BÁNYÁSZATI LAPOK

AZ ORSZÁGOS MAGYAR BÁNYÁSZATI ÉS KOHÁSZATI EGYESÜLET FOLYÓIRATA

98. évfolyam 8. szám 1965. augusztus

Súlyozott távolságok minimumösszegének törvénye*

Bányászati alkalmazások

Dr. ZAMBÓ JÁNOS okl. bányamérnök, a műszaki tudományok doktora, Kossuth-díjas és Állami Díjas egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja (Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc)

Szerző levezeti a súlyozott távolságok minimumösszegének összefüggéseit. A súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát általában az alábbi feltételek kielégítése határozza meg: 1. a súlyvektor-rendszer egyensúlyban van, 2. a súlyvektor-rendszer eredője zérus nagyságú, 3. a súlyvektor-rendszer eredője csak meghatározott helyzetű lehet.

A szerző bemutatja, hogy a három feltétel kielégítése milyen körülményekhez kötött. A levezetett összefüggések, törvények a térbeli helyzetre vonatkoznak, a síkba való áttérés igen egyszerű.

A levezetett törvényszerűségek gyakorlati alkalmazása igen széles körű lehet. A tanulmány csak a bányászati vonatkozásokat érinti a teljesség igénye nélkül. Több gyakorlati példát is bemutat.

Az ipari, mezőgazdasági, közlekedési és egyéb telepítések tervezése különböző objektumokat helyez el a térben, adott felületen vagy a síkban. A telepített objektumok egymással rendszerint kölcsönhatásban vannak, leginkább az objektumok között előre meghatározható mennyiségben anyagot kell mozgatni.

Az objektumok telepítése az optimumra törekszik. Ezt az optimális telepítést különböző feltételek kielégítése határozhatja meg: a telepítést úgy kell megtervezni, hogy a mozgatás összmunkája minimum legyen; a mozgatással járó összköltség minimum legyen.

Az alapvető feladatok a következők:

1. A térben adott pontokhoz keresni kell egy olyan csomópontot, amelyet az adott pontokkal összekötő súlyozott egyenesvonalú távolságok összege a legkisebb, ha a keresett csomópont a térben szabadon választható meg.

2. A térben adott pontokhoz keresni kell egy olyan csomópontot, amelyet az adott pontokkal összekötő súlyozott egyenesvonalú távolságok összege a legkisebb, ha a keresett pont helye feltételhez kötött. Ilyen feltétel *a)* a keresett csomópont csak egy adott térbeli felületen vagy síkon lehet, *b)* a keresett csomópont csak egy térbeli görbén vagy egyenesen lehet.

3. Adott térbeli felületen elhelyezkedő adott pontokhoz keresni kell a térbeli felületen egy olyan csomópontot, amelyet az adott pontokkal összekötő súlyozott távolságok összege a legkisebb ha az összekötő vonalak is a felületen vannak, és azok a felület valamint olyan meghatározott helyzetű síkok metszésvonalai, amely síkok a keresett csomópont és az adott pontokon mennek át.

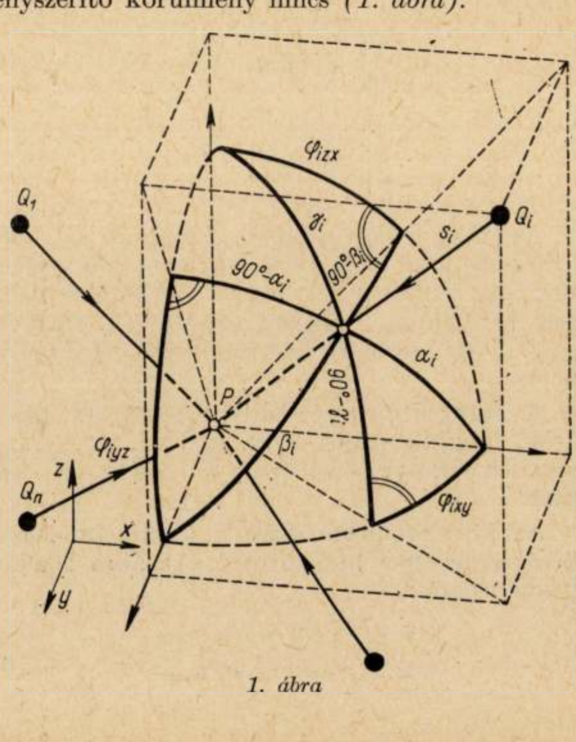
A három alapvető feladat megoldásában benne rejlik a síkbeli feladatok megoldása is. A térre érvényes összefüggésből ugyanis síkbeli összefüggésre áttérni mindig lehetséges és egyszerű.

I.

ELMÉLETI FELADATOK

1. Szabadon választható optimális hely

Adva van a térben n számú pont koordinátáival. Az egyes pontokhoz meghatározott súlyok: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n$ tartoznak. Keresendő a térben egy csomópont azzal a kikötéssel, hogy a csomópontot a térben adott pontokkal összekötő súlyozott egyenesvonalú távolságok összege a legkisebb legyen. A csomópont megkeresésében kényszerítő körülmény nincs *(1. ábra)*.



1. ábra

* A tanulmányt 1965 március hó 20-án vettük át a szerzőtől. *(Szerk.)*

Az adott pontok koordinátái : (x_1, y_1, z_1); $(x_2, y_2, z_2); \ldots, (x_i, y_i, z_i); \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. Koordinátái : (x, y, z).

Írjuk fel az i-edik ponthoz tartozó távolságot:

$$s_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (1)$$

A súlyozott távolságok összege pedig :

$$S = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (2)$$

Ennek az összegnek kell minimumnak lennie. Ez akkor lehetséges, ha kielégül az alábbi feltétel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{x-x_i}{s_i} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{y-y_i}{s_i} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{z-z_i}{s_i} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Az összefüggésekből következik, hogy az ismeretlenek kifejezése zárt formában lehetetlen. Írható azonban :

$$\begin{aligned} x - x_i &= s_i \cos \alpha_i \\ y - y_i &= s_i \cos \beta_i \\ z - z_i &= s_i \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (4)$$

Behelyettesítve ezeket az összefüggéseket, a következő egyenletrendszert kapjuk :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \alpha_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \beta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \gamma_i &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Az (5) egyenletrendszernek megvan az analitikai-mechanikai térbeli értelme : az a közös pont, csomópont jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyet támadó $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n$ térbeli vektorrendszer egyensúlyban van.

A súlyvektorok skaláris értékei az egyes súlyok, irányuk pedig az $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n$ egyenesek iránya, értelmük a csomópont felé mutat.

Az (5) egyenletrendszer a könnyebb kezelhetőség érdekében átalakítható. Az ábra alapján ugyanis írható :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \sin \gamma_i \cos \varphi_{ixy} \\ \cos \beta_i &= \sin \gamma_i \sin \varphi_{ixy} \end{aligned} \quad (6)$$

Helyettesítsük ezeket az összefüggéseket az (5) egyenletrendszerbe, és alkalmazzuk a ciklusos transzformációt :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \gamma_i \cos \varphi_{ixy} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{ixy} \cos \varphi_{ixy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \gamma_i \sin \varphi_{ixy} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{ixy} \sin \varphi_{ixy} = 0 \quad (1) \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \gamma_i &= \sum_{i=1}^{n} Q_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \alpha_i \cos \varphi_{iyz} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{iyz} \cos \varphi_{iyz} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \alpha_i \sin \varphi_{iyz} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{iyz} \sin \varphi_{iyz} = 0 \quad (2) \; (7) \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \alpha_i &= \sum_{i=1}^{n} Q_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \beta_i \cos \varphi_{izx} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{izx} \cos \varphi_{izx} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \beta_i \sin \varphi_{izx} &= \sum_{i=1}^{n} Q_{izx} \sin \varphi_{izx} = 0 \quad (3) \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \beta_i &= \sum_{i=1}^{n} Q_{iy} = 0 \end{aligned}$$

A (7) egyenletrendszer analitikai-mechanikai síkbeli értelme : az a csomópont jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyet támadó térbeli súlyvektoroknak a ponton átmenő síkban fekvő vetületei, továbbá a sík normálisába eső vetületei is egyensúlyban vannak.

A fentiekből következik az alábbi értelmezés is : az a csomópont jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyet támadó térbeli súlyvektoroknak a ponton átmenő két síkban fekvő vetületei egyensúlyban vannak. Természetesen a két egymással nem párhuzamos sík lehet általános helyzetű is, és nem megy keresztül a csomóponton. Ebben az esetben a két síkban megkeresett vetületi csomópontokból kell a keresett csomópontot meghatározni , visszaállítani.

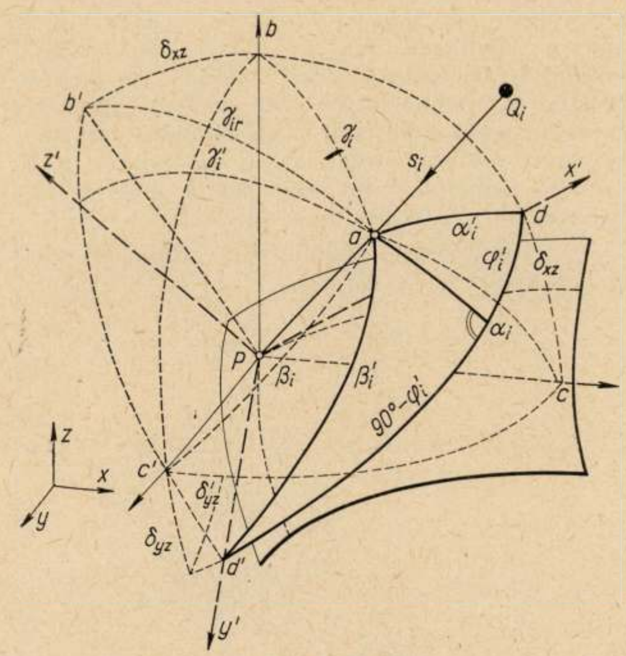
2. Feltételhez kötött optimális hely

a) Adva van a térben n számú pont a hozzájuk rendelt súlyokkal együtt. Keresendő egy csomópont, amely kijelöli a súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát azzal a mellékfeltétellel, hogy a csomópontot kényszerítő körülményhez kötjük : a keresett csomópont csak egy adott felület pontja lehet *(2. ábra)*.

A térbeli felületet a

$$z = z(x, y)$$

függvény írja le.



2. ábra

A felületen vegyünk fel egy tetszőleges P csomópontot. A P pont és az i-edik pont közötti távolság az alábbi összefüggéssel fejezhető ki:

$$s_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+[z(z,y)-z_i]^2} \tag{1}$$

A súlyozott távolságok összege pedig:

$$S = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+[z(z,y)-z_i]^2} \tag{2}$$

Az S-nek akkor lehet minimuma, ha kielégül a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i\left[\frac{x-x_i}{s_i}+\frac{z-z_i}{s_i}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right]=0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i\left[\frac{y-y_i}{s_i}+\frac{z-z_i}{s_i}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right]=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Tekintetbe véve az (1, 4) egyenletrendszert, továbbá azt, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= \operatorname{tg} \delta_{xz} \\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= \operatorname{tg} \delta_{yz}, \end{aligned} \tag{4}$$

a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i(\cos\alpha_i + \cos\gamma_i \operatorname{tg}\delta_{xz}) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i(\cos\beta_i + \cos\gamma_i \operatorname{tg}\delta_{yz}) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Helyezzük át a koordinátarendszer középpontját a P pontba, és forgassuk el az y-tengely körül úgy, hogy az x'-tengely az érintősíkba essék. Ebben a helyzetben:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\alpha'_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i(\cos\beta_i + \cos\gamma_{ir} \operatorname{tg}\delta'_{yz}) = 0$$

Most az x'-tengely körül forgatva essék az y'-tengely az érintősíkba. Ebben a végső helyzetben:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\alpha'_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\beta'_i &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

A (6) egyenletrendszer érvényességét az a, b, c, d illetve az a, b', c', d' gömbháromszögek is igazolják, mert érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\frac{\cos\alpha'_i}{\cos\delta_{xz}} = \cos\alpha_i + \cos\gamma_i \operatorname{tg}\delta_{xz}$$

$$\frac{\cos\beta'_i}{\cos\delta'_{yz}} = \cos\beta_i + \cos\gamma_{ir} \operatorname{tg}\delta'_{yz}$$

A bal oldalak nevezője minden tagban azonos, tehát kiegyszerüsíthető.

A (6) egyenletrendszer analitikai-mechanikai térbeli értelmezése egyszerű: a térbeli felületnek az a csomópontja jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyet támadó térbeli súlyvektor-rendszer eredője a ponthoz tartozó normálisba esik.

A *2. ábrán* látható gömbháromszögekben érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} \cos\alpha'_i &= \sin\gamma'_i \cos\varphi'_i \\ \cos\beta'_i &= \sin\gamma'_i \sin\varphi'_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Behelyettesítés után írható tehát:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin\gamma'_i \cos\varphi'_i &= \sum_{i=1}^{n} Q'_i \cos\varphi'_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin\gamma'_i \sin\varphi'_i &= \sum_{i=1}^{n} Q'_i \sin\varphi'_i = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

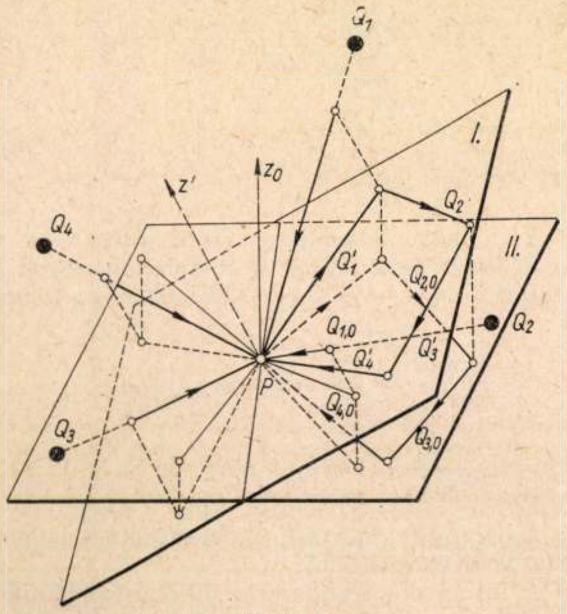
A (8) egyenletrendszerek analitikai-mechanikai síkbeli értelmezése megadható. A térbeli felületnek az a pontja jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyhez tartozó érintősíkban a pontot támadó, érintősíkbeli vektorvetületek egyensúlyban vannak. A ponthoz tartozó normálisba eső vektorvetületek a felület kényszerhatása miatt nincsenek szükségszerűen egyensúlyban, eredőjük lehet.

A térbeli felületen több olyan csomópont is előfordulhat, amelynél a fenti követelmény kielégül, azaz több relatív minimum is lehetségest A több relatív minimum közül az a csomópon.

jelöli ki az abszolút minimumot, amelyhez tartozó normálisba eső vektorvetületek eredőjének skaláris értéke a legkisebb.

b) Lehet a térbeli kényszerfelület sík is.

Az előzők alapján természetes, hogy a kényszersíkban az a csomópont jelöli ki a súlyozott távolságok minimumát, amelyet támadó, a síkba eső vektorvetületek egyensúlyban vannak. A csomóponthoz tartozó normálisba eső vektorvetületeknek lehet eredőjük.



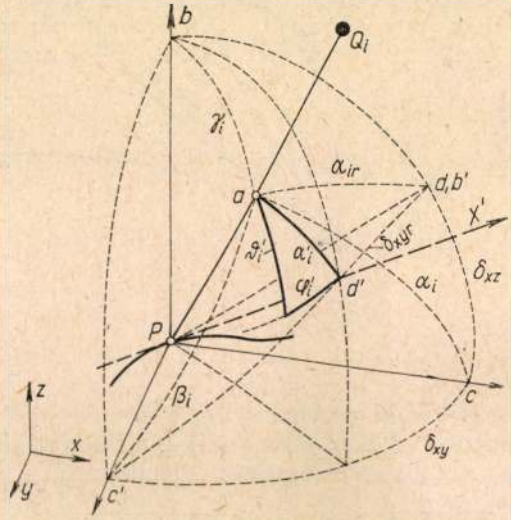
3. ábra

A *3. ábrán* négy pontot vettünk fel a térben, a hozzájuk rendelt súlyok rendre : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Egy térbeli felület P pontjához tartozik az I. érintősík. A súlyvektoroknak az érintősíkba eső vetületei rendre : Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4.

A P csomópont akkor jelöli ki az optimális helyet, ha az érintősíkba eső vektorvetületek az érintősíkban zárnak, azaz a P pontból elinduló vektorpoligon visszazár a P pontra. Érvényes ez természetesen akkor is, ha az I. sík maga a kényszersík.

Vetítsük most a Q'_1, Q'_2, Q'_3, Q'_4 vektorvetületeket a II. síkba. Ez a II. sík tetszőleges lehet, esetünkben az alapvetületi síkot jelenti. A II. síkban jelentkező $Q_{1,0}$, $Q_{2,0}$, $Q_{3,0}$, $Q_{4,0}$ vektorvetületek is egyensúlyban vannak, a vektorpoligon a csomópontba zár vissza. Érvényes ez akkor is, ha a két sík metszésvonala nem megy keresztül csomóponton. Ebben az esetben a II. síkon a csomópont vetülete jelenik meg, és erre vonatkozik a vektorpoligon zárása.

c) Kényszerítő körülményt jelenthet adott térbeli görbe is *(4. ábra)*.



4. ábra

A térbeli görbe egyenletrendszere adott :

$$y = y(x)$$
$$z = z(x),$$

azaz a két síkra $[(x,\ y)$ és $(x,\ z)]$ merőleges vetítőhenger metszésvonala a térbeli görbe.

Vegyünk fel a görbén egy tetszőleges P csomópontot. A térbeli i-edik pont távolsága a P ponttól:

$$s_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + [y(x) - y_i]^2 + [z(x) - z_i]^2} \qquad (9)$$

A súlyozott távolságok összege pedig :

$$S = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sqrt{(x - x_i)^2 + [y(x) - y_i]^2 + [z(x) - z_i]^2} \qquad (10)$$

Az S-nek minimuma akkor lehet, ha

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \left[\frac{x - x_i}{s_i} + \frac{y - y_i}{s_i} \frac{dy(x)}{dx} + \frac{z - z_i}{s_i} \frac{dz(x)}{dx} \right] = 0 \qquad (11)$$

A *4. ábra* alapján írhatjuk :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i (\cos \alpha_i + \cos \beta_i \operatorname{tg} \delta_{xy} + \cos \gamma_i \operatorname{tg} \delta_{xz}) = 0 \qquad (12)$$

Az a, b, c, d és a, b', c', d' gömbháromszögek segítségével felírható az alábbi összefüggés :

$$\frac{\cos \alpha'_i}{\cos \delta_{xyr} \cos \delta_{xz}} = \cos \alpha_i + \cos \beta_i \operatorname{tg} \delta_{xy} + \cos \gamma_i \operatorname{tg} \delta_{xz}$$

Mivel az egyenlőség bal oldalának nevezője minden tagban ugyanaz, azért végeredményben írhatjuk :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \alpha'_i = 0 \qquad (13)$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a koordináta-rendszert úgy forgatjuk el, hogy az elforgatott x'-tengely essék egybe a térgörbe P pontjához tartozó érintővel, az y'-tengely a binormálissal, a z'-tengely pedig főnormálissal. Ebben a helyzetben α_i helyébe α'_i lép, a δ'_{xy} és δ'_{xz} szögek pedig 0°-ra zárnak.

A (13) egyenlet analitikai-mechanikai térbeli értelme adott : a térgörbének az a pontja jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyhez tartozó érintőben egyensúly, nyugalomban van, a pontot támadó vektorrendszernek az érintőbe eső vetületei egyensúlyban vannak.

Fektessünk a térbeli görbe P pontjához tartozó érintőn (x'-tengely) keresztül egy tetszőleges síkot. Az s_i egyenes ehhez a tetszőleges síkhoz ϑ'_i szöggel hajlik, azaz az s_i egyenesen keresztül merőleges síkot állítottunk a tetszőlegesen felvett síkra. A két sík metszésvonala és az érintő a φ'_i szöget zárja be a tetszőlegesen felvett síkban.

A derékszögű gömbháromszögben érvényes összefüggés az alábbi :

$$\cos \alpha'_i = \cos \delta'_i \cos \varphi'_i.$$

Behelyettesítve a (13) egyenletbe, írhatjuk :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \vartheta'_i \cos \varphi'_i = \sum_{i=1}^{n} Q'_i \cos \varphi'_i = 0 \qquad (14)$$

A (14) egyenlet a síkban adja meg az analitikai-mechanikai értelmezést : a térgörbének az a pontja jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyhez tartozó érintőn átmenő bármely síkban a síkba eső vektorvetületek eredője az érintőnek e síkbeli normálisába esik.

Ha a térgörbe egyenessé fajul, lényegesen egyszerűbb a feladat.

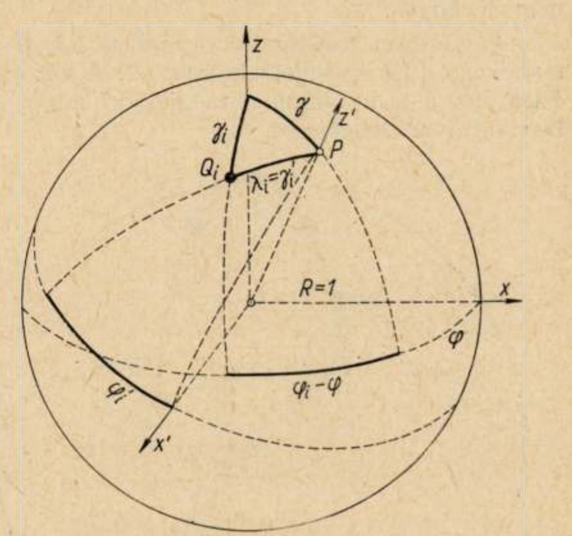
Általános értelemben most már levonható a következtetés.

Adva van a térben n számú pont és a hozzájuk rendelt súlyok rendre Q_1, Q_2, ... Q_n, ..., Q_n. Keresendő egy adott térbeli felületen vagy görbén olyan csomópont, amely kijelöli a csomópontot és az adott pontokat összekötő súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát. A térbeli felületnek illetőleg görbének egy pontja akkor jelöli ki a súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát, ha a térbeli súlyvektorok rendszerének csak a csomóponthoz tartozó normálisban, illetőleg normálsíkban van eredője. A lehetséges több relatív minimum közül az az abszolút minimum, amelyhez tartozó normálisban illetőleg normálsíkban jelentkező eredő skaláris értéke a legkisebb.

3. Felülethez kötött súlyozott távolságok összegének minimuma

Térbeli felületen adva van n számú pont és a hozzájuk rendelt súlyok : Q_1, Q_2, ..., Q_i, ..., Q_n. Keresendő a felületen egy csomópont, amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a súlyozott távolságok a felületen foglalnak helyet. A mozgás útját valamilyen meghatározott helyzetű sík és a felület metszésvonala adja.

a) Legyen egy R sugarú gömb, rajta n számú pont a hozzájuk tartozó súlyokkal. Keressük azt a csomópontot, amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha mozgás csak gömbi főkörön lehetséges (*5. ábra*).



5. ábra

Az egyelőre tetszőlegesen felvett koordinátarendszerben az egyelőre tetszőlegesen felvett P pont és az adott i-edik pont közötti távolság a gömbi főkörön :

$$s_i = R\widehat{\lambda_i}$$

Ismeretes a következő összefüggés :

$$\cos \lambda_i = \cos \gamma \cos \gamma_i + \sin \gamma \sin \gamma_i \cos (\varphi_i - \varphi) \qquad (1)$$

Ezzel felírható a súlyozott távolságok összege :

$$S = R \sum_{i=1}^{n} Q_i \arccos [\cos \gamma \cos \gamma_i + \sin \gamma \sin \gamma_i \cos (\varphi_i - \varphi)] \qquad (2)$$

S-nek akkor lehet minimuma, ha érvényesek az alábbi összefüggések :

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \left[\frac{\cos \gamma_i}{\sin \lambda_i} \sin \gamma - \frac{\sin \gamma_i}{\sin \lambda_i} \cos \gamma \cos (\varphi_i - \varphi) \right] = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\sin \gamma_i}{\sin \lambda_i} \sin (\varphi_i - \varphi) = 0$$

Forgassuk el a tengelyrendszert úgy, hogy a z'-tengely a P ponton menjen keresztül ; továbbá az x'-tengely helyzetét szabja meg a $\varphi_i - \varphi = \varphi'_i$ szög. Az elforgatás után γ, γ_i, $\varphi_i - \varphi$ helyébe γ', γ'_i φ'_i lép, ámde $\gamma' = 0°$, $\gamma'_i = \lambda_i$. Így tehát a végső összefüggésre jutunk :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \varphi'_i = 0$$

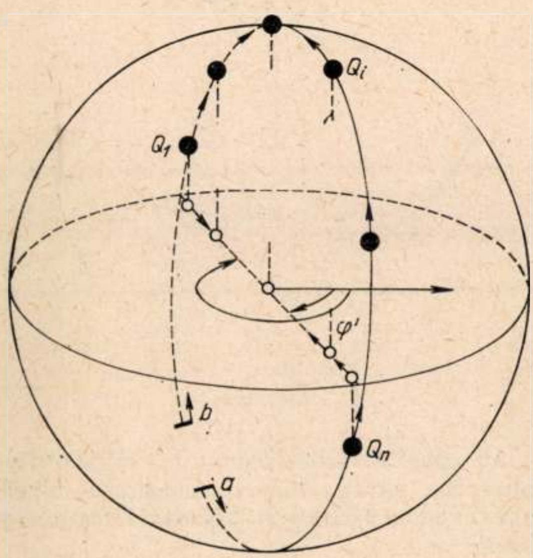
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \varphi'_i = 0 \qquad (4)$$

Egyenletrendszerünknek analitikai-mechanikai értelme a következő: a gömbön a főköri súlyozott távolságok összegének minimumát az a csomópont jelöli ki, amelyhez tartozó érintősíkban a súlyvektorok egyensúlyban vannak. A súlyvektorok az érintősíkban fekszenek, helyzetüket az érintősík és a főkörök simulósíkjának metszésvonala szabja meg.

Ez az összefüggés azért ilyen egyszerű, mert a gömbi főkörök egybevágóak, az érintősíkhoz viszonyított helyzetük, görbületi sugaruk azonos.

Ha a felületi görbék nem egybevágóak, az érintősíkhoz viszonyított helyzetük, görbületi sugaruk nem azonos, akkor ez az egyszerű összefüggés nem érvényes.

A gömbön mindig két szemben fekvő pont tesz eleget a (4) egyenletrendszernek. A két szélsőérték közül a minimumot megjelölni adott esetben könnyen lehetséges.



6. ábra

Legyenek most a pontok egyetlen főkörön. A *6. ábra* alapján a (4) egyenletrendszer átalakul:

$$\cos\varphi' \sum_{i=1}^{x} Q_i + \cos(\varphi' + 180°) \sum_{i=x+1}^{n} Q_i = 0$$

$$\sin\varphi' \sum_{i=1}^{x} Q_i + \sin(\varphi' + 180°) \sum_{i=x+1}^{n} Q_i = 0,$$

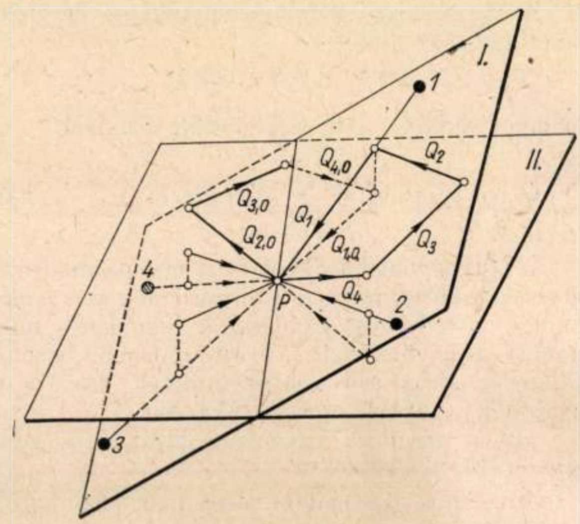
azaz

$$\sum_{i=1}^{x} Q_i = \sum_{i=x+1}^{n} Q_i \tag{5}$$

Szakítsuk meg a gömbi főkört egy helyen, azaz tegyük nyitottá. Ilyen feltétel mellett az (5) egyenlet analitikai-mechanikai értelme is adva van: egy nyitott körön az a csomópont jelöli ki a körhöz kötött súlyozott távolságok összegének minimumát, amelyben a súlyok összege feleződik, a két ellentétes irányban a súlyok összege azonos. A nyitott kör bármelyik végéről *(a* vagy *b)* elindulva a súlyok összegezésében addig a pontig megyünk el, amelyben átlépjük a $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ felét.

Elvileg előfordulhat, hogy a súlyok összegezésében a $\frac{\Sigma Q_i}{2}$ értéket egy súly osztása nélkül is megkapjuk.

Ebben az esetben a keresett csomópont nem egy pont, hanem egy ívszakasz bármely pontja.



7. ábra

b) Az adott pontok elhelyezkedhetnek általános síkon is. Az egyenesvonalú távolságok szintén a síkban fekszenek. Nem szorul a fentiek után külön bizonyításra, hogy a *7. ábra* alapján írható:

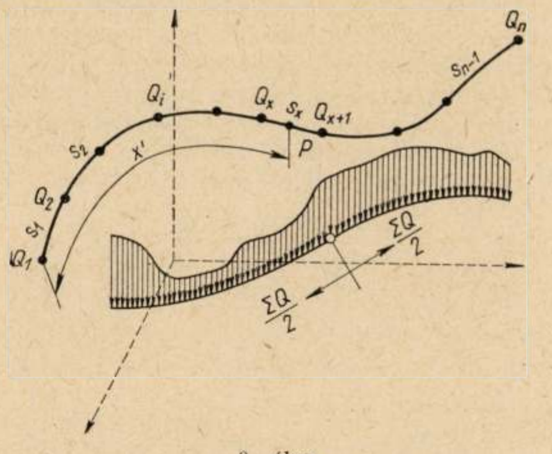
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \sin\varphi_i = 0, \tag{6}$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{i0} \cos\varphi_{i0} = 0 \tag{7}$$
$$\sum_{i=1}^{n} Q_{i0} \sin\varphi_{i0} = 0$$

Az egyenletrendszer értelmezése is világos: a csomópont akkor jelöli ki az optimális helyet, ha a csomópontot támadó súlyvektorok a térbeli síkban egyensúlyban vannak. Természetesen alapvetületben is megoldható a feladat: az alapvetületi vektorvetületeknek kell egyensúlyban lenniök.

c) Legyen adott egy térbeli görbe, rajta pontok és a hozzájuk tartozó súlyok *(8. ábra)*. Keressük a görbén azt a csomópontot, amely kijelöli a görbén fekvő súlyozott távolságok összegének minimumát.



8. ábra

Vegyünk fel a görbén egy tetszőleges P pontot, amely az 1. ponttól a görbén mérve x' távolságra van. A súlyozott távolságok összegét a következőképpen írhatjuk fel :

$$S = Q_1 x' + Q_2(x' - s_1) + Q_3\left(x' - \sum_{i=1}^{2} s_i\right) + \ldots + Q_x\left(x' - \sum_{i=1}^{x-1} s_i\right) + Q_{x+1}\left(\sum_{i=1}^{x} s_i - x'\right) + Q_{x+2}\left(\sum_{i=1}^{x+1} s_i - x'\right) + \ldots + Q_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i - x'\right).$$

Az S-nek akkor van minimuma, ha

$$\sum_{i=1}^{x} Q_i = \sum_{i=x+1}^{n} Q_i \qquad (8)$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy a súlyozott távolságok összegének minimumát az a csomópont jelöli ki, amelyben átlépjük a súlyok összegének a felét. A súlyok összegezését bármelyik oldalról kezdhetjük, azaz elindulhatunk a Q_1-től is, és elindulhatunk a Q_n-től is. Előfordulhat, hogy az átlépés egyaránt vonatkozik két szomszédos pontra: például az x-edik és az $x+1$-edik pontra. Ilyenkor az optimumot kijelölő csomópont nem egyetlen pont, hanem egy görbeszakasz *(s_x)* bármely pontja.

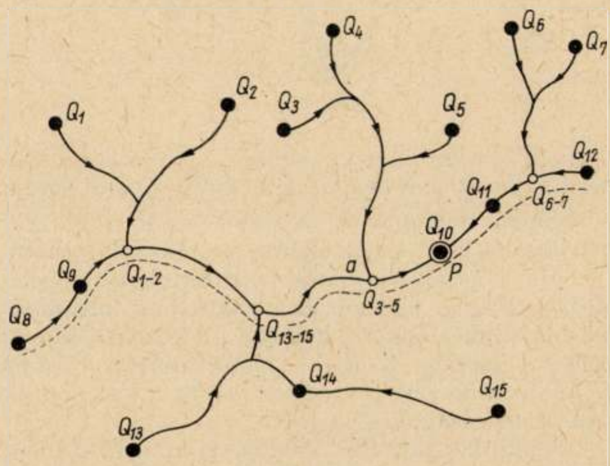
Érvényes marad a (8) összefüggés akkor is, ha a térbeli görbén a pontok száma minden határon túl megnövekszik. Érvényes tehát abban az általános esetben is, amikor a térgörbe mentén szabálytalanul változó folytonos súlyeloszlás jelentkezik. Az optimumot kijelentő csomópont a térgörbe menti súlyösszeget felezi *(8. ábra).*

d) Az előzők alapján már könnyen megoldható a következő feladat. Egy topográfiai felületen vonalak (utak) mentén különböző súlyok helyezkednek el. Keresni kell azt a csomópontot amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát, amikor a távolságok az adott vonalakhoz (utakhoz) kötöttek *(9. ábra).*

Az eljárás a leválasztás, leszűrés elvén alapszik. A legbonyolultabb esetben is található egyetlen megszakítás nélküli vonal, amely az egész rendszert helyettesíti. Így például a Q_3, Q_4 és Q_5 súlyok $Q_{3-5} = Q_3 + Q_4 + Q_5$ értékkel áthelyezhetők az a pontba, ha

$$Q_{3-5} < \frac{\sum_{i=1}^{15} Q_i}{2}$$

A többi esetben is hasonlóan eljárva egy vonalhoz jutunk, amelyen rendre Q_8, Q_9, Q_{1-2}, Q_{13-15}, Q_{3-5}, Q_{10}, Q_{11}, Q_{6-7}, Q_{12} súlyok jelentkeznek. Akár a Q_8-tól, akár a Q_{12}-től elindulva összegezzük a súlyokat és egy pontban (például a Q_{10}-ben) átlépjük a $\sum_{i=1}^{15} Q_i$ felét. Ez a csomópont a keresett optimális pont.



9. ábra

Ha a helyettesítő vonal zárt, akkor ezt a zárt vonalat elvben meg kell szakítani. Megszakítás annyi helyen lehetséges, ahány pont van a zárt vonalon. Az optimumot kijelölő csomópont csak összehasonlítás útján jelölhető ki az összes megszakítási lehetőségek figyelembevételével.

4. Síkbeli feladatok

A térbeli feladatok megoldása után a síkbeli feladatok nem jelentenek problémát.

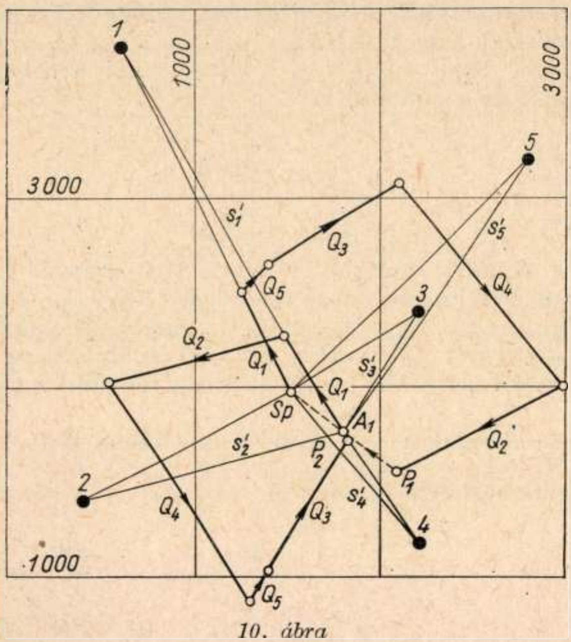
a) Legyen adva a síkban n számú pont rendre $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n$ súlyokkal. Érvényesnek kell lennie a következő egyenletrendszernek :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{x - x_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \varphi_i = 0$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{y - y_i}{s_i} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \varphi_i = 0 \qquad (1)$$

A megoldás lehet grafikus vagy numerikus, illetve a kettő kombinációja *(10. ábra).*

Első közelítő csomópontnak a súlypont *(S_p)* kínálkozik. A súlypontból elinduló súlyvektorpoligon a P_1 pontot jelöli ki, a vektorrendszer eredője $\overline{S_p - P_1}$ távolság. Az eredő iránya hozzávetőlegesen kijelöli azt az irányt, amelyben az



10. ábra

optimális csomópont keresendő. A következő lépés kezdőpontját (A_1) célszerű az előbbi eredő felezőpontjában felvenni. A második eredő $(\overline{A_1 - P_2})$ már kisebb lesz. Ez az eljárás tovább folytatható.

Ha a grafikus eljárás pontossága nem kielégítő, a *Newton*-féle közelítő eljáráshoz folyamodhatunk. Ehhez ismerni kell egy jól közelítő csomópont $(A_1$ esetleg $A_2, A_3, \ldots)$ koordinátáit $(\xi$ és $\eta)$ valamint a közelítő csomópont és az adott pontok közötti távolságokat (s'_i).

Jelöljük a közelítő csomópont koordinátáinak javítását Δx, illetve Δy-al. A Newton-féle iterációs eljárás szerint írhatjuk:

$$\Phi(\xi, \eta) + \Phi_x(\xi, \eta)\Delta x + \Phi_y(\xi, \eta)\Delta y = 0$$
$$\Psi(\xi, \eta) + \Psi_x(\xi, \eta)\Delta x + \Psi_y(\xi, \eta)\Delta y = 0,$$

ahol

$$\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \; \Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \; \ldots \text{ stb.}$$

Esetünkben az alábbi eredményre jutunk:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{(\eta - y_i)^2}{s'^3_i} \Delta x -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{(\xi - x_i)(\eta - y_i)}{s'^3_i} \Delta y + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\xi - x_i}{s'_i} = 0 \tag{2}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{(\xi - x_i)(\eta - y_i)}{s'^3_i} \Delta x +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{(\xi - x_i)^2}{s'^3_i} \Delta y + \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\eta - y_i}{s'_i} = 0,$$

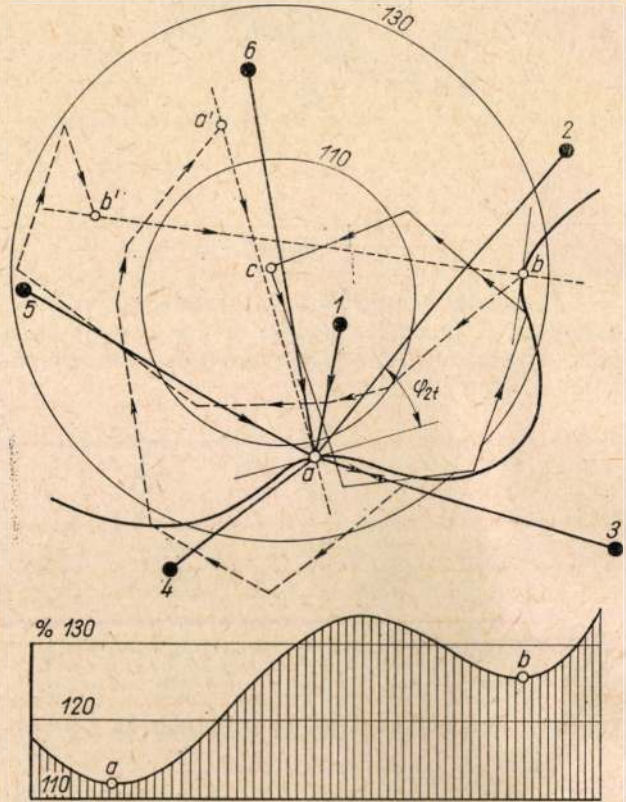
azaz röviden

$$a_y \Delta x - b_{xy} \Delta y + c_x = 0$$
$$- b_{xy} \Delta x + a_x \Delta y + c_y = 0$$

Megfelelő számú ismétléssel a megkívánt pontosság elérhető.

b) Legyen adva a síkban *n* számú pont és a hozzájuk rendelt súlyok. Keresendő a súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimuma azzal a megszorítással, hogy a minimumot kijelölő csomópont csak a síkban adott görbe pontja lehet.

Ha a görbe egyenlete nem ismert, a megoldás csak szerkesztéssel adható meg *(11. ábra)*.



11. ábra

A térbeli görbe esetében megismert összefüggések alapján a megoldás a

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \varphi_{it} = 0 \tag{3}$$

egyenlet kielégítése, azaz azt a csomópontot kell keresni a görbén, amelyet támadó súlyvektoroknak a ponthoz tartozó érintőbe eső vetületei egyensúlyban vannak, a vektorrendszernek csak a csomóponthoz tartozó normálisban lehet eredője.

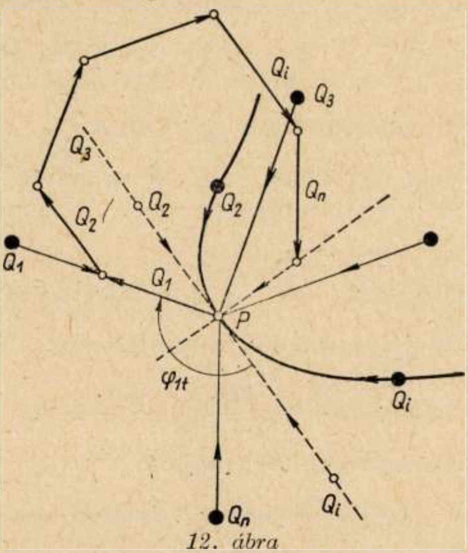
Mint az ábrán is látható, a görbén több csomópont is lehet, amely ezt a feltételt kielégíti. Az abszolút minimumot az a csomópont adja, amelyhez skalárisan legkisebb eredő $(\overline{a - a'})$ tartozik.

A normálisba eső eredő iránya afelé az optimális pont felé mutat, amely a görbe figyelembevétele nélkül megkeresett csomópont *(c)*. Az eredő annál inkább közelíti meg a *c* csomópontot, minél több adott pontunk van *(n)* minél inkább egyenletes eloszlásban, és az ezekhez rendelt súlyok *(Q)* minél kisebb szóródást mutatnak.

A görbe figyelmen kívül hagyásával szerkesztett százalékos izohipszák (100% a *c* pontban van) is annál inkább közelednek a körhöz, minél inkább érvényre jutnak az említett feltételek.

A görbéhez kötött és a minimumot kijelölő csomópontokban *(a* és *b)* az izohipsza és a görbe érintője, illetve normálisa egybeesik.

c) Legyen adva a síkban n számú pont a hozzájuk tartozó súlyokkal *(12. ábra)*. Az n pont közül n_0 számú pont a síkban fekvő görbén foglal helyet. Keresendő a görbén olyan csomópont amely a súlyozott távolságok összegének minimumát jelöli ki, ha az n_0 számú ponthoz tartozó távolságok a görbén fekszenek, ezek a pontok csak görbén mozoghatnak.



12. ábra

Mivel a síkgörbe önmagával egybevágó, a (3) egyenlet ebben az esetben is érvényben marad azzal, hogy a görbén levő n_0 számú pontokhoz tartozó szög értéke:

$$\varphi_{itn_0} = 0°$$

illetőleg

$$\varphi_{itn_0} = 180°$$

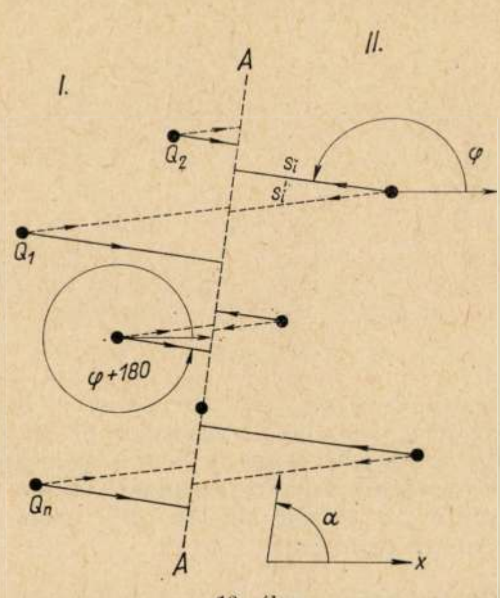
Ez azt jelenti, hogy a görbén lévő pontok súlyvektorai vetítés nélkül hatnak az érintőben, a görbén kívüli pontok súlyvektorainak csak az érintőbe eső vetületei hatnak.

5. Egyszerű síkbeli feladatok

a) Adva van a síkban n számú pont Q_1, Q_2, ..., Q_i, ..., Q_n súlyokkal *(13. ábra)*. Ugyancsak adott a síkban egy egyenes *(A—A)* iránya is *(φ)*. Hova kell elhelyezni az adott irányú egyenest, ha az egyenesig terjedő és egymással párhuzamos súlyozott távolságok *(s_i,* illetve *s_i')* összegének minimumát keressük.

Az előzők alapján külön bizonyítás nélkül is belátható, hogy az önmagával párhuzamosan eltolható egyenes optimális helyét az alábbi egyenletrendszer szabja meg:

$$\cos\varphi \sum_{i=1}^{x} Q_i + \cos(\varphi + 180°) \sum_{i=x+1}^{n} Q_i = 0$$
$$\sin\varphi \sum_{i=1}^{x} Q_i + \sin(\varphi + 180°) \sum_{i=x+1}^{n} Q_i = 0. \qquad (1)$$



13. ábra

A

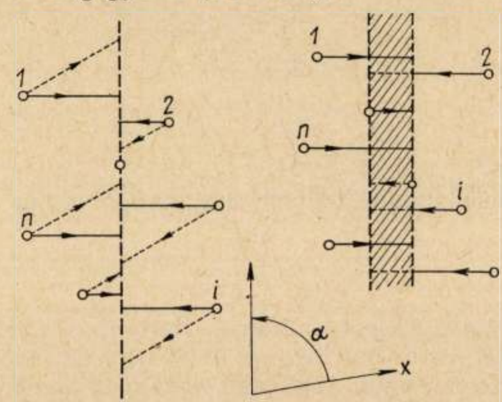
$$\sum_{i=1}^{x} Q_i = \sum_{i=x+1}^{n} Q_i \qquad (2)$$

egyenlet azt fejezi ki, hogy az egyenes helyzete akkor jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a két oldali súlyok összege ugyanaz.

Ha az egyes pontok súlya azonos, azaz relatíve minden súly az egységgel egyenlő, akkor

$$n_{\mathrm{I}} = n_{\mathrm{II}},$$

azaz a távolságok összhossza akkor a legkisebb a megadott feltétel mellett, ha a kétoldali pontok száma megegyezik *(14. ábra)*.

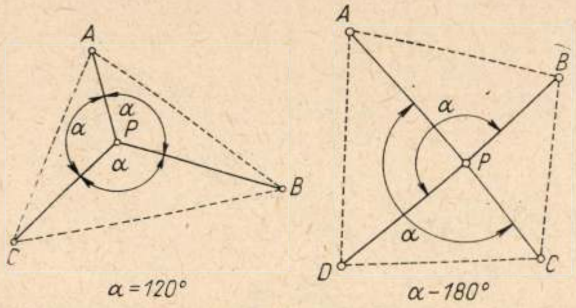


14. ábra

Az ábra a páratlan és a páros számú pont esetét mutatja be. Páratlan számú pont esetében az adott irányú egyenes helyzetét egy pont, páros számú pont esetében pedig két pont által meghatározott sáv jelöli ki.

b) Egyszerű és speciális síkbeli feladatnak számít az általános háromszög és az általános négyszög esete *(15. ábra)*.

Meg kell határozni azt a csomópontot, amelyet a háromszög illetve a négyszög sarokpontjaival kötünk össze, és amely egyben az összekötő távolságok minimumösszegét jelöli ki. Ezeknek az

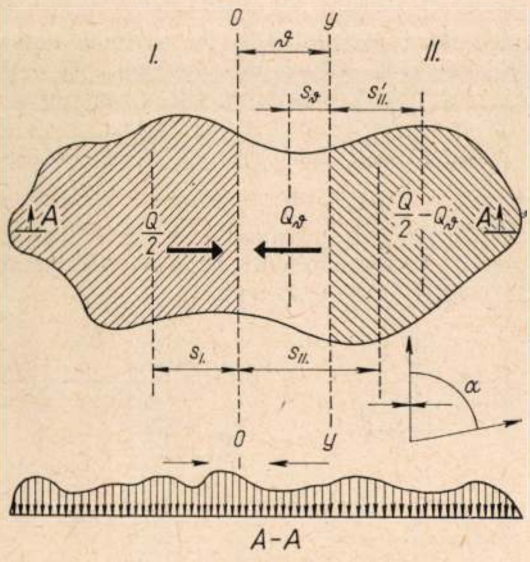


15. ábra

egységsúlyú távolságoknak az összege a háromszög esetében akkor lesz a legkisebb, ha az összekötő egyenesek 120°-os szöget zárnak be, négyszög esetében az átlók adják a megoldást. E két tétel bizonyítása az előzők alapján adva van, erre külön kitérni nem kell.

6. Sík területen eloszló súlyok összegyűjtése

a) Legyen adva egy szabálytalan alakú síkterület, a területen folytonos és egyenetlen elosztású súlyhalmaz található *(16. ábra)*. α szöggel



16. ábra

adva van egy egyenes iránya. Keresni kell az önmagával párhuzamosan eltolható egyenesnek azt a helyzetét, amely kijelöli a súlyhalmaz összegyűjtésének mozgásminimumát, ha minden egyes súlyrészecske az adott irányú egyenesre merőlegesen mozog.

Az (5,2) egyenlet érvényben marad akkor is, ha a súlyok száma minden határon túl megnövekszik ; ebből következik, hogy az egyenlőség ebben az esetben csak az alábbi lehet :

$$Q_I = Q_{II} = \frac{Q}{2}, \tag{1}$$

ahol Q_I az egyik, Q_{II} a másik oldalon jelentkező súlyhalmazt, Q pedig a teljes súlyhalmazt jelenti. Az egyenesnek tehát az a helyzete jelöli ki a minimumot, amelyben a terület súlyhalmazát két egyenlő részre osztja.

Térjünk most el a súlyhalmazt felező *0—0* egyenestől egyik irányban ϑ távolságra, azaz az egyenes y—y helyzetbe kerül.

Az *0—0* helyzetben a súlyozott távolságok összege :

$$S_{0-0} = \frac{Q}{2}(s_I + s_{II}),$$

ahol s_I, illetve s_{II} súlyponti távolságokat jelenti. Ugyanez az y—y helyzetben :

$$S_{y-y} = \frac{Q}{2}(s_I + \vartheta) + Q_\vartheta s_\vartheta + \left(\frac{Q}{2} - Q_\vartheta\right) s'_{II},$$

ahol Q_ϑ az *0—0* és y—y helyzetek közötti súlyhalmaz, s_ϑ ennek súlyponti távolsága az y—y tengelyre vonatkoztatva, s'_{II} pedig a $\frac{Q}{2} - Q_\vartheta$ súlyhalmaznak ugyancsak az y—y tengelyre vonatkoztatott súlyponti távolsága.

Mivel

$$\frac{Q}{2} s_{II} = Q_\vartheta(\vartheta - s_\vartheta) + \left(\frac{Q}{2} - Q_\vartheta\right)(\vartheta + s'_{II}),$$

azért az s'_{II} közvetlenül is kifejezhető :

$$s'_{II} = \frac{Q s_{II} - 2Q_\vartheta(\vartheta - s_\vartheta)}{Q - 2Q_\vartheta} - \vartheta.$$

Visszahelyettesítve kapjuk :

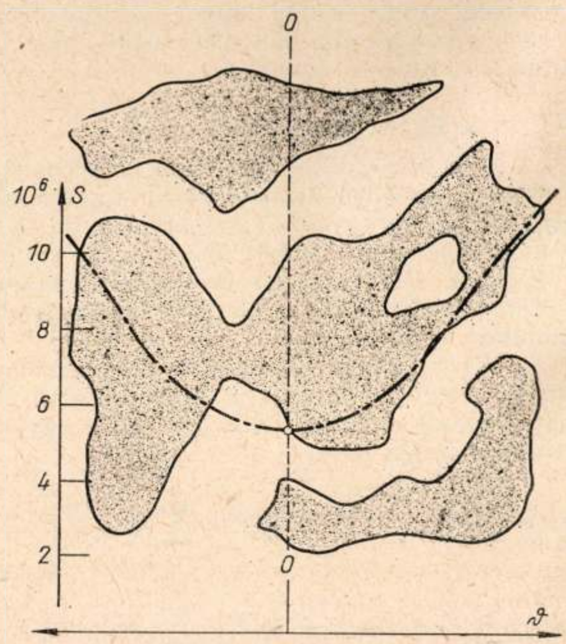
$$S_{y-y} = \frac{Q}{2}(s_I + s_{II}) + 2Q_\vartheta s_\vartheta,$$

azaz

$$S_{y-y} = S_{0-0} + 2Q_\vartheta s_\vartheta. \tag{2}$$

A (2) egyenlet igazolja az (1) egyenlet helyességét, mert a $2Q_\vartheta s_\vartheta$ tag mindig pozitív.

A (2) egyenletnek analitikai-mechanikai értelme a következő : szabálytalan síkterületen egyenlőtlenül eloszló súlyhalmazt mozgásmennyisége, kvázi-nyomatéka arra a tengelyre vonatkoztatva a legkisebb, amely a súlyhalmazt felezi. Ha a tengely önmagával párhuzamosan a felező helyzetből



17 ábra

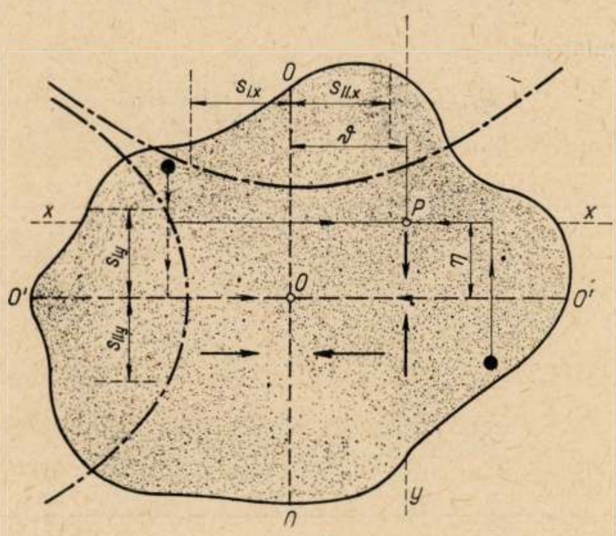
elmozdul, az elmozdult helyzetre vonatkozó kvázi-nyomaték megnövekszik. A növekedés kétszerese annak a kvázi-nyomatéknak, mozgásmennyiségnek, amelyet az elmozduló tengely által leírt területhez tartozó súlyhalmaz kvázi-nyomatéka, mozgatásmennyisége jelent az elmozdult tengelyre vonatkoztatva.

A *17. ábrán* szabálytalan, hézagos területen eloszló súlyhalmaz nyomatékának változását láthatjuk a tengelyhelyzet függvényében. A felező helyzethez viszonyítva a növekedést valamilyen rendű parabola írja le.

Ha a terület derékszögű négyszög, a súlyeloszlás egyenletes, és a tengely egy oldallal párhuzamos, akkor a kvázi-nyomatéknövekedés másodfokú parabola szerint alakul. Szélső helyzetben :

$$S_{e-e} = 2S_{0-0},$$

azaz kétszer akkora, mint felezőhelyzetben.



18. ábra

b) Legyen adva egy szabálytalan sík területen egyenetlen eloszlású súlyhalmaz *(18. ábra)*. Keresni kell egy csomópontot, amelybe a súlyokat össze kell gyűjteni a legkisebb mozgatással, ha a súlyhalmaz mindenegyes részecskéje csak két adott irányban, egymásra merőlegesen mozoghat.

A keresett pontot az adott irányokkal párhuzamos két tengely (0—0 és 0'—0') metszéspontja *(O)* jelöli ki. A két tengely mindegyike a súlyhalmazt felezi.

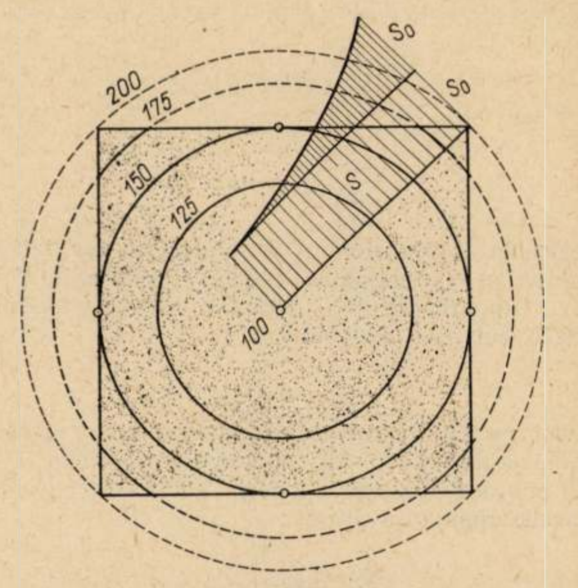
Az *O* pontra érvényes összefüggés :

$$S_O = \frac{Q}{2}(s_{Ix} + s_{IIx} + s_{Iy} + s_{IIy}),$$

egy tetszőleges *P* csomópontra pedig :

$$S_P = S_O + 2(Q_\vartheta s_\vartheta + Q_\eta s_\eta).$$

Ha a síkidom derékszögű négyszög, a súlyeloszlás egyenletes, a mozgatás iránya pedig párhuzamos az oldalakkal, akkor a sarokpontokban $2S_O$ érték jelentkezik. Az *S*-érték változását elliptikus paraboloid felület írja le, az *S*-izohipszák ellipszisek.



19. ábra

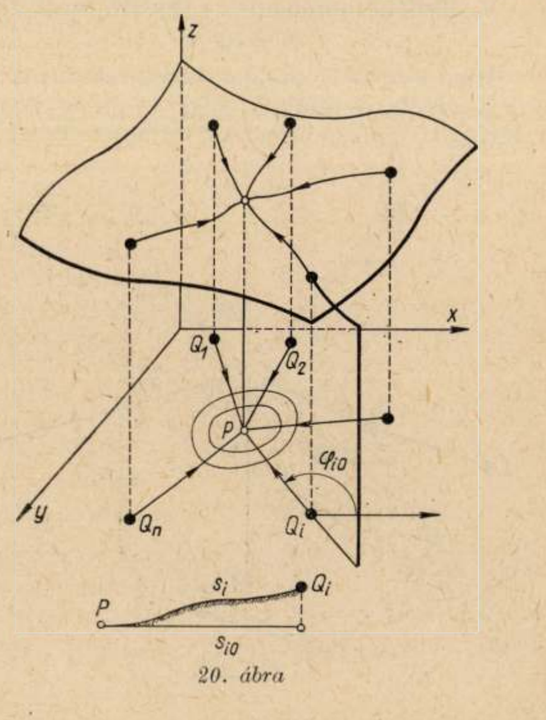
Ha a terület négyzetalakú és a súlyeloszlás egyenletes *(19. ábra)*, a jellemző felület körparaboloid, az *S*-izohipszák pedig körök lesznek.

Megállapítható, hogy az optimális csomóponthoz viszonyítva *(S_O = 100%)* az *S*-érték növekedése kezdetben lassú, majd a sarkok felé erősebb.

7. Mozgatás topográfiai felületen

A topográfiai felületet izohipszák határozzák meg. Az útvonalakat *(s_i)* a gyakorlatban általában a függőleges sík és a topográfiai felület metszésvonalai adják meg. Ha az útvonalakat topográfiai felülethez kötött vonalak jelentik, akkor matematikai megoldás nincs. A gyakorlati megoldás azonban nagyon egyszerű *(20. ábra)*.

Első lépésben alapvetületben keressük meg az optimális csomópontot az ismert eljárással, azaz



20. ábra

kijelöljük azt a P pontot, amely eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \varphi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \varphi_i = 0$$

egyenletrendszernek. A gyakorlati esetek többségében ez a megoldás elegendő pontosságot ad.

A pontosság fokozható, ha a második lépésben fiktív súlyokat vezetünk be :

$$Q_{fi} = \frac{s_i}{s_{i0}} Q_i,$$

ahol s_i a P ponthoz tartozó tényleges, s_{i0} pedig az alapvetületi távolság. A második lépésben olyan P' pontot kell keresni, amely a következő egyenletrendszernek tesz eleget :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{s_{i0}} Q_i \cos \varphi_i' = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{s_{i0}} Q_i \sin \varphi_i' = 0$$

A pontosság fokozható, ha az utóbbi eljárást megismételjük úgy, hogy most már a P' ponthoz tartozó s_i' illetve s_{i0}' értékkel képezzük az új fiktív súlyt. Így gyakorlatilag elfogadható pontos eredményre jutunk, bár az eljárás szigorú értelemben nem is egzakt. Nagyfokú a pontosság különösen akkor, ha a keresett csomópont környéke közel vízszintes síkterület.

Ha a topográfiai felület erősen szeszélyes, ellenőrzésképpen célszerű a fenti eljárás szerint megtalált optimális csomópont környékén a súlyozott távolságok összegének legalább egy izohipszáját megszerkeszteni.

8. Mellékcsomópontok vagy alternatívák módszere

Mind a térbeli, mind a síkbeli feladatok eddig arra a felvételre épültek, hogy az adott pontokat a keresett csomóponttal közvetlenül, általában a legrövidebb úton kötjük össze. Lehetséges azonban, hogy ez nem jelenti az optimumot.

A *21. ábra* síkbeli feladatot mutat be. Az adott pontrendszerben lehetnek csoportok, amelyeket nem közvetlenül kötünk össze a keresett P fő csomóponttal, hanem mellékcsomópontot *(P')* képezünk. Így természetesen alternatívákhoz juthatunk, mégpedig aszerint, milyen pontokhoz rendelünk mellékcsomópontot. A főcsomópontot *(P)* a mellékcsomóponttal *(P')* összekötő távolság súlya természetesen kisebb, mint a mellékcsomóponthoz rendelt súlyok összege.

A P pont akkor jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minumumát, ha

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos \varphi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \sin \varphi_i = 0 ,$$

valamint

$$Q_{r,c-f} \cos \varphi_{r,c-f} = \sum_{i=c}^{f} Q_i \cos \varphi_i$$

$$Q_{r,c-f} \sin \varphi_{r,c-f} = \sum_{i=c}^{f} Q_i \sin \varphi_i$$

$$\vdots$$

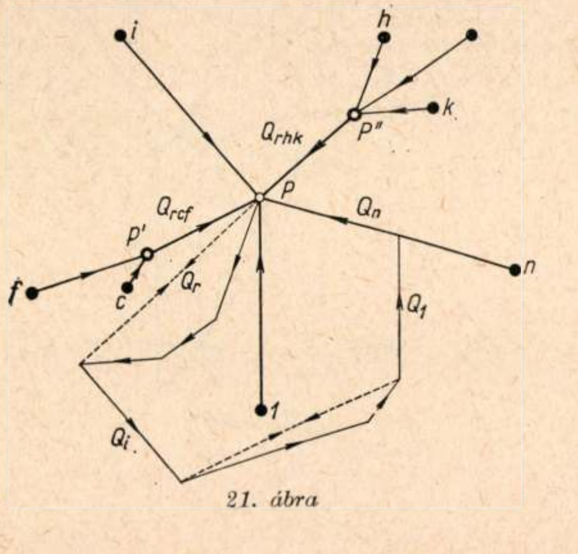
$$Q_{r,h-k} \cos \varphi_{r,h-k} = \sum_{i=h}^{k} Q_i \cos \varphi_i$$

$$Q_{r,h-k} \sin \varphi_{r,h-k} = \sum_{i=h}^{k} Q_i \sin \varphi_i$$

$$\vdots$$

egyenletrendszer kielégül. Más szóval ez azt is jelenti, hogy a P pont akkor jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha mind a fő-, mind a mellékcsomópontokat támadó vektorrendszerek egyensúlyban vannak.

Mivel a térbeli feladatok mindig síkbeli feladatokká vezethetők vissza, azért az itt rögzített elv általános érvényű. Ha a keresett pont kényszerítő körülményhez (felület, görbe) kötött, az elv akkor is érvényes, az összefüggések természetesen értelemszerűen kezelendők.



21. ábra

9. A súlyozott távolságok minimumösszegének törvénye

A súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát általában az alábbi feltételek kielégítése határozza meg : *A) a súlyvektor-rendszer egyensúlyban van, B) a súlyvektor-rendszer eredője zérus nagyságú súlyvektor, C) a súlyvektor-rendszer eredője csak meghatározott helyzetbe eshet.*

A) Egyenesvonalú súlyozott távolságok minimumösszegét a csomópontot támadó súlyvektor-rendszer egyensúlya határozza meg, ha a térben, illetőleg a síkban adott pontokat a térben, illetőleg a síkban szabadon elhelyezhető csomóponttal kötjük össze.

B) Egyenesvonalú súlyozott távolságok minimumösszegét a súlyvektor-rendszer zérus nagyságú eredője határozza meg, ha a térben, illetőleg síkban adott pontokat egy önmagával párhuzamosan eltolható térbeli síkkal, illetőleg síkbeli egyenessel kötjük össze úgy, hogy az összekötő vonalak párhuzamosak. A csomópont helyébe sík, illetőleg egyenes lép, a súlyvektor-rendszer ezeket támadja.

C) A súlyozott távolságok összegének minimumát akkor határozza meg a súlyvektor-rendszer eredőjének jellegzetes helyzete, ha a térben, illetőleg a síkban adott pontokat egyenesvonalú távolságok kötik össze egy olyan csomóponttal, amely egy meghatározott felülethez vagy térgörbéhez, illetőleg síkgörbéhez kötött: a csomópontot támadó súlyvektorrendszernek eredője csak a felületnek a csomóponthoz tartozó normálisába vagy a térgörbének a csomóponthoz tartozó normálsíkjába, illetőleg a síkgörbének a csomóponthoz tartozó normálisába eshet.

Ha a minimum-feltétel megengedi a súlyvektor rendszer eredőjét, akkor több minimum-hely is lehet. Az abszolút minimum-helyet az a csomópont határozza meg, amelyhez skaláris értelemben a legkisebb eredő tartozik.

II.

GYAKORLATI ALKALMAZÁS

A bemutatott elvi összefüggések alkalmazása széles körben lehetséges, és ez nem korlátozódik csupán a bányászat területére ; itt azonban közelebbről csak a bányászati vonatkozásokat érintjük.

A földalatti bányászkodás térben mozgó műveletek összessége. Így a térbeli feladatok elméleti összefüggései számos bányászati problémára adhatnak feleletet. Vonatkozik ez elsősorban a földalatti folyosórendszer és a földalatti bányatérségek optimális elrendezésére a térben. Megkönnyíti a feladatok megoldását az a körülmény, hogy a folyosók legtöbbször egyenesvonalúak, továbbá az is, hogy a széntelepek vagy egyéb más ásványi előfordulások néha közel síknak tekinthetők.

A síkbeli feladatok összefüggései mind a föld alatt, mind a külszínen alkalmazásra találhatnak.

Az elméleti összefüggések súlyozott távolságokról szólnak. A gyakorlatban a súlyt konkrét körülmény határozza meg.

A gyakorlat például a következők szerint fogalmazhatja meg a feladatot. Adva van n számú pont akár a térben, akár a síkban, és keresni kell azt a csomópontot, amely kijelöli a költségek minimumát, ha az útvonalakon a fajlagos mozgatási költségek és az időegységben elszállítandó mennyiségek adva vannak.

Természetesen lehetséges, hogy a fajlagos költség függvénye a hosszúságnak, azaz függvény függvényéről, rejtett függésről van szó.

Az

$$S = \sum_{i=1}^{n} Q_i s_i = \sum_{i=1}^{n} q_i k_i s_i$$

összefüggésben a q_i az időegységben elszállítandó mennyiséget [t], k_i a fajlagos költséget [Ft/mt] jelenti. A k_i függvénye lehet az s_i-nek :

$$k_i = \varphi(s_i).$$

Egyszerű esetben ez a belső függés is egyszerűen oldható fel. Például, ha

$$k_i = a_i + \frac{b_i}{s_i},$$

akkor az

$$S = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(a_i + \frac{b_i}{s_i}\right)$$

összefüggés minimum-értékét az ismertek szerint jelölhetjük ki, csupán arra kell tekintettel lenni, hogy ebben az esetben

$$Q_i = a_i q_i.$$

Ha a belső függés összetettebb, akkor gyakorlatilag az ismétléses módszerhez folyamodhatunk. Ennek lényege a következő. Első lépésben felveszünk s-értékeket, és ezeket a

$$k_{i1} = \varphi(s_{i1})$$

összefüggésbe helyettesítjük. Az optimumkeresés első lépésében számított s-értékek el fognak térni az első lépés felvett s-értékeitől. A második lépésben már az első lépéstől számított s-értékeket helyettesíthetjük a $k_i = \varphi(s_i)$ összefüggésbe, így a második lépés számított s-értékei már közelebb fognak esni a felvettekhez. A lépések számát addig növeljük, míg a megkívánt pontosságot el nem érjük.

Mivel a $k_i = \varphi(s_i)$ függvény legtöbbször regressziós eljárás eredménye, a pontosság fokozásának mértékére támpontul szolgálhat a regresszió-tényező *(r)*. A gyakorlati pontosságnak már eleget teszünk akkor is, ha a felvett és számított s-értékek aránya *(v)* olyan mértékben tér csak el az egységtől, mint maga a regressziós tényező, azaz ha

$$\left|\frac{1-r}{r}\right| \geq \left|\frac{1-v}{v}\right|.$$

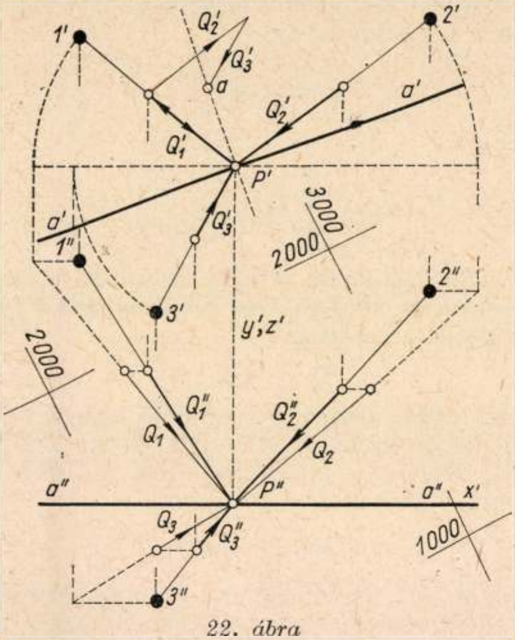
I.

Gyakorlati feladatok

Az alkalmazási lehetőségek közül bemutatunk néhányat. Természetesen az összes lehetőségek bemutatására nem vállalkozunk, mindössze ízelítőt adunk.

1. Adva van a föld alatt egy vágat tengelyvonala *(22. ábra)* két vetületben *(a'—a' ; a''—a'')*, valamint három pont szintén két vetületben *(1', 2', 3' ; 1'', 2'', 3'')*. Keresendő a vágat tengelyében egy olyan csomópont *(P' ; P'')*, amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a három pontot egyenesvonallal kötjük össze a keresett csomóponttal, és ha az egyes pontokhoz rendelt súlyvektorok rendre Q_1, Q_2, Q_3. Az egyenesen csak egy csomópont lehet.

Az egyik vetítősík az egyenesen átmenő függőleges sík, a másik a vízszintes alapsík. Válasszunk meg egy P pontot, és a $\overline{P—1}$; $\overline{P—2}$; $\overline{P—3}$ egyenesszakaszokat forgassuk az alapsíkba, hogy a súlyok (Q_1, Q_2, Q_3) felrakhatók legyenek. Visszaállítás után a súlyvektorok vetületeinek két-két képe $(Q_1', Q_2', Q_3'$ és $Q_1'', Q_2'', Q_3'')$ is adott.



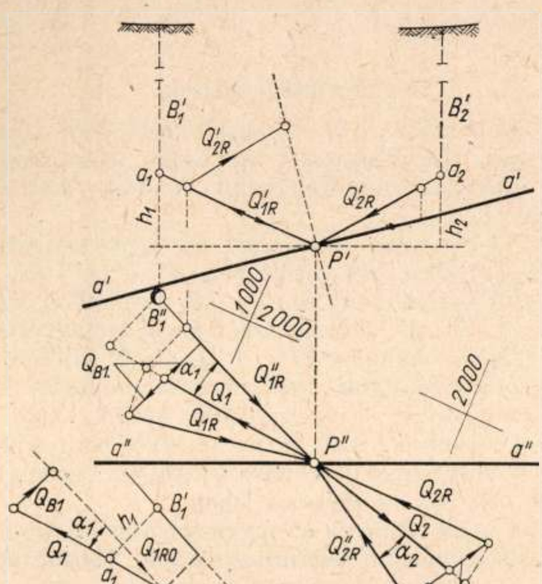
22. ábra

A P pont akkor jelöli ki az optimum helyét, ha a függőleges síkban jelentkező vektorkomponensek eredője $(a—P')$ az $a'—a'$ vetület P' pontjához tartozó normálisába esik.

Természetesen a keresett csomópontot csak ismétlések után tudjuk kijelölni.

A térbeli feladatot síkbeli feladattá lehetett visszavezetni, így a megoldás lényegesen leegyszerűsödött.

2. Adva van a föld alatt egy vágat tengelyvonala *(23. ábra)* két vetületben $(a'—a'$ és $a''—a'')$ A külszínről két lyukat fúrunk le (például iszapleadó lyukak). A két fúrólyuk alapvetületi koordinátái adottak, alapvetületben képük B_1'' és B_2''.



23. ábra

A két fúrólyuk és a vágat között földalatti összeköttetést kell létrehozni úgy, hogy ezek a vágat egy pontjából indulnak el. A fúrólyukakhoz rendelt súlyok Q_{B1} illetve Q_{B2}, a két összekötő vágat súlya pedig Q_1 illetve Q_2. Meg kell keresni azt a csomópontot, amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát.

Vegyünk fel az $a—a$ egyenesen egy pontot (P). Ezen a ponton és a két függőleges fúrólyukon át fektessünk függőleges síkokat. Először jelöljük ki a két fúrólyuk a_1 illetve a_2 pontját. A két pont $(a_1$ és $a_2)$ valamint a P pont közötti magasságkülönbségeket $(h_1$ és $h_2)$ az a feltétel szabja meg, hogy az a_1 illetve az a_2 mellékcsomópontokat támadó két-két súlyvektor $(Q_1$ és Q_{B1} illetve Q és $Q_{B2})$ eredője $(Q_{1R0}$ és $Q_{2R0})$ a fúrólyuk normálisába esik. Így az α_1 és α_2 hajlásszögek is adva vannak, és természetesen a fúrólyukak mélysége is.

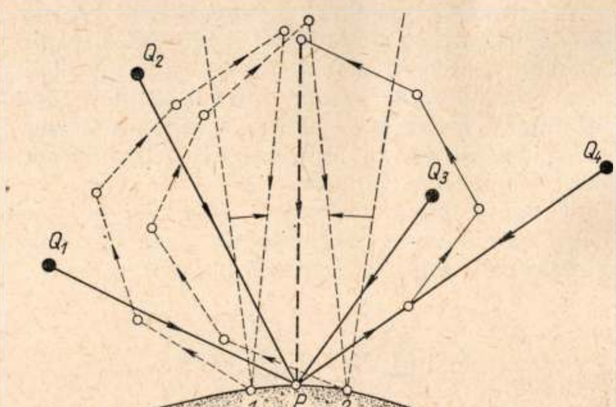
A következő lépésben a Q_{B1} és Q_{B2} súlyvektorok értelme fordított, és így a Q_1 és Q_{B1} eredője Q_{1R}, a Q_2 és Q_{B2} eredője Q_{2R} lesz. Ezt a két eredőt az $a—a$ egyenesen átmenő függőleges síkba vetítjük, és így a Q'_{1R} illetve Q'_{2R} vektorvetületekhez jutunk. A P főcsomópont akkor jelöli ki a súlyozott távolságok minimumát, ha a két vektor vetületnek eredője az $a—a$ egyenes függőleges síkbeli normálisába esik.

A térbeli feladatot most is két síkbeli feladattá lehetett visszavezetni. Természetesen a végleges a_1, a_2 mellék- és P főcsomópontokhoz csak ismétléssel juthatunk el.

Ha több fúrólyuk van, a megoldás hasonlóképpen történik.

3. Adva van a vízszintes síkban négy pont, a hozzájuk tartozó súlyokkal (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4). Keresni kell egy csomópontot, amely kijelöli a súlyozott egyenesvonalú távolságok összegének minimumát, ha a csomópont csak a síkbeli $a—a$ görbén foglalhat helyet *(24. ábra)*.

Az $a—a$ görbe lehet egy vasútvonal, az egyes pontokban lehet egy-egy bányaüzem, amelyeknek termelvényeit a P pontban elhelyezett osztályozóműbe vagy előkészítőműbe szállítjuk. Lehet az $a—a$ görbe például tengerpart vagy folyó stb. Az egyes pontokban lehet bármilyen létesítmény,

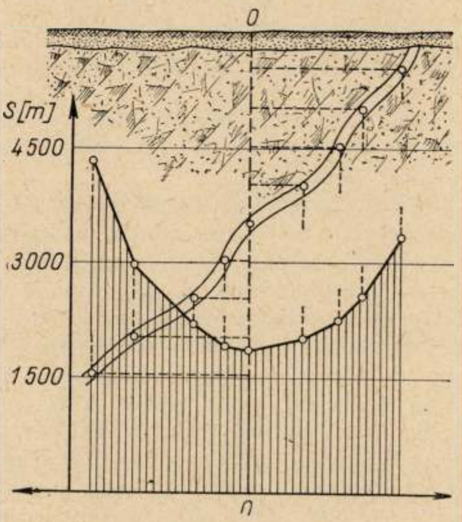


24. ábra

ahonnan valamilyen anyagot, termelvényt kell a csomópontba szállítani, vagy éppen megfordítva.

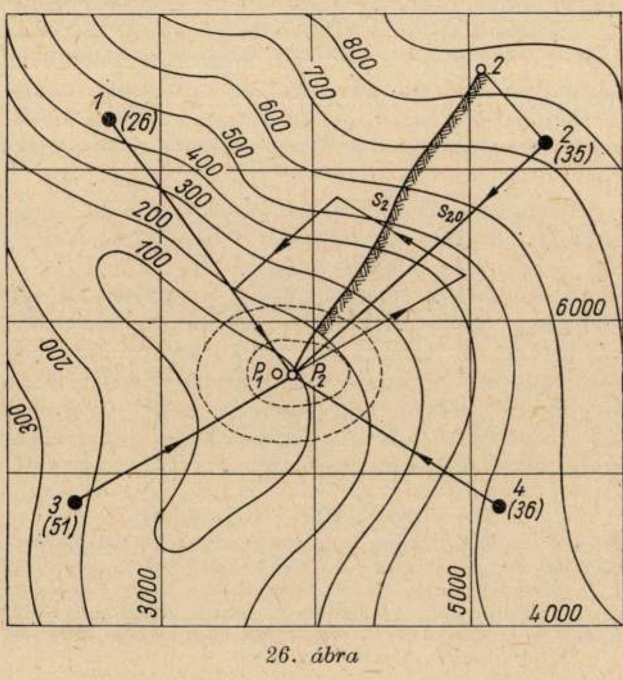
A feladat megoldása egyszerű. A P csomópont akkor jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a csomópontot támadó súlyvektorok eredője a csomóponthoz tartozó normálisba esik.

Az ábra a megoldás három lépését mutatja be. Az első lépésnél az eredő a normálistól jobbra tér el, a csomópont megválasztásában is jobbra kell elmozdulni. A második lépés viszont már vissza, azaz balfelé kényszerít, a harmadik lépés a keresett csomópontot jelöli ki.



25. ábra

4. Meredekdőlésű ásványelőfordulás esetében a függőleges akna telepítési helyének függvénye a főkeresztvágatok összhossza *(25. ábra)*. Az elméleti összefüggések birtokában egyszerűen belátható, hogy a főkeresztvágatok összhossza *(S)* akkor a legkisebb, ha a fedőben és feküben kihajtott főkeresztvágatok száma megegyezik. Ha a *O* ponttól



26. ábra

akár a fedő, akár a fekü felé tolódik el az akna telepítési helye, az eltolás *(x)* függvényében a főkeresztvágatok összhossza tört parabola szerint változik.

5. Topográfiai felületen adva van négy pont a hozzájuk rendelt súlyokkal (26, 35, 51, 36) együtt *(26. ábra)*. Keresni kell a topográfiai felületen azt a csomópontot *(P)*, amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a távolságot a csomópontokon (1, 2, 3, 4) keresztülmenő függőleges sík valamint a topográfiai felület metszésvonala jelenti.

Az egyes pontokban lehet például egy-egy bányaüzem, amelyeknek termelvényét alapvetületben egyenesvonalú kötélpályákon vagy gumiszalagon kell egy csomópontba összegyűjteni.

Első lépésben egyszerű alapvetületi megoldáshoz folyamodunk, azaz alapvetületben megkeressük azt a P_1 pontot, amelyet támadó súlyvektorrendszer (26, 35, 51, 36) egyensúlyban van. A második lépésben már bevezetjük a fiktív súlyokat:

$$Q_{f1} = \frac{s_1}{s_{1,0}} Q_1 ; \; Q_{f2} = \frac{s_2}{s_{2,0}} Q_2 ; \ldots ,$$

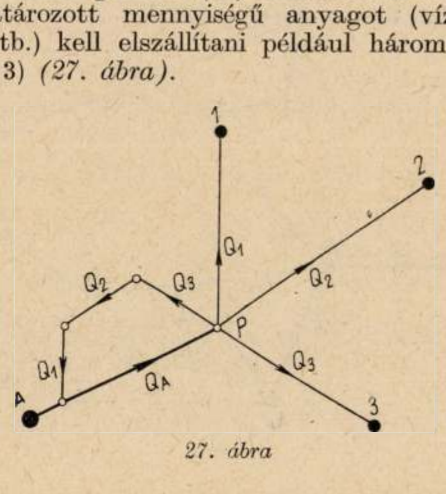
ahol s_1, s_2, ... a topográfiai felületen, $s_{1,0}$ $s_{2,0}$, ... pedig az alapvetületben jelentkező távolságokat jelenti. Így természetesen megfelelő számú ismétlés után megtaláljuk a P_2 pontot, amelyet támadó fiktív súlyvektor-rendszer egyensúlyban van.

Az eljárás tovább folytatható, újabb pontok jelölhetők ki. Gyakorlatilag a harmadik lépés már azt mutatja, hogz a csomópont elmozdulása kicsi. Így, ha nem is teljesen egzakt, mégis a gyakorlat igényeit messze kielégítő megoldásra jutunk, különösen akkor, ha az optimumot kijelölő pont környéke közel szintes síkterület.

Természetesen lehetséges, hogy nemcsak az $\frac{s_i}{s_{i0}}$ viszonyszám függvénye az összegyűjtés helyének, hanem az eredeti abszolút súlyok is, így az egyes lépésekben ezek is módosulhatnak. Az abszolút súlyok változhatnak például a távolság, a magasságkülönbség vagy a terepviszonyok stb. függvényében.

Az ábrán a súlyozott távolságok összegének két izohipszáját is feltüntettük az eljárás helyességének igazolására.

6. Adott pontból *(A)* elindulva csővezetéken meghatározott mennyiségű anyagot (víz, olaj, gáz, stb.) kell elszállítani például három helyre (1, 2, 3) *(27. ábra)*.



27. ábra

Az egyes vonalszakaszok ($\overline{A-P}$; $\overline{P-1}$; $\overline{P-3}$) súlyát megszabhatja a szakaszon az időegységben átáramló anyagmennyiség (q t/óra) és a mozgatás fajlagos költségének (k Ft/mt) szorzata, azaz

$$Q_i = q_i k_i.$$

Esetünkben természetesen

$$q_A = q_1 + q_2 + q_3.$$

Mivel az egyes k-értékek különbözőek lehetnek, azért általában

$$Q_A \neq Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

A fajlagos költség (k) magában foglalja a fajlagos üzemi költséget és a fajlagos beruházási amortizációs költséget, ezért esetünkben

$$Q_A < Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

A feladat legyen a következő: keresni kell egy elágazási csomópontot (P), amely kijelöli a súlyozott távolságok összegének minimumát.

Az ilyen értelemben meghatározott feladat megoldása egyszerű: a P csomópont akkor jelöli ki a súlyozott távolságok összegének minimumát, ha a csomópontot támadó Q_A, Q_1, Q_2, Q_3 súlyvektor-rendszer egyensúlyban van.

Ha az egyes súlyok a hozzájuk tartozó vonalszakasznak is függvényei, akkor a már megismert ismétlő eljáráshoz kell folyamodni.

A feladatot alapsíkban oldottuk meg. Ha a terepviszonyok annyira változatosak, hogy az alapvetületi megoldás nem nyújt kellő pontosságot, akkor a topográfiai felületen való mozgatás kapcsán megismert fiktív súlyokat vezetjük be.

A csővezetéken való szállításnak viszonylag egyszerű példáját láttuk. A vezetékfektetési problémák igen széleskörűek lehetnek. Az is lehetséges, hogy a telepítést illetően nincs semmiféle kikötés. Az előbbi példában volt ilyen kikötés, nevezetesen az, hogy a három ág egy csomópontból induljon el.

Komplikáltabb feladatot mutat már be a *28. ábra*. Az A pontból kell az egyes pontokba (1, 2, 3, 4) meghatározott mennyiségű anyagot (olaj, víz, gáz stb.) eljuttatni, vagy megfordítva.

Az egyes távolsági szakaszokhoz tartozó súlyok képzésében az előbbi példában megismert elvek érvényesülnek.

A csővezetékek fektetésében semmiféle megkötés nincs. A feladat az, hogy a telepítés optimális, a lehető leggazdaságosabb legyen.

A feladat megoldásában több alternatívát kell vizsgálni. Esetünkben ezeket az ábra szemlélteti.

Az optimum kijelölésének feladatát mindhárom felvett alternatívában a csomópontok (A_1, A_2) kijelölése jelenti.

Az első alternativa A_1 csomópontja akkor van optimális helyen, ha az A_1 pontot támadó súlyvektor-rendszer (Q, $Q_{1,3}$, $Q_{2,4}$) egyensúlyban van, a második alternatívánál az A_1 pontot támadó Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 súlyvektor-rendszernek kell egyensúlyban lennie. A harmadik alternatívában két csomópontra vonatkozó egyensúlynak kell fennállnia: az A_1 csomópont akkor van optimális helyen, ha az A_1 csomópontot támadó Q, Q_1, Q_2 súlyvektor-rendszer egyensúlyban van, ugyanakkor az A_2 csomópontban az A_2 csomópontot támadó Q', Q_3, Q_4 súlyvektor-rendszer egyensúlyának kell bekövetkeznie, azaz az egész vektorrendszernek eredője zérus.

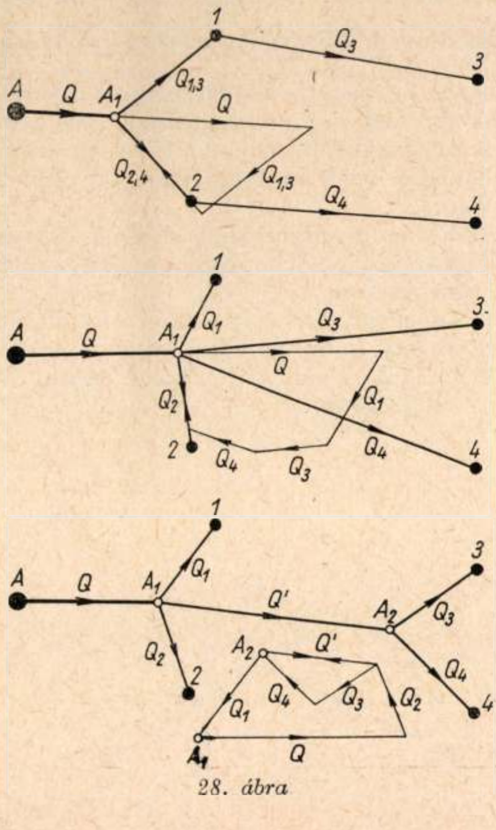
Lehetséges, hogy az egyes súlyok a hozzájuk tartozó szakasztávolságok függvényei. Ha ez fennáll, akkor a már megismert ismétlő módszerhez folyamodunk.

Ha a csőfektetés nem sík, vagy közel sík területen bonyolódik le, ellenben a topográfiai felület igen változatos, akkor a már szintén megismert fiktív súlyok módszeréhez folyamodunk.

A felvett három alternatívát először optimálissá tettük, majd a végleges megoldás érdekében az egyes alternatívákhoz tartozó optimális telepítéseket vetjük össze. Természetesen más elképzelhető alternativákra is kiterjeszthető e vizsgálat.

*

Néhány jellegzetes bányászati feladat megoldását mutattuk be. Csupán a bányászat területén is sok más feladat oldható meg igen egyszerűen. Az ipar, a mezőgazdaság, a közlekedés stb területén igen sok olyan feladat jelentkezik, amelyeket a fentiekben bemutatott alapvető összefüggések, törvények alapján egyszerűen lehet megoldani anélkül, hogy igénybe kellene venni a lineáris programozás nem egyszer körülményes, sok számítást és komoly berendezést kívánó módszerét.



28. ábra

FELHASZNÁLT IRODALOM

Forrai S.: Különleges, főleg centralizációs és rekonstrukciós bányászati és ipari létesítmények telepítési helyének műszaki-gazdasági analitikus vizsgálata. Kandidátusi értekezés. Kézirat. Miskolc, 1962.

Zambó, J.: Bányászati telepítések analitikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.