

gazdagabb szénvagyonnal rendelkező országok is igénybeveszik.

A szénbányászat részéről azért tartottam szükségesnek e kérdésekre utalni, mert nem kétséges, hogy azonos mennyiségű és minőségű szénből a felhasználás helyes, vagy helytelen mértéke szerint több, vagy kevesebb energiát lehet előállítani.

Energiagazdálkodásunk akkor szolgálja a népgazdaság érdekeit, ha a széntermelés eddigi kizárólagos mennyiségi, *extenzív* úton való növelése helyett rátér arra az *intenzív* útra, amelyet a nemesített energiahordozók termelésének széleskörű növelése jelent.

Szénbányászatunk műszaki fejlesztési alapvető feladatainak megoldásához a következetesség mellett a *szakmai színvonalnak* szakadatlan emelése is szükséges.

E feladatok megoldásából a szénbányászatban dolgozók minden egyes rétegének teljes erővel ki kell vennie részét és fokozottabban kell az üzemi párt- és szakszervezeti szervek segítségére támaszkodni. E célok a műszaki dolgozók számára különösen szép és újszerű feladatokat jelölnek meg, amelyekért a Központi Vezetőség határozata értelmében a szénbányászat összes dolgozói következetesen harcolni fognak.

A feszültségeloszlás alapösszefüggései

ZAMBÓ JÁNOS okl. bányamérnök, a műszaki tudományok doktora, egyetemi tanár

Замбо Янош, горный инженер, доктор технических наук, профессор:
ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.

Dipl. Berging. J. Zambó, Doktor der techn. Wissenschaften, Universitätsprofessor:
Die grundlegenden Zusammenhänge der Spannungsverteilung.

J. Zambó, mining eng., doctor of technical sciences, prof at the University:
Basic equations of stress-pattern.

J. Zambó, ing. des mines, docteur des sciences techniques, professeur à l'université:
Equations fondamentales de la distribution des tensions.

Boussinesq vezette le elsőnek 1885-ben a koncentrált erő hatására keletkezett feszültségeloszlás összefüggéseit. Ezeket az összefüggéseket Boussinesq-egyenleteknek is hívják. A koncentrált P erő a végtelen féltér felületén arra merőlegesen hat. A féltér anyagát súlytalanak és izotrop-rugalmasnak tételezi fel [1].

1900-ban *Michell* a matematikai rugalmasságtan szigorú alkalmazásával vezette le a végnélküli vonalterhelés összefüggéseit. Az anyagra vonatkozó feltételek megegyeznek az előbbiekkal. *Michell* összefüggéseit nem a Boussinesq-egyenletekből nyerte integrálás útján [2].

1939-ben *Ohde* kétségbevonta a *Michell*-egyenletek általános érvényességét. Nem tartja helyesnek, hogy a *Michell*-egyenletek bármilyen *Poisson*-szám mellett ugyanazon feszültségeloszlást adnak [3].

Terzaghi és *Fröhlich* és még mások is megemlítik, hogy a *Michell*-egyenletek a Boussinesq-egyenletekből levezethetők. Magát a levezetést azonban nem adják meg [4, 5].

Pöschl megadott egy feszültségfüggvényt, amelyből a Boussinesq-egyenletek nyerhetők. *Weber* kimutatta, hogy felszíni koncentrált erő és felszíni vonalas terhelés feszültségfüggvényei egymásból lezármasztathatók differenciálás, illetve integrálás útján.

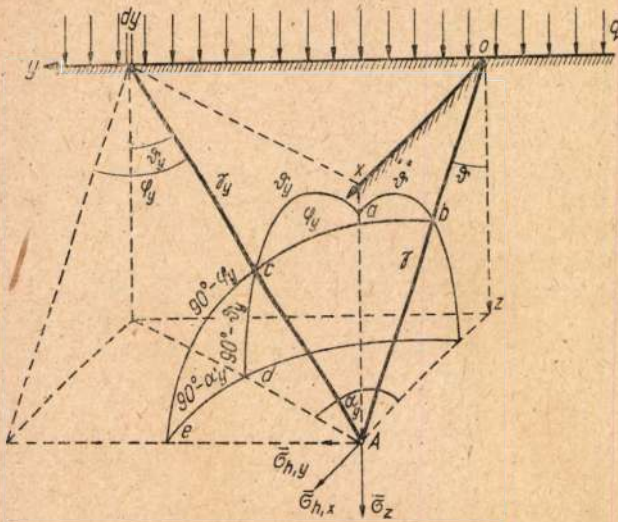
*

Rövid tanulmányunkban igazoljuk, hogy a *Michell*-egyenletek a Boussinesq-egyenletekből levezethetők egyszerűen integrálás útján. Ezt követően felhívjuk a figyelmet néhány eddig nem ismert összefüggésre. Végül rámutatunk egy látszólagos ellentmondásra, amelyet a további kutatásnak kell tisztáznia.

Mindenek előtt rá kell mutatni arra, hogy *Ohde* fejtegetései véleményem szerint azért nem érintik a *Michell*-egyenleteket, mert *Michell* egyenletei izotrop rugalmas, *Ohde* lehozott összefüggései pedig anizotrop rugalmas anyagra vonatkoznak.

Boussinesq nyomán írjuk fel az izotrop rugalmas és súlytalan végtelen féltér feszültségállapotát, ha a felszínen arra merőleges koncentrált P erő hat.

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^3 \vartheta \\ \sigma_h &= \frac{P}{2\pi r^2} \left\{ 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \frac{m-2}{m} \frac{1}{1+\cos \vartheta} \right\} \\ \sigma_t &= -\frac{m-2}{m} \frac{P}{2\pi r^2} \left\{ \cos \vartheta - \frac{1}{1+\cos \vartheta} \right\} \\ \tau &= \frac{3P}{2\pi r^2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta\end{aligned}\quad (1)$$



1. ábra

r és ϑ a végtelen térfél tetszőleges pontjának koordinátái, σ_z a vertikális, σ_h a radiális, σ_t a tangenciális normálfeszültség és végül τ a σ_z - és σ_h -hoz tartozó nyírófeszültség.

Terheljük meg a súlytalan, izotrop rugalmas térfelet a felszínen végnélküli egyenes vonalon működő q intenzitású terheléssel (1. ábra). A feltér egy A pontjában keressük a $\bar{\sigma}_z$ vertikális, $\bar{\sigma}_h$ horizontális normálfeszültségeket, valamint az ezekhez tartozó $\bar{\tau}$ nyírófeszültséget.

Az y -tengelyen ható $q dy$ terhelés koncentrált terhelésként kezelhető, tehát az (1) egyenlet-csoport alapján felírható :

$$d\bar{\sigma}_z = \frac{3q dy}{2\pi r_y^2} \cos^3 \vartheta_y$$

$$d\bar{\sigma}_{h,x} = \frac{q dy}{2\pi r_y^2} \left\{ \cos^2 \alpha_y \left(3 \cos \vartheta_y \sin^2 \vartheta_y - \frac{m-2}{m} \frac{1}{1 + \cos \vartheta_y} \right) - \sin^2 \alpha_y \frac{m-2}{m} \left(\cos \vartheta_y - \frac{1}{1 + \cos \vartheta_y} \right) \right\}$$

$$d\bar{\tau} = \frac{3q dy}{2\pi r_y^2} \cos^2 \vartheta_y \sin \vartheta_y$$

Az abc , illetőleg a cde derékszögű gömbháromszögek segítségével írhatjuk :

$$\cos \vartheta_y = \cos \vartheta \cos \varphi_y \quad \text{és} \quad \sin \vartheta_y = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi_y}$$

illetőleg

$$\sin \alpha_y = \frac{\sin \varphi_y}{\sin \vartheta_y} \tag{3}$$

Ezen két utóbbi egyenletből következik :

$$\sin^2 \alpha_y = \frac{\sin^2 \varphi_y}{1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi_y} \tag{4}$$

$$\cos^2 \alpha_y = \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi_y}{1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi_y}$$

Az ábra alapján érvényesek a következő összefüggések :

$$r_y = \frac{r}{\cos \varphi_y} \quad \text{és} \quad y = r \operatorname{tg} \varphi_y \tag{5}$$

amiből adódik, hogy

$$dy = \frac{r d\varphi}{\cos^2 \varphi} \tag{6}$$

ha φ_y helyett egyszerűen φ -t írunk.

Helyettesítsük ezen utóbbi összefüggéseket a (2) egyenletcsoportba és oldjuk meg egyenleteinket $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\sigma}_{h,x}$ és $\bar{\tau}$ -ra :

$$\bar{\sigma}_z = \frac{3q}{\pi r} \cos^3 \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$\bar{\sigma}_{h,x} = \frac{q}{\pi r} \left\{ 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi - \frac{m-2}{m} \sin^2 \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi)(1 + \cos \vartheta \cos \varphi)} - \frac{m-2}{m} \cos \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}{1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi} + \frac{m-2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi)(1 + \cos \vartheta \cos \varphi)} \right\} \tag{7}$$

$$\bar{\tau} = \frac{3q}{\pi r} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi$$

Az integrálások elvégzése után nyerjük:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_z &= \frac{2}{\pi} \frac{q}{r} \cos^3 \vartheta \\ \bar{\sigma}_{h,x} &= \frac{2}{\pi} \frac{q}{r} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \\ \bar{\tau} &= \frac{2}{\pi} \frac{q}{r} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta\end{aligned}\quad (8)$$

A (7) egyenletcsoportban a második egyenlet jobb oldalának 2—4-ik tagja együttesen 0 értéket ad. Jelöljük ezen egyenletünket az alábbiak szerint:

$$\sigma_{h,x} = \frac{q}{\pi r} \left\{ 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta I_1 - \frac{m-2}{m} (I_2 + I_3 - I_4) \right\} \quad (9)$$

Az egyes integrálértékek rendre:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{2}{3} \\ I_2 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \left(\frac{\widehat{\vartheta}}{2 \sin^2 \vartheta} - \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} - \widehat{\vartheta} \right) \\ I_3 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \left(\operatorname{ctg} \vartheta - \frac{\pi}{2} + \widehat{\vartheta} \right) \\ I_4 &= \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \left(\frac{\widehat{\vartheta}}{2 \sin^2 \vartheta} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{2} - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}\quad (10)$$

Helyettesítsük a (10) egyenletcsoportot a (9) egyenletbe. A behelyettesítés a (8) egyenletcsoport második tagjának helyességét igazolja.

Az ábra és az eddigi összefüggések alapján az y irányú szintes normálfeszültség is kifejezhető:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{h,y} &= \frac{q}{\pi r} \left\{ 3 \cos \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{m-2}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi)(1 + \cos \vartheta \cos \varphi)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m-2}{m} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \varphi d\varphi}{1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi} + \frac{m-2}{m} \sin^2 \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi)(1 + \cos \vartheta \cos \varphi)} \right\} \quad (11)\end{aligned}$$

Jelöljük egyenletünket ismét az alábbiak szerint:

$$\bar{\sigma}_{h,y} = \frac{q}{\pi r} \left\{ 3 \cos \vartheta I'_1 - \frac{m-2}{m} (I'_2 + I'_3 - I'_4) \right\} \quad (12)$$

Az egyes integrál értékek rendre:

$$\begin{aligned}I'_1 &= \frac{1}{3} \\ I'_2 &= I_4 \\ I'_3 &= \cos \vartheta - I_3 \\ I'_4 &= I_2\end{aligned}\quad (13)$$

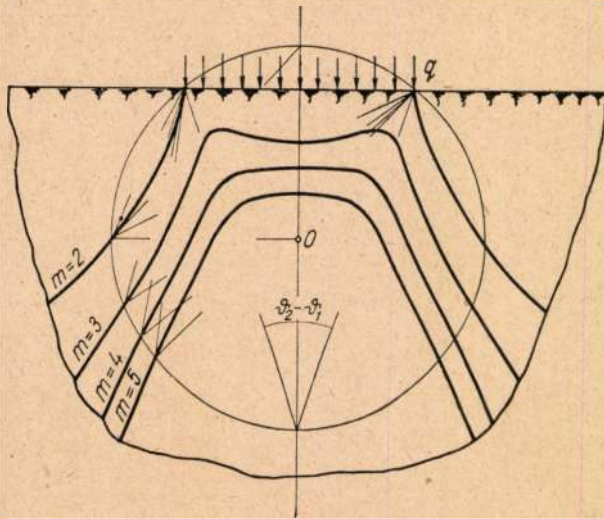
Helyettesítsük ezen egyenleteket a (12) egyenletbe:

$$\bar{\sigma}_{h,y} = \frac{q}{\pi r} \left\{ \cos \vartheta - \frac{m-2}{m} [\cos \vartheta - (I_2 + I_2 - I_4)] \right\} = \frac{2}{m} \frac{q}{\pi r} \cos \vartheta \quad (14)$$

Ez az eredmény természetesen megegyezik a rugalmasságtanból ismert tétellel:

$$\bar{\sigma}_{h,y} = \frac{1}{m} (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_{h,x}) = \frac{2}{m} \frac{q}{\pi r} \cos \vartheta \quad (15)$$

A 2. ábra alapján ismert módon térünk át a vonalterhelésről a sávterhelésre. Érvényesek az



2. ábra

alábbi összefüggések :

$$\begin{aligned} x &= z \operatorname{tg} \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \\ dx &= \frac{z d\vartheta}{\cos^2 \vartheta} \\ dx &= \frac{r d\vartheta}{\cos \vartheta} \end{aligned} \tag{16}$$

Ezek alapján :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \frac{2}{\pi} q \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{q}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2\vartheta + \widehat{\vartheta} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \\ \bar{\sigma}_{h,x} &= \frac{2}{\pi} q \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{q}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \sin 2\vartheta + \widehat{\vartheta} \right]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \\ \bar{\tau} &= \frac{2}{\pi} q \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{q}{\pi} [\sin^2 \vartheta]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \end{aligned} \tag{17}$$

Az y tengely irányában működő horizontális normálfeszültség is hasonlóan fejezhető ki :

$$\bar{\sigma}_{h,y} = \frac{2}{m} \frac{q}{\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta = \frac{2}{m} \frac{q}{\pi} (\widehat{\vartheta}_2 - \widehat{\vartheta}_1) \tag{18}$$

A megoldás helyes, mert ide vezet a rugalmasságtan ismert összefüggése is :

$$\bar{\sigma}_{h,y} = \frac{1}{m} (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_{h,x}) = \frac{2}{m} \frac{q}{\pi} (\widehat{\vartheta}_2 - \widehat{\vartheta}_1) \tag{19}$$

A (8) egyenletcsoport második egyenlete és (14) egyenlet azt mutatják, hogy általában $\bar{\sigma}_{h,x} \geq \sigma_{h,y}$. A terhelés vonalára merőleges síkban azonban vannak vonalak, amelyek pontjaiban $\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$. Ezeket a vonalakat nevezzük a horizontális normálfeszültségek izobár vonalainak. Ezek egyenlete kifejezhető a fent említett két egyenlet alapján :

$$\sin \vartheta = \frac{1}{\sqrt{m}} \tag{20}$$

Ezen egyenlet a terhelés pontján keresztülmenő egyenessereg egyenlete.

Hasonlóképpen a (17) egyenlet második egyenlete és a (14) egyenlet szerint általában $\bar{\sigma}_{h,x} \geq \bar{\sigma}_{h,y}$. A megterhelt sáv középvonalára merőleges síkban vannak vonalak, amelyek pontjaiban $\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$. Ezen izobárok egyenlete az előbbi két egyenlet alapján kifejezhető :

$$\frac{\cos(\vartheta_2 + \vartheta_1) \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\widehat{\vartheta}_2 - \widehat{\vartheta}_1} = \frac{m-2}{m} \tag{21}$$

Ha $m = 2$, akkor ezen egyenletünk igen egyszerű :

$$\widehat{\vartheta}_2 - \widehat{\vartheta}_1 = \frac{\pi}{2}$$

azaz egyenlőszárú hiperbola. $m > 2$ esetben is viszonylag könnyen lehet a görbékét megszerkeszteni.

A görbék pontjaiban $\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$. A kétfelé osztott térfél egyik részében $\bar{\sigma}_{h,x} < \bar{\sigma}_{h,y}$ és megfordítva.

$\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_z$, ha $\sin^2 \vartheta = \cos^2 \vartheta$. Ez pedig csak $\vartheta = \pm 45^\circ$ esetében áll. A (20) egyenlet alapján mondható, hogy $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$, ha $\vartheta = \pm 45^\circ$ és $m = 2$.

$$\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_z, \text{ ha}$$

$$\widehat{\vartheta}_2 + \widehat{\vartheta}_1 = \frac{\pi}{2}$$

Ez esetben azonban $\bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$. Így tehát $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_{h,x} = \bar{\sigma}_{h,y}$, ha $m = 2$ és $\vartheta_2 + \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

Ha a végtelen térfelet mindenhol q terhelés borítja, akkor a (17) egyenletcsoportban

$$\widehat{\vartheta}_2 = \frac{\pi}{2} \text{ és } \widehat{\vartheta}_1 = -\frac{\pi}{2}$$

és így :

$$\begin{aligned}\sigma_z &= q \\ \sigma_{h,x} &= q \\ \tau &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

Ezen utóbbi esetben a (18) egyenlet pedig az alábbi lesz :

$$\sigma_{h,y} = \frac{2}{m} q \quad (24)$$

Az első látszólagos ellentmondás tehát a következő :

$$\sigma_{h,x} \neq \sigma_{h,y}$$

A teljes végtelen térfelet borító terhelés esetében ugyanis, természetesen homogén izotrop rugalmas anyagban $\sigma_{h,x}$ -nek meg kellene egyeznie $\sigma_{h,y}$ -al. Az egyezés csak $m = 2$ esetében van meg.

Ezen utóbbi esetre érvényes a matematikai rugalmasságtan ismert összefüggése is :

$$\frac{1}{E} [(1 - \mu^2) \sigma_h - \mu (1 + \mu) \sigma_z] = 0$$

amiből következik, hogy

$$\sigma_h = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_z = \frac{1}{m - 1} \sigma_z$$

A (18) és (24) egyenletek nem adják ezen utóbbi összefüggést, csak abban az esetben, ha $m = 2$. Ez jelenti tehát a második látszólagos ellentmondást.

A további vizsgálatok arra lesznek hivatva, hogy vagy megállapítják a látszólagos ellentmondás okát, vagy ténylegesen ellentmondást mutatnak ki.

Nézzük meg, mit mutat ezen két ellentmondást illetően a Fröhlich-elv szerinti feszültségeloszlás. Az ismeretes, hogy a ν „koncentrációs faktor“ és m között az alábbi összefüggés érvényes a megfelelő feltételek mellett : $m = \nu - 1$. Mivel ezen összefüggés nem általános érvényű, azért a továbbiakban az $m = \nu - 1$ helyettesítést az egyszerűség és az összehasonlíthatóság kedvéért használjuk csak.

Ismeretes tehát a pontterhelés ébresztette sugárfeszültség is, nevezetesen :

$$\sigma = \frac{m + 1}{2\pi} \frac{P}{r^2} \cos^{m-1} \vartheta \quad (25)$$

Ha visszaidézzük az 1. ábrát, akkor vonalterhelés esetében az y -irányú szintes normálfeszültséget az eddigi levezetések szellemében azonnal felírhatjuk :

$$\bar{\sigma}_{hyF} = \frac{m + 1}{\pi} q \int_0^\infty \frac{1}{r_y^2} \cos^{m-1} \vartheta_y \sin^2 \alpha_y dy \quad (26)$$

A megfelelő értékek behelyettesítése után :

$$\bar{\sigma}_{hyF} = \frac{m + 1}{\pi r} q \cos^{m-1} \vartheta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \quad (27)$$

Az általános megoldás csak két változatban adható meg : ha m páros és ha m páratlan. Ha m páros szám :

$$\bar{\sigma}_{hyF} = \frac{m + 1}{\pi} \frac{\left(\frac{m}{2} - 1\right)! 2^{\frac{m}{2}-1}}{\left(3; 2; \frac{m}{2}\right)} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \quad (28)$$

Ha pedig m páratlan szám

$$\bar{\sigma}_{hyF} = \frac{m + 1}{\pi} \frac{\left(1; 2; \frac{m-1}{2}\right) \pi}{\left(\frac{m+1}{2}\right)! 2^{\frac{m+3}{2}}} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \quad (29)$$

A vonalterhelés ébresztette vertikális és horizontális normális feszültségek az ún. síkalakváltási feszültségkomponensek a Fröhlich-elv szerint az alábbiak :

Ha m páros szám

$$\bar{\sigma}_{vF} = \frac{\frac{m}{2}! 2^{\frac{m}{2}}}{\left(1; 2; \frac{m}{2}\right) \pi} \frac{q}{r} \cos^{m+1} \vartheta \quad (30)$$

Ha m páratlan szám

$$\bar{\sigma}_{vF} = \frac{\left(3; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! 2^{\frac{m+1}{2}}} \frac{q}{r} \cos^{m+1} \vartheta \quad (31)$$

Ha m páros szám

$$\bar{\sigma}_{hxF} = \frac{\frac{m}{2}! 2^{\frac{m}{2}}}{\left(1; 2; \frac{m}{2}\right) \pi} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \sin^2 \vartheta \quad (32)$$

Ha m páratlan szám

$$\bar{\sigma}_{hxF} = \frac{\left(3; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! 2^{\frac{m+1}{2}}} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \sin^2 \vartheta \quad (33)$$

Helyettesítsük ezen utóbbi egyenleteket a

$$\bar{\sigma}_{hy} = \frac{1}{m} (\bar{\sigma}_v + \bar{\sigma}_{hx}) \quad (34)$$

egyenletbe:

Ha m páros szám

$$\bar{\sigma}_{hy} = \frac{1}{m} \frac{\frac{m}{2}! 2^{\frac{m}{2}}}{\left(1; 2; \frac{m}{2}\right) \pi} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \quad (35)$$

Ha m páratlan szám

$$\bar{\sigma}_{hy} = \frac{1}{m} \frac{\left(3; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! 2^{\frac{m+1}{2}}} \frac{q}{r} \cos^{m-1} \vartheta \quad (36)$$

Mivel, ha m páros

$$(m+1) \frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)! 2^{\frac{m}{2}-1}}{\left(3; 2; \frac{m}{2}\right)} = \frac{1}{m} \frac{\frac{m}{2}! 2^{\frac{m}{2}}}{\left(1; 2; \frac{m}{2}\right)} \quad (37)$$

és ha m páratlan

$$(m+1) \frac{\left(1; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m+1}{2}\right)! 2^{\frac{m+3}{2}}} = \frac{1}{m} \frac{\left(3; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! 2^{\frac{m+1}{2}}} \quad (38)$$

azért következik, hogy

$$\bar{\sigma}_{hy} = \bar{\sigma}_{hyF} \quad (39)$$

Ezek alapján állítható, hogy az előzőekben említett első ellentmondás a *Fröhlich-elv* szerinti feszültségeloszlás mellett látszólagosan nincs meg.

Ha végtelen féltérrel mindenütt q intenzitású terhelés borítja, akkor a szintes feszültség a következő:

Ha m páros szám

$$\sigma_h = \frac{\frac{m!}{2} \cdot 2^{\frac{m}{2}}}{\left(1; 2; \frac{m}{2}\right) \pi} q \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta \quad (40)$$

Ha m páratlan szám

$$\sigma_h = \frac{\left(3; 2; \frac{m-1}{2}\right)}{\left(\frac{m-1}{2}\right)! \cdot 2^{\frac{m+1}{2}}} q \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta \quad (41)$$

A megoldás mindkét esetben

$$\sigma_h = \frac{q}{m-1} \quad (42)$$

Ez azt jelenti, hogy a fenti második ellentmondás látszólagosan sincs meg, ha a feszültségeloszlás a Fröhlich-elv szerint történik.

Ezen utóbbi eredmények azonban korántsem jelentik azt, hogy a probléma megoldást nyert, mert másfelől viszont pl. a Levy-féle egyenletekkel kimutatható, hogy izotrop-rugalmas anyagban a Fröhlich-elv csak $m = 2$, azaz $\nu = 3$ esetében ad rugalmasságtannak megfelelő feszültségállapotot.

A Fröhlich-féle elv tehát csak látszólag tünteti fel az ellentmondásokat, mert m csak 2 értéknél jelenti ezen elvvel kapcsolatos összefüggéseiben a Poisson-féle számot isotrop-rugalmas anyag esetében.

IRODALOM

- [1] *Boussinesq*: Application des Potentiels a l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Paris: Gauthier—Villard. 1885.
 [2] *Michell*: On some elementary distributions of stress in three dimensions és Elementary distribution of plane stress. London. Mathem. Soc., Proceedings, Vol. XXXII. 1900.
 [3] *Ohde*: Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrunde. — Der Bauingenieur, Bd. 20. 1939.
 [4] *Terzaghi, Jelinek*: Theoretische Bodenmechanik. 1954. p. 380.
 [5] *Fröhlich*: Druckverteilung im Baugrunde. 1934. p. 18.

Szerkesztőséghez érkezett: 1955. július 10.

Az alakváltozási feszültségek elvének általános igazolása

RICHTER RICHÁRD okl. bányamérnök, egyetemi docens

Рихтер Рихард, горный инженер, доцент:
 ОБЩЕЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ПРИНЦИПА ДЕФОРМАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.

Dipl. Berging. R. Richter, Dozent an der Universität:
 Die allgemeine Rechtfertigung des Prinzips der Formänderungsspannungen.

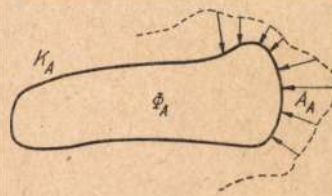
R. Richter, mining eng., docent at the University:
 Examinations on the principle of determination stresses.

R. Richter, ing. des mines, docent à l'université:
 La justification générale du principe des tensions causant des déformations.

Egy korábbi tanulmányomban [1] felhívtam a figyelmet arra, hogy az alakváltozási feszültségek elvének alkalmazása számos kőzetmechanikai, sőt talajmechanikai feladatot leegyszerűsít, s így igen célszerűen felhasználható.

A hivatkozott tanulmány az alakváltozási feszültségek elvének sztatikai bizonyításával foglal-

kozott, s annak rugalmasságtani érvényességét közvetve — körszelvényű folyosók esetében — konkrét esetben mutatta be. A következőkben az alakváltozási feszültségek elvének általános érvényességét bizonyítjuk a kőzetmechanikában leggyakoribb síkalakváltozási esetben.



1. ábra

Ismeretes, hogy egy feszültség alá került test feszültségi állapotát tökéletesen meghatározza egy olyan Φ feszültségfüggvény, amely az adott test kerületén fellépő terheléseket, az ún. kerületi felteteleket kielégíti [1]. Az 1. ábra szerinti esetben

tehát a feszültségállapotot olyan Φ_A határozza meg, amelyből számítható feszültségek K_A kerületen éppen a terheléssel egyenlő és A_A -val leírt feszültségértékeknek:

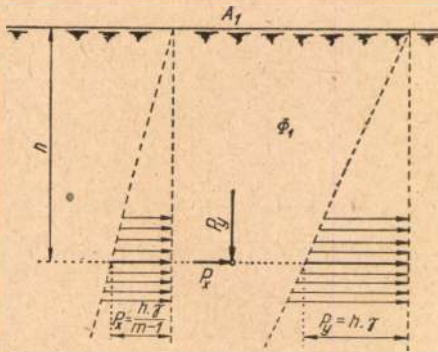
$$[\varphi(\Phi_A)]_{K_A} = A_A \quad (1)$$

A Φ feszültségfüggvény az egyensúlyi, továbbá az ún. folytonosságot biztosító egyenletből vezethető le, azaz a Φ feszültségfüggvény belső tartalma a kerületi feltétel teljesítésén túl:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

egyenletcsoporttal is kifejezhető. Az 1. ábra szerinti feszültségállapotot tehát a (2) egyenletcsoport, továbbá a kerületi feltételek (1) egyértelműen megadják.

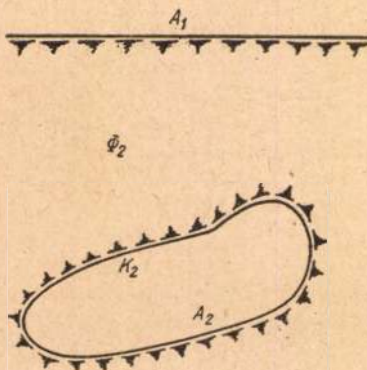


2. ábra

Határozza meg pl. a 2. ábra szerinti ún. *ön-súlyos rugalmas féltér* primér feszültségállapotát Φ_1 feszültségfüggvény, amelynek segítségével p_x , p_y és t ismert módon ([1], 293. old.) számítható. Az A_1 kerületi feltétel ekkor biztosítja, hogy a féltér felülete feszültségmentes legyen:

$$[\varphi(\Phi_1)]_{h=0} = 0 \dots A_1$$

Változtassuk meg ezen adott feszültségmezőt azáltal, hogy *tetszésszerűen* K_2 kerülettel jellemzett állandó szelvényű üreget létesítünk a féltérben (3. ábra). Ha a vágat hossza végtelen, akkor



3. ábra

a feszültségállapot ún. *sikalakváltozási állapot*, az alakváltozások síkja merőleges az üreg végtelen kiterjedésének irányára. Az új secunder feszültségmezőt olyan Φ_2 feszültségfüggvény határozza meg, amely biztosítja, hogy A_1 kielégítésén túl K_2 kerület is feszültségmentes (A_2). Φ_2 tehát A_1 és A_2 kerületi feltételeket kell, hogy kielégítse. Φ_2 feszültségfüggvényből ekkor σ_x , σ_y és τ secunder feszültségek számíthatók.

A secunder feszültségeket azonban kifejezhetjük:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p_x + \sigma'_x \\ \sigma_y &= p_y + \sigma'_y \\ \tau &= t + \tau' \end{aligned} \quad (3)$$

formában is, a primér feszültségekkel, továbbá azok egyelőre ismeretlen értékű változásával, az *alakváltozási feszültségekkel*.

A secunder feszültségállapotnak, ha az üreg létesítése utáni egyensúlyi állapot az arányossági határon belül esik, ki kell elégítenie a (2) egyenleteket, tehát:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} \right] &= 0 \\ \left[\frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial x} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$[\nabla (p_x + p_y)] + [\nabla (\sigma'_x + \sigma'_y)] = 0$$

Figyelembevétel, hogy a primér állapotra is fennállnak a (2) egyenletek, következnek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla (\sigma'_x + \sigma'_y) = 0$$

azaz az üreg nyitása során *ébredő alakváltozási feszültségek önmagukban egyensúlyban vannak, s kielégítik a folytonossági feltételt*.

Φ_1 és Φ_2 feszültségfüggvények kielégítik A_1 kerületi feltételt, azonban Φ_1 feszültségfüggvényből K_2 kerület mentén σ'_x , σ'_y és τ' feszültségek számíthatók, azaz $[\varphi(\Phi_1)]_{K_2} = f(\sigma'_x, \sigma'_y, \tau')$, amiből következik, hogy A_2 kerületi feltétel csak akkor teljesülhet, ha az alakváltozási feszültségmezőt leíró Φ_3 feszültségfüggvényből K_2 kerületen $[\varphi(\Phi_3)]_{K_2} = -f(\sigma'_x, \sigma'_y, \tau')$ feszültségek adódnak.

Az eddigiekből következik, hogy az alakváltozási feszültségmező is leírható egy Φ_3 feszültségfüggvénnyel, ha az A_1 , valamint $-A_2$ kerületi feltételeket teljesíti és akkor

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 \quad (6)$$

amit bizonyítani akartunk.

IRODALOM

[1] Richter: Rugalmasságtani vizsgálatok a közetmechanikában. (Bányászati Lapok, 6. és 7-8. szám, 288-302, illetve 407-421. oldalak.)