, $s_{B1},\ldots$, s_{BO} egyenesszakaszok az előzőkben megismert módon fejezhetők ki.

Felírva az x_{A1}, $x_{A2},\ldots$, x_{AO}; x_{B1} $x_{B2},\ldots$ x_{BO}; x_0 szerinti differenciálhányadosokat, a feltételi egyenleteink megfelelő goniometriai átalakítások után:

$$Q_A\cos(\varphi_A-\alpha_{A1})-Q_{A1}\cos(\varphi_{A1}-\alpha_{A1})=0$$



9. ábra.

$$Q_{A1}\cos(\varphi_{A_1}-\alpha_{A_2})-Q_{A2}\cos(\varphi_{A_2}-\alpha_{A_2})=0$$

.

.

.

$$Q_B\cos(\varphi_B-\alpha_{B1})-Q_{B1}\cos(\varphi_{B1}-\alpha_{B1})=0$$
$$Q_{B1}\cos(\varphi_{B1}-\alpha_{B2})-Q_{B2}\cos(\varphi_{B2}-\alpha_{B2})=0$$

.

.

.

$$Q_{AO}\cos(\varphi_{AO}-\alpha_{0O})+Q_{BO}\cos(\varphi_{BO}-\alpha_{0O})+Q_0=0$$

Az előzőek alapján ez a feltételi egyenletrendszer már könnyen értelmezhető. Külön figyelmet csak az utolsó egyenlet érdemel: az O pontot közvetlenül támadó három vektor eredője az $y_0=y_0(x_0)$ adott görbének az O ponthoz rendelt normálisába (N_0) esik, amikor a skalárértékek: Q_{AO}, Q_{BO} és Q_0. Az első két vektor iránya és értelme már ismerősen adott, az $y_0=y_0(x_0)$ görbéhez rendelt vektor iránya pedig az O ponthoz tartozó érintő, értelme a V ponttól az O pont felé mutat. A V pont helyzete tehát csak Q_0 skalárértékű vektor értelmét határozza meg, ez azt jelenti, hogy az O pontból induló félgörbén a V pont bárhol lehet.

A *8. ábra* egyben számszerű példát is bemutat. Ha az $y_0=y_0(x_0)$ görbén kívül több pont is adott $(A, B, C, D, \ldots)$, akkor az eljárást értelemszerűen kell alkalmazni.

A *9. ábra* egy egyszerű feladatot mutat be a bányászati telepítések köréből. Az adott A pontból el kell jutni föld alatti irányvágattal az $y_{A1}=y_{A1}(x_{A1})$ izovonalig, majd lejtős akna következik az $y_{A2}=y_{A2}(x_{A2})$ izovonalig, innen a külszínen az $y_0=y_0(x_0)$ egyenes pályán szállítószalag vezet az adott V pontig. Az adott pontból ugyancsak föld alatti irányvágattal jutunk el az $y_{B1}=y_{B1}(x_{B1})$ izovonalig, majd lejtős aknával az $y_{B2}=y_{B2}(x_{B2})$ izovonalig, míg a külszínen szalaggal kötünk rá az $y_0=y_0(x_0)$ egyenesre.

A feladat szerint az $y_{A2}=y_{A2}(x_{A2})$ nemcsak izovonal, hanem egyben egy adott kényszerpálya is, azaz egyben $y_{01}=y_{01}(x_{01})$. Keresni kell tehát az O_1 pontot, mint az $y_0=y_0(x_0)$ egyenes és az $y_{01}=y_{01}(x_{01})$ görbe metszéspontját, más szóval az $y_0=y_0(x_0)$ egyenes iránya előre nem rögzített. Ugyancsak keresni kell az előzőek szerint már rögzített $y_0=y_0(x_0)$ egyenesszakaszon az O_2 pontot. Az egyes súlyok rendre: $A\,A_1$ súlya 42, A_1O_1 súlya 70, O_1O_2 súlya 25, O_2V súlya 22; BB_1 súlya 50, B_1B_2 súlya 70, B_2O_2 súlya 35. A súlyok relatív súlyok. A megoldás: R_{A_1} eredő az $y_{A1}=y_{A1}(x_{A1})$ izovonal A_1 pontjához rendelt normálisba, R_{O_1} az $y_{01}=y_{01}(x_{01})$ görbe O_1 pontjához rendelt normálisba; R_{B1} az $y_{B1}=y_{B1}(x_{B1})$ izovonal B_1 pontjához rendelt normálisba; R_{B2} az $y_{B2}=y_{B2}(x_{B2})$ izovonal B_2 pontjához rendelt normálisba; és végül R_{O_2} az $y_0=y_0(x_0)$ egyenesszakasz O_2 pontjához rendelt normálisba esik.

Természetesen az ábrán látható megoldás iterációs eljárás végeredménye.

Ha a gyakorlat a minimumot biztosító megoldás helyett mást választ, akkor a százalékos növekedés könnyen megadható, amiből természetesen a költségnövekedés is számítható.

Az útvonaltervezések néhány alapvető elméleti összefüggésének megismerése nemcsak bányászati feladatok megoldásában használható fel, de mindenütt, ahol útvonalak, vezetékvonalak stb. tervezéséről van szó.