BÁNYÁSZATI LAPOK
AZ ORSZÁGOS MAGYAR BÁNYÁSZATI ÉS KOHÁSZATI EGYESÜLET FOLYÓIRATA
99. évfolyam 8. szám 1966. augusztus

Költségfüggvény a bányászatban

Dr. ZAMBÓ JÁNOS okl. bányamérnök,
a műszaki tudományok doktora, Kossuth díjas és Állami Díjas egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja
(Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc)

Szerző a bányaüzemek költségalakulását vizsgálja a termelési kapacitás és a bányamező kiterjedésének függvényében. Exponenciális függvényalakot választ és bemutatja a regressziós eljárást teljes keresztmetszetben.

A gyakorlat igazolja a megválasztott függvényalak helyességét, a valós, üzemi adatok feldolgozása kellő pontosságot, szorosságot mutat. A levezetett regressziós függvény alapja a két legfontosabb paraméter (termelési kapacitás, aknamező kiterjedése) meghatározásának.

1. A költségfüggvény általános alakja

A költségfüggvény összefüggést ad meg az üzemre jellemző értékek és a fajlagos termelési költség között. A függő változó a fajlagos termelési költség, a független változók pedig az üzem olyan jellegzetes mutatói, amelyeknek változása vagy változtatása kihat a fajlagos termelési költségre.

Bányaüzemekben a fajlagos termelési költség általában a kitermelt ásvány súlyegységére (t) vonatkoztatott költség, de vonatkozhat bármilyen más mennyiségegységre is (pl. Kcal).

A bányaüzemek költségfüggvényében a független változók általában a következők: a bányaüzem termelési kapacitása; a bányaüzem kiterjedésével összefüggő átlagos súlyozott mozgatási távolság; a geológiai és települési viszonyok.

A termelési kapacitás az időegységben kitermelt mennyiséget jelenti, dimenziója általában 10^6 t/év, a súlyozott átlagos távolság dimenziója km. Az az összefüggés, amely a termelési kapacitás (q), a súlyozott átlagos távolság (L) és a fajlagos termelési költség (k) között fennállhat, általában jól közelítő zárt matematikai formában is kifejezhető, azaz matematikailag is leírható a

$$k = \varphi(q, L)$$

függvény.

Csak igen körülményesen lehetne találni olyan függvénykapcsolatot, amely a geológiai és települési viszonyok, valamint a fajlagos termelési költség között állhat fenn. Ezért általában csak az az út járható, hogy egy-egy jellegzetes geológiai és települési viszonyokkal rendelkező előfordulásra egy-egy költségfüggvényt adunk meg. Az is járható út, hogy egy kiaknázás alatt álló előfordulás megismert költségfüggvényét vegyük alapul más hasonló előfordulások esetében is.

A bányaüzemek fajlagos termelési költségét két fő összetevőre bontjuk: *A)* a beruházás fajlagos amortizációs költsége, *B)* a beruházás fajlagos amortizációs költsége nélküli fajlagos termelési költség. Ezek szerint

$$k = k_A + k_B$$

A k_A fajlagos részköltség lényegében a termelési kapacitásnak, a k_B pedig a termelési kapacitásnak és az átlagos mozgatási távolságnak függvénye, azaz:

$$k_A = \varphi_A(q)$$

$$k_B = \varphi_B(q, L)$$

A beruházás fajlagos amortizációs költsége a mennyiség egységére eső visszatérítési költség (Ft/t). A kitermelhető ásványvagyon egységnyi mennyiségére eső beruházási visszatérítési költség (k_A) kivethető egyszerűen kamatosítás nélkül vagy kamatosítással. A kamatosítást az a körülmény kívánja meg, hogy a befektetés túlnyomórészt az üzem megindulása előtt esedékes, a visszanyerés pedig csak az üzemidő alatt.

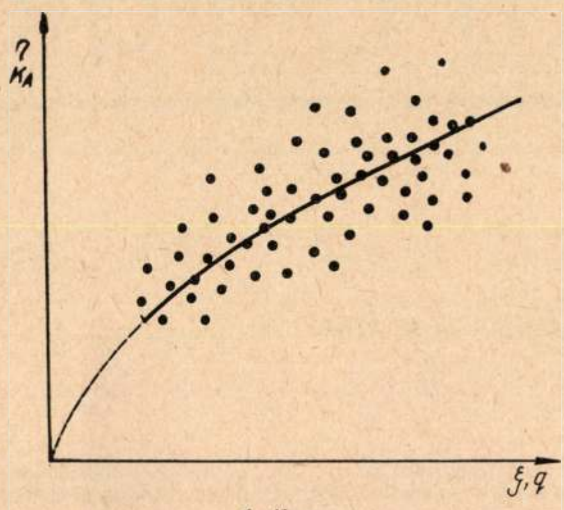
A beruházás nélküli üzemi fajlagos költség (k_B) szoros összefüggésben van vagy a termelési kapacitással vagy az átlagos mozgatási távolsággal, illetve mind a kettővel. Ez az utóbbi általánosnak tekinthető.

A fajlagos termelési költség, valamint a termelési kapacitás és az átlagos mozgatási távolság közötti függvénykapcsolat előállítható regressziós eljárással, kalkulatív úton, esetleg a kettő kombinációja révén.

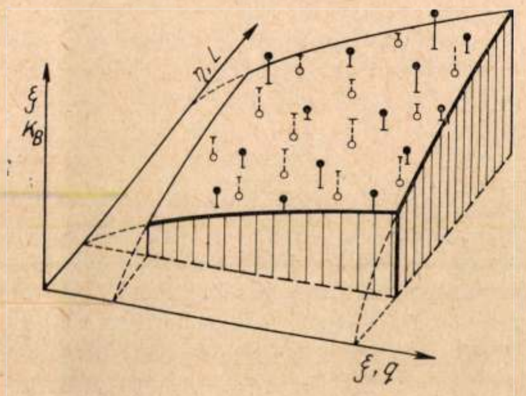
Az *1. ábra* összetartozó értékpárok (ξ, η) pontjainak halmazát adja. Ilyen halmaz jellemző olyan összetartozó értékpárokra, amelyek közül az egyik az évi termelési kapacitás (q), a másik a beruházási költség (K_A).

A *2. ábrán* három-három összetartozó érték (ζ, ξ, η) ponthalmaza látható. Ilyen halmaz a beruházási költség nélküli üzemi költségre jellemző. Ebben az esetben az egyik érték az évi termelési kapacitás ($q = \xi$); a másik a súlyozott átlagos mozgatási távolság ($L = \eta$); a harmadik a beruházási költség nélküli évi üzemi költség ($\zeta = K_B$).

Beruházási költség alatt az alap- vagy másszóval kapitális beruházási költséget értünk. Jelöljük K_A-val. Az alapberuházási költséget vissza kell téríteni; az egy évre eső visszatérítési költséget jelöljük $K_{A,0}$-al. A $K_{A,0}$ nélküli egy évre eső üzemi költség legyen K_B.



1. ábra



2. ábra

Az egy évre jutó összköltség (K) tehát így fejezhető ki:

$$K = K_{A,0} + K_B$$

Ebből a fajlagos költség egyszerűen képezhető:

$$k = \frac{K_{A,0} + K_B}{q}$$

Ezek után megfogalmazható az alapfeladat: regressziós eljárással meg kell határozni a

$$K_A = \Phi_A(q)$$

$$K_B = \Phi_B(q,\ L)$$

megközelítő függvényeket a rendelkezésre álló és összetartozó értékek segítségével.

A regressziós eljárás kiindulási alapja a függvényforma megválasztása.

Az *1. ábrán* látható jellegzetes ponthalmazhoz legcélszerűbben az

$$\eta = a\,\xi^{\mu}$$

illetve

$$K_A = aq^{\mu}$$

formula választható meg.

A *2. ábra* szerinti jellegzetes ponthalmazhoz hasonlóan a

$$\zeta = b\,\xi^{\nu}\,\eta^{\omega}$$

illetve a $\quad K_B = bq^{\nu} L^{\omega}$

függvényalak választható meg célszerűen.

Elöljáróban ismerjük meg tehát a megválasztott formulák alapján a regressziós eljárást egészen általános formában. Előre kell bocsátanunk azonban már most, hogy a gyakorlati függvények megalkotásánál bizonyos körülményekre figyelemmel kell lenni. Elég elöljáróban csak annyit megemlíteni, hogy a gyakorlatban az összetartozó értékek csak egy bizonyos érték felett jelentkeznek, más szóval a zérus-érték környékén nincsenek összetartozó értékek. A gyakorlatban ugyanis nincs a zérushoz közeleső termelési kapacitás (q) vagy súlyozott átlagos távolság (L).

2. Nem lineáris egyváltozós regressziós függvény

Legyen adva n számú összetartozó értékpár: $(\xi_1,\ \eta_1),\ (\xi_2,\ \eta_2),\ \ldots,\ (\xi_i,\ \eta_i),\ \ldots,\ (\xi_n,\ \eta_n)$. Regressziós eljárással határozzuk meg a pontokat megközelítő függvényt:

$$K_A = aq^{\mu},$$

illetve általános formában:

$$\eta = a\,\xi^{\mu}.$$

Keresnünk kell tehát az a és μ paramétereket úgy, hogy a megközelítést valamilyen feltételhez szabjuk.

Az eljárás egyszerű, mert a felvett függvényalak lineárissá tehető:

$$\log \eta = \mu \log \xi + \log a,$$

azaz általános formában:

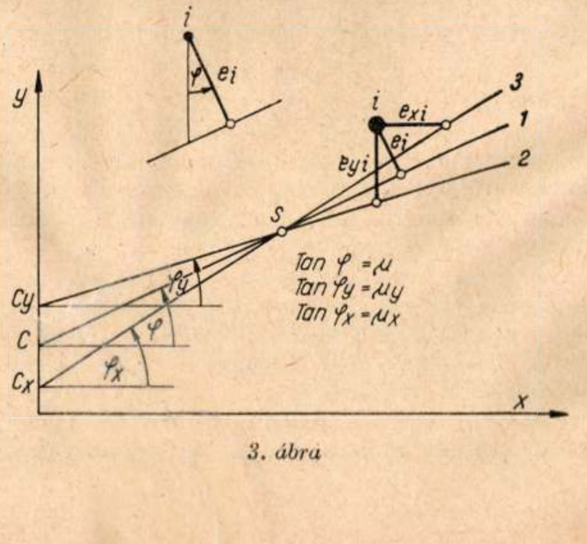
$$y = \mu x + c$$

A lineárissá tétel után az összetartozó értékpárok: $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_i,\ y_i),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n)$ lettek.

A feltétel többféle lehet. Leggyakoribbak a következők: *1.* a pontokból a regressziós egyenesre emelt merőleges távolságok négyzetösszege legyen minimum, *2.* az y irányú, *3.* az x irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum *(3. ábra)*.

Ha az a feltételünk, hogy a merőleges eltérések négyzetösszege legyen minimum, akkor felírható:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - (\mu x_i + c)]^2}{1+\mu^2}$$



3. ábra

Figyelembe vettük ugyanis, hogy

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

A μ és c meghatározása érdekében képezzük a

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\partial\mu}=0$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\partial c}=0$$

kifejezéseket. Eredményül kapjuk:

$$-(1+\mu^2)\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\mu x_i+c)]x_i-$$

$$-\mu\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\mu x_i+c)]^2=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i-\mu\sum_{i=1}^{n}x_i-nc=0$$

A két egyenlet megoldása megadja a két keresett paramétert:

$$\mu=\frac{1}{2\gamma}\left[(\alpha-\beta)+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+4\gamma^2}\right]$$

$$c=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\mu\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=y_s-\mu x_s,$$

ahol

$$\alpha=n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\beta=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\gamma=n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

Matematikailag igazolható, akkor van minimum, ha a μ képletében a gyöknek pozitív értelme van.

Ha abból a feltételből indulunk ki, hogy az y irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum, akkor hasonló módon némileg egyszerűbb eredményre jutunk:

$$\mu_y=\frac{\gamma}{\beta}$$

$$c_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\mu_y\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=y_s-\mu_yx_s$$

Ha pedig az a feltételünk, hogy az x irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum, akkor:

$$\mu_x=\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$c_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i-\mu_x\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=y_s-\mu_xx_s.$$

Ennél az utóbbinál a kiinduló egyenletünk:

$$\sum_{i=1}^{n}e_{x,i}^2=\sum_{i=1}^{n}[x_i-(\mu_x'y_i+c_x')]^2$$

A μ_x' értékére eredményül kapjuk:

$$\mu_x'=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Mivel

$$\mu_x'=\frac{1}{\mu_x},$$

azért jutottunk a

$$\mu_x=\frac{\alpha}{\gamma}$$

eredményre.

A fentiekből megállapítható, hogy mindhárom egyenes keresztülmegy az átlagponton, a kvázi súlyponton (x_s, y_s).

Mint ismeretes az összetartozó értékpárok szorosságára az ún. *korrelációs együttható* (r) jellemző. Általános alakja:

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

ahol

$$\sigma_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_s)(y_i-y_s)}{n}=\frac{\gamma}{n^2}$$

$$\sigma_x=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_s)^2}{n}=\frac{\beta}{n^2}$$

$$\sigma_y=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_s)^2}{n}=\frac{\alpha}{n^2}$$

A behelyettesítés elvégzése után:

$$r=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

ahol a gyök mindig pozitív értelmű, az r előjelét tehát a γ előjele határozza meg. Az r mindig -1 és $+1$ között változhat. Ha $r=0$, akkor korreláció nincsen; ha $r=\pm1$, akkor az x- és y-értékek között függvénykapcsolat van; ha $r>0$, pozitív korreláció van, a függvényt ábrázoló egyenes emelkedő; ha $r<0$, negatív korrelációról beszélünk, az egyenes süllyedő, csökkenő tendenciát mutat.

Felírható az eredeti rendszer ún. *korrelációs indexe* is:

$$I=\sqrt{1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\eta_i-\eta_i')^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\eta_i-\eta_s)^2}}$$

ahol η_i' a regressziós közelítő függvényből számított érték,

η_s pedig az átlagértéket jelenti.

A lineáris rendszer korrelációs együtthatója és az eredeti rendszer korrelációs indexe természetesen nem egyezik meg.

A pontok szórását a regressziós egyenestől a standard hibákkal (S) jellemezhetjük. Ezek szoros összefüggésben vannak az ún. *standard hiba ellipszissel,* sőt az ellipszis a regressziós egyenesek helyzetét is megadja *(4. ábra).*

Ha a merőleges eltérések négyzetösszegének minimuma a feltétel, akkor a regressziós egyenes helyzete szabja meg az ellipszis főtengelyének helyzetét (1), ha y-irányú vagy x-irányú eltérésekről van szó, akkor a hiba ellipszis y-irányú (2), illetve x-irányú (3) érintőinek érintési pontjai határozzák meg a regressziós egyenesek helyzetét.

A három standard hiba az ábráról leolvasható, és megállapítható, hogy a pontok szórása a regressziós egyenestől akkor a legkisebb, ha a feltétel a merőleges eltérések négyzetösszegének minimuma. Ilyen feltétel mellett ugyanis a standard hiba megegyezik az ellipszis kistengelyének a felével. Ebből következik, hogy a másik kettő ennél mindig nagyobb.

A levezetések mellőzésével írjuk fel a három standard-hibát:

$$S=\sqrt{\sigma_x^2-\frac{\sigma_{xy}}{\mu}}=\frac{1}{n}\sqrt{\beta-\frac{\gamma}{\mu}}$$

$$S_y=\sigma_y\sqrt{1-r^2}=\frac{1}{n}\sqrt{\alpha-\frac{\gamma^2}{\beta}}$$

$$S_x=\sigma_x\sqrt{1-r^2}=\frac{1}{n}\sqrt{\beta-\frac{\gamma^2}{\alpha}}$$

A három regressziós egyenesre jellemző, hogy a merőleges eltérések szerinti egyenes mindig a másik kettő közé esik, a két utóbbi által bezárt szög pedig annál kisebb, minél közelebb esik a korrelációs együttható a $+1$, illetve a -1-hez.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az összetartozó értékpárok (ξ_i, η_i) egyik sorát (η) végigszorozzuk f tényezővel, azaz

$$\eta_i'=f\eta_i$$

Ennek megfelelően az

$$\eta'=a'\xi^{\mu'}$$

megközelítő függvény paramétereit keressük.

Térjünk át a lineáris rendszerre:

$$\log\eta'=\mu'\log\xi+\log a',$$

azaz általános formában

$$y'=\mu'x+c'$$

Az előzőkben követett eljárás szerint írhatjuk most is:

$$\alpha'=n\sum_{i=1}^{n}y_i'^2-\sum_{i=1}^{n}y_i'\sum_{i=1}^{n}y_i'$$

$$\beta'=\beta$$

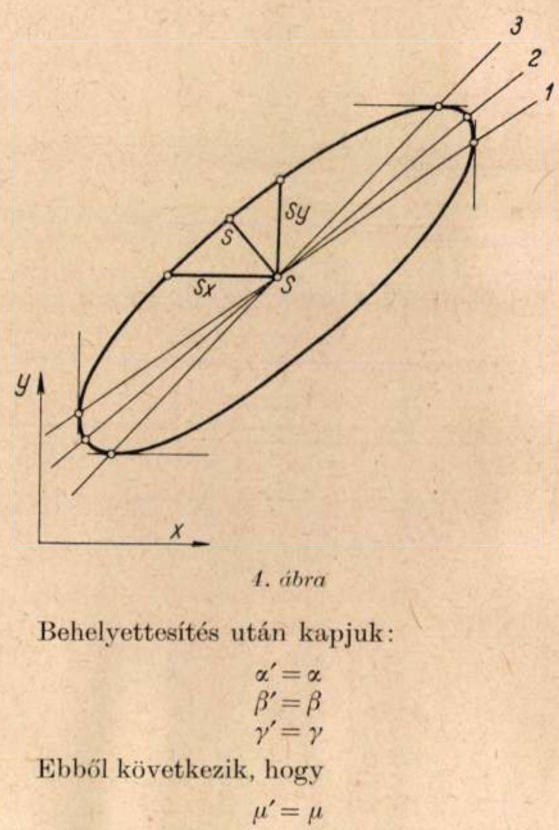
$$\gamma'=n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i'-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i'$$

Mivel

$$\eta_i'=f\eta_i$$

azért

$$y_i'=\log\eta_i'=\log\eta_i+\log f=y_i+\log$$



4. ábra

Behelyettesítés után kapjuk:

$$\alpha'=\alpha$$
$$\beta'=\beta$$
$$\gamma'=\gamma$$

Ebből következik, hogy

$$\mu'=\mu$$

Könnyen belátható, hogy

$$c'=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i'-\mu\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}=c+\log f$$

Ebből viszont következik:

$$a'=fa.$$

A regressziós függvény tehát a következő lesz:

$$\eta'=fa\,\xi^{\mu}$$

Az f-tényező tulajdonképpen arányos torzulási faktor. A regressziós függvények μ-kitevője nem függvénye a torzulási faktornak, a torzulási faktor csak a regressziós függvény együtthatóját (a) torzítja. Ebből következik, hogy a regressziós függvény ilyen formulája mellett az összetartozó értékek (ξ_i, η_i) bármilyen dimenzióban helyettesíthetők.

*

Kövessünk végig egy egyszerű numerikus példát. Legyenek az összetartozó értékpárok a következők:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ξ	680	795	1025	1152	1284	1450	1526	1650	1770
η	152	167	195	197	217	221	238	241	254

10-es alapú logaritmus segítségével áttértünk a lineáris rendszerre és az alábbi adatokra jutunk:

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 20{,}8333 \qquad \sum_{i=1}^{9} x_i = 27{,}7240$$

$$\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 48{,}2703 \qquad \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 85{,}5661$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 64{,}2613$$

Ezek segítségével már az α, β, és γ számítható:

$$\alpha = 0{,}4047$$
$$\beta = 1{,}4755$$
$$\gamma = 0{,}7679$$

Helyettesítsünk be a μ-képletekbe és kapjuk:

$$\mu = 0{,}5219$$
$$\mu_y = 0{,}5205$$
$$\mu_x = 0{,}5270$$

Egyszerűen számíthatók a c-, illetve az a-értékek is:

$$r = 5{,}0956$$
$$a_y = 5{,}1468$$
$$a_x = 4{,}9128$$

A számított adatok segítségével megadható a három regressziós görbe egyenlete kikerekített értékekkel:

$$\eta = 5{,}10\ \xi^{0{,}522}$$
$$\eta_y = 5{,}15\ \xi^{0{,}520}$$
$$\eta_x = 4{,}91\ \xi^{0{,}527}$$

A μ_y és μ_x segítségével kimutatható, hogy az y- és x-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló két egyenes esetünkben kereken 1°-os szöget zár be.

Az *5. ábra* az η-függvényt ábrázolja.

Számítsuk ki a lineáris és az eredeti rendszerre érvényes korrelációs együtthatót, illetve indexet:

$$r = 0{,}99$$
$$I = 0{,}98$$

Számíthatjuk a standard-hibákat is:

$$S = \pm 0{,}0028$$
$$S_y = \pm 0{,}0079$$
$$S_x = \pm 0{,}0151$$

Megállapítható, hogy a felvett példában igen erős pozitív korreláció van: $r = 0{,}99$. A standard-hiba akkor a legkisebb, ha a regressziós függvényt azzal a feltétellel határozzuk meg, hogy a merőleges eltérések négyzetösszege legyen minimum, elvileg tehát az így meghatározott görbe simul legjobban a ponthalmazhoz. Látható az is, hogy a merőleges eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló regressziós egyenes az y- és az x-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló regressziós egyenesek közé esik.

A példa keretében vizsgáljuk meg azt is, hogy a regressziós függvény megválasztott alakja menynyire célszerű. Vegyünk fel evégből új η-sort úgy, hogy az új η'-sor minden tagja 60-nal kisebb az eredeti η-sor tagjainál, a ξ-sor pedig maradjon változatlan.

Legyen tehát az új η'-sor:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
η'	92	107	135	137	157	161	178	181	194

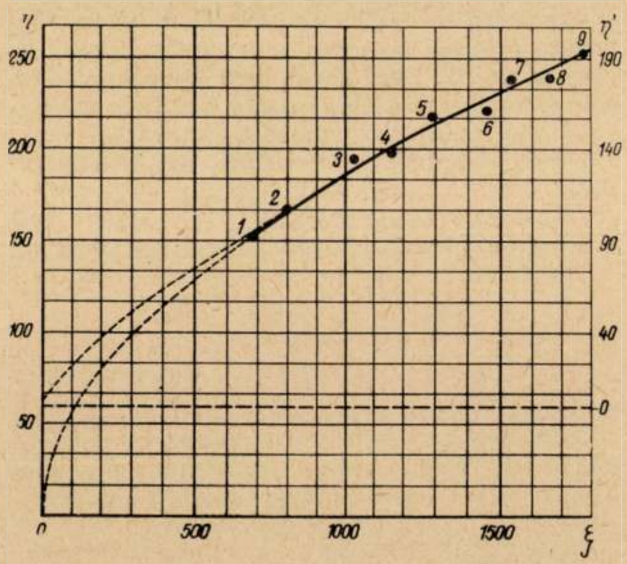
Lineárissá tétel után számíthatók a következők:

$$\sum_{i=1}^{9} y_i' = 19{,}4589 \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i'^2 = 42{,}1664$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 60{,}0655$$

Ezek segítségével adjuk meg a regressziós függvényeket:

$$\eta' = 0{,}673\ \xi^{0{,}758}$$
$$\eta_y' = 0{,}691\ \xi^{0{,}754}$$
$$\eta_x' = 0{,}642\ \xi^{0{,}764}$$



5. ábra

Az *5. ábrán* az η'-függvénynek a görbéje is látható. Megállapítható, hogy a két görbe a ponthalmaz tartományában gyakorlatilag fedi egymást. A gyakorlatban pedig pontok $\xi = 0$ környékén nincsenek.

3. Lineáris egyváltozós regressziós függvény

Egyes esetekben a célnak teljesen megfelelő lehet, ha a regressziós közelítő függvényt lineáris formában választjuk meg:

$$\eta = \bar{a}\xi + \bar{c}$$

Könnyű belátni, hogy a megoldás az előzők alapján adva van.

Ha a megoldás a merőleges eltérések négyzetösszegének minimumán alapszik:

$$\bar{a} = \frac{1}{2\bar{\gamma}}\left[(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \sqrt{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})^2 + 4\bar{\gamma}^2}\right]$$

η-irányú eltérések esetében:

$$\bar{a}_\eta = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$$

ξ-irányú eltérések esetében:

$$\bar{a}_\xi = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\gamma}}$$

ahol

$$\bar{\alpha} = n\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

$$\bar{\beta} = n\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$\bar{\gamma} = n\sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

A $\bar{c}$-értéket az a tény határozza meg, hogy a regressziós egyenes átmegy a kvázi súlyponton.

A nem lineáris egyváltozós regressziós függvény tárgyalásában megismert összefüggés alapján egyszerűen belátható a következő: ha az összetartozó értékpárok soraihoz ugyanazt hozzáadjuk vagy levonjuk, más szóval, ha a koordináta-rendszert önmagával párhuzamosan eltoljuk, akkor az a-tényező, azaz az iránytangens változatlan marad, a $\bar{c}$-érték ellenben az eltolásnak megfelelően változik.

Szorozzuk végig az η-sort f_η-val, a ξ-sort pedig f_ξ-vel. Egyszerűen belátható, hogy ebben az esetben

$$\bar{a}'_\eta = \frac{f_\eta}{f_\xi}\bar{a}_\eta \qquad \bar{a}'_\xi = \frac{f_\eta}{f_\xi}\bar{\alpha}_\xi$$

$$\bar{c}' = f_\eta\bar{c} \qquad \bar{c}'_\eta = f_\eta\bar{c} \qquad \bar{c}'_\xi = f_\eta\bar{c}$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy η-, illetve ξ-irányú eltérések esetében egyértelmű megoldást kapunk a két értéksor dimenziójától függetlenül. Ellenben a merőleges eltérések esetében már a dimenziótól nem független a megoldás, bár a különböző dimenziók szerinti eredmények nem lényegesen térnek el egymástól.

4. Nem lineáris kétváltozós regressziós függvény

Legyen adva n számú három-három összetartozó érték: (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), ..., (ξ_i, η_i, ζ_i), ..., (ξ_n, η_n, ζ_n). Regressziós eljárással határozzuk meg a ponthalmazt megközelítő függvény

$$K_B = bq^\nu L^\omega$$

illetve

$$\zeta = b\xi^\nu \eta^\omega$$

b és ν, ω paramétereit úgy, hogy a megközelítést feltételhez kötjük.

A megoldás ebben az esetben is igen egyszerű, mert a célszerűen megválasztott függvényalak lineárissá tehető:

$$\log\zeta = \nu\log\xi + \omega\log\eta + \log b,$$

azaz általános formában:

$$z = \nu x + \omega y + d$$

Legyen a feltétel az, hogy a z-irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum. Írjuk fel az eltérések négyzetösszegét:

$$\sum_{i=1}^{n} e_{z,i}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[z_i - (\nu_z x_i + \omega_z y_i + d_z)\right]^2$$

Képezzük a

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_{z,i}^2}{\partial\nu_z} = 0$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_{z,i}^2}{\partial\omega_z} = 0$$

$$\frac{\partial\sum_{i=1}^{n} e_{z,i}^2}{\partial d_z} = 0$$

értékeket. Eredményül kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[z_i - (\nu_z x_i + \omega_z y_i + d_z)\right]x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[z_i - (\nu_z x_i + \omega_z y_i + d_z)\right]y_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[z_i - (\nu_z x_i + \omega_z y_i + d_z)\right] = 0$$

A három egyenlet megoldásaképpen az alábbi összefüggésekre jutunk:

$$\nu_z = \frac{\gamma\varepsilon - \alpha\delta}{\gamma^2 - \alpha\beta}$$

$$\omega_z = \frac{\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\gamma^2 - \alpha\beta}$$

ahol $\alpha = n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} y_i$

$$\beta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\gamma = n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i z_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} z_i$$

$$\varepsilon = n\sum_{i=1}^{n} y_i z_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Továbbá

$$d_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i - \nu_z \sum_{i=1}^{n} x_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

illetve

$$d_z = z_s - \nu_z x_s - \omega_z y_s$$

Ez az utóbbi egyenlet azt is jelenti, hogy a regressziós sík átmegy a kvázi súlyponton.

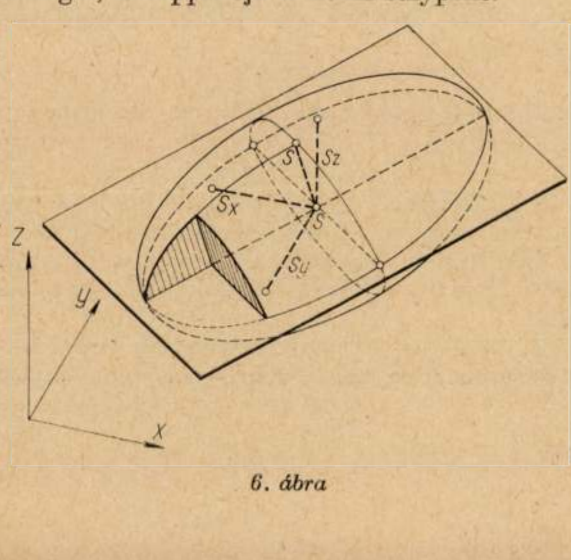
Természetesen szabhatunk olyan feltételt is, hogy az y-, illetve az x-irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum. A szóban forgó körülmények között ilyen feltételek kielégítése azonban általában nem ad pontosabb megoldást, mint a z-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló megoldás, ezeket tehát be sem mutatjuk.

Elvileg pontosabb megoldást kapunk, ha olyan feltételt szabunk, hogy a merőleges eltérések négyzetösszege legyen minimum. Ekkor az alapösszefüggés a következőképpen fejezhető ki:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} [z_i - (\nu x_i + \omega y_i + d)]^2}{1 + \nu^2 + \omega^2}$$

A megoldás harmadfokú egyenletrendszerre vezet, a gyakorlat éppen ezért nem használja. A számítási többletmunka ugyanis nincs arányban a pontosság növekedésével. A gyakorlat csak a z-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló eljárást követi.

Ha két-két összetartozó értékek halmaza helyett három-három összetartozó értékek halmaza adott, a standard hiba ellipszis helyébe standard hiba ellipszoid lép. A lineáris rendszer standard hiba ellipszoidjának két nagyobbik tengelye abban a regressziós síkban fekszik, amelyet akkor kapunk, ha a feltétel a merőleges eltérések négyzetösszegének minimuma. A legkisebb tengely erre a síkra merőleges, középpontja a kvázi súlypont.



6. ábra

A *6. ábrán* a standard hiba ellipszoid látható és megfigyelhetők az egyes standard hibák: S, ha merőleges irányú, S_z, ha z-irányú, S_y, ha y-irányú, S_x, ha x-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapszik a megoldás. Legkisebb mindig S, és esetünkben általában $S_z < S_y$, illetve $S_z < S_x$.

A szorosság mérésére legcélszerűbben a korrelációs indexet használhatjuk:

$$I = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \zeta_i')^2}{\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \zeta_s)^2}}$$

*

Kövessünk végig egy egyszerű számpéldát. Adataink legyenek a következők:

	1	2	3	4	5	6	7	8
ζ	2,1	3,9	4,5	6,0	5,5	7,5	7,6	7,8
ξ	0,6	0,8	1,2	1,7	1,8	2,1	2,4	2,8
η	0,6	2,1	1,4	1,8	0,8	2,2	1,3	1,0

10-es alapú logaritmus segítségével áttérünk lineáris rendszerre és az alábbi adatokra jutunk:

$$\sum_{i=1}^{8} z_i = 5{,}7330 \qquad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 0{,}3792$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 1{,}3958 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 0{,}2174$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 0{,}8613 \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i z_i = 1{,}3071$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 0{,}6315 \qquad \sum_{i=1}^{8} y_i z_i = 0{,}7414$$

Most már számíthatók az alábbi értékek:

$\alpha = 2{,}2915$ $\gamma = 0{,}5366$ $\varepsilon = 0{,}9931$
$\beta = 3{,}1034$ $\delta = 2{,}4545$

Végezetül megadjuk a regressziós függvény egyenletét:

$$\zeta_z = 3{,}62\ \xi^{0,75}\eta^{0,26}$$

A számított korrelációs index közel esik a $+1$-hez, azaz erős pozitív korreláció van.

5. Kétváltozós regressziós függvény egyszerűbb formában

Megválasztható a kétváltozós függvény az alábbi formában is:

$$\zeta = b'\xi\eta + c'$$

Ha most is az a feltétel, hogy a ζ-irányú eltérések négyzetösszege legyen minimum, akkor írható:

$$\sum_{i=1}^{n} e_{\xi,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} [\zeta_i - (b'_\xi \xi_i \eta_i + c'_\xi)]^2$$

Az eddigiekhez hasonló eljárással az alábbi eredményre jutunk:

$$b'_\xi=\frac{n\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\xi_i\eta_i-\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i}{n\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\eta_i^2-\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i}$$

illetve

$$c'_\zeta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\zeta_i-b'_\zeta\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i}{n}$$

Szorozzuk végig a ζ-sort f_ζ-vel, a ξ-sort f_ξ-vel, az η-sort f_η-val. Eredményül kapjuk

$$b''_\zeta=\frac{f_\zeta}{f_\xi f_\eta}b'_\zeta$$

$$c''_\zeta=f_\zeta c'_\zeta$$

Ez azt jelenti, hogy a három sor (ζ, ξ, η) mindegyike bármilyen dimenzióban helyettesíthető: a megoldás egyértelmű.

A kétváltozós függvénynek ez az egyszerűbb formája akkor használható, ha a számított korrelációs index megbízható közelítésről tanúskodik.

6. Lineáris kétváltozós regressziós függvény

Az egyváltozós függvényhez hasonlóan egyes esetekben a célnak megfelelhetünk akkor is, ha a kétváltozós közelítő függvény formáját lineárisnak választjuk meg, azaz közelítő síkot keresünk:

$$\zeta=\bar{a}_\zeta\xi+\bar{b}_\zeta\eta+\bar{c}_\zeta$$

Most is könnyű belátni, hogy az előzők alapján a megoldás adva van. Itt csak a ζ-irányú eltérések négyzetösszegének minimumán alapuló eljárásról van szó. Ennek megfelelően:

$$\bar{a}_\zeta=\frac{\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}-\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\gamma}^2-\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

$$\bar{b}_\zeta=\frac{\bar{\gamma}\bar{\delta}-\bar{\beta}\bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma}^2-\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

ahol $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\varepsilon}$ annyiban különbözik α, β, γ, δ, ε-tól, hogy x, y, z helyébe rendre ξ, η, ζ lép.

A $\bar{c}_\zeta$-értéket az a körülmény határozza meg, hogy a közelítő sík átmegy a kvázi súlyponton (ξ_s, η_s, ζ_s), azaz

$$\bar{c}_\zeta=\zeta_s-\bar{a}_\zeta\xi_s-\bar{b}_\zeta\eta_s$$

Ha a koordináta-rendszert önmagával párhuzamosan eltoljuk, csak a $\bar{c}_\zeta$-érték változik, az $\bar{a}_\zeta$ és $\bar{b}_\zeta$ iránytangensek változatlanok maradnak.

Szorozzuk végig a ζ-sort f_ζ-vel, a ξ-sort f_ξ-vel és az η-sort f_η-val. Eredményül a következőket kapjuk:

$$\bar{a}'_\zeta=\frac{f_\zeta}{f_\xi}\bar{a}_\zeta$$

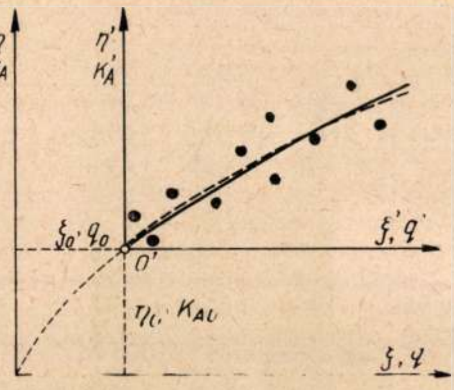
$$\bar{b}'_\zeta=\frac{f_\zeta}{f_\eta}\bar{b}_\zeta$$

$$\bar{c}'_\zeta=f_\zeta\bar{c}_\zeta$$

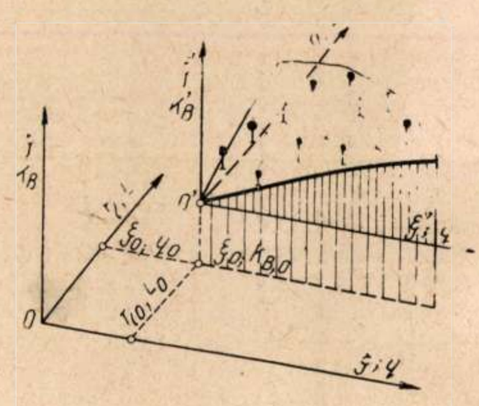
Ez azt jelenti, hogy a három sor (ζ, ξ, η) mindegyike bármilyen dimenzióban helyettesíthető, a megoldás egyértelmű.

7. A regressziós függvény meddő zónája

Az összetartozó értékek (ξ, η, illetve ζ, ξ, η) a gyakorlatban csak egy bizonyos értékhatáron felül jelentkeznek. Igy mind az egyváltozós, mind a kétváltozós függvényeknek meddő zónája keletkezik (*7.*, illetve *8. ábra)*. Egyváltozós regressziós függvény esetében a meddő zónát egy pont határozza meg, kétváltozós függvény esetében a meddő zónákat két pont jelöli ki. A cél az, hogy ezek a meddő zónák minél kisebbek legyenek.



7. ábra



8. ábra

Helyezzük át a tengelyrendszereket. A párhuzamos eltolás mértéke egyváltozós függvénynél ξ_0, illetve

$$\eta_0=a\xi_0^\mu$$

kétváltozós függvényeknél pedig ξ_0, η_0, illetve

$$\zeta_0=b\xi_0^\nu\eta_0^\omega$$

A ξ_0, illetve a ξ_0 és η_0 értékeket úgy kell megválasztani, hogy az új rendszerben a meddő zóna már kicsi legyen, ügyelve arra, hogy az új összetartozó értékek mindegyike nagyobb legyen zérusnál.

Az eltolt helyzetű rendszerben az ismert módon határozhatók meg a regressziós függvények:

$$\eta'=a'\xi'^{\mu'}$$

illetve

$$\zeta'=b'\xi'^{\nu'}\eta'^{\omega'}$$

amikor

$$\zeta' = \zeta - \zeta_0$$
$$\xi' = \xi - \xi_0$$
$$\eta' = \eta - \eta_0$$

A fentiek szerint a regressziós eljárást kétszer kell lefolytatni: először az eredeti összetartozó értékekkel, azért, hogy η_0, illetve ζ_0 számítható legyen, másodszor pedig az eltolt helyzetű rendszerben.

A meddő zónák megközelítő kiküszöbölésével természetesen átalakulnak a regressziós függvények is:

$$\bar{\bar{\eta}} = a\xi_0^{\mu} + a'\xi'^{\mu'} = \eta_0 + a'(\xi - \xi_0)^{\mu'}$$

illetve

$$\bar{\bar{\zeta}} = b\xi_0^{\nu}\eta_0^{\omega} + b'\xi'^{\nu'}\eta'^{\omega'} = \zeta_0 + b'(\xi - \xi_0)^{\nu'}(\eta - \eta_0)^{\omega'}$$

A meddő zónák megközelítő kiküszöbölésének szükségessége elsősorban a kétváltozós regressziós függvény esetében merülhet fel, amikor ezt a függvényt a bányaüzemek legfőbb paramétereinek megállapításánál használhatjuk fel.

*

Végezzük el a legutóbbi számpéldával bemutatott kétváltozós regressziós függvény meddő zónáinak megközelítő kiküszöbölését.

Az eredeti regressziós függvény:

$$\zeta_z = 3{,}62\ \xi^{0{,}75}\eta^{0{,}26}$$

A ponthalmazhoz szorosan záródó értékek:

$$\xi_0 = 0{,}5;\ \eta_0 = 0{,}5$$

A ζ_0-érték számítható:

$$\zeta_0 = 3{,}62 \cdot 0{,}5^{0{,}75} \cdot 0{,}5^{0{,}26} = 1{,}8$$

Az eltolt rendszer összetartozó értékeinek sora tehát:

	1	2	3	4	5	6	7	8
ζ'	0,3	2,1	2,7	4,2	3,7	5,7	5,8	6,0
ξ'	0,1	0,3	0,7	1,2	1,3	1,6	1,9	2,3
η'	0,1	1,6	0,9	1,3	0,3	1,7	0,8	0,5

Az előzőhöz hasonlóan eljárva számítjuk az alábbi értékeket:

$$\alpha' = 9{,}8552 \qquad \gamma' = 5{,}1799 \qquad \varepsilon' = 6{,}9450$$
$$\beta' = 12{,}1252 \qquad \delta' = 10{,}7627$$

Ezek segítségével megadhatjuk a regressziós függvényt eltolt helyzetben:

$$\zeta' = 3{,}80\ \xi'^{0{,}76}\eta'^{0{,}31}$$

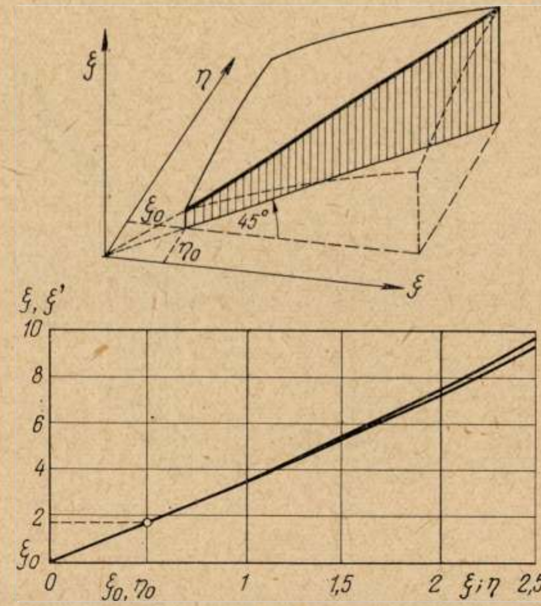
A meddő közök megközelítő kiküszöbölésével átalakított függvény tehát:

$$\bar{\bar{\xi}} = 1{,}8 + 3{,}8\,\xi'^{0{,}76}\eta'^{0{,}31}$$

A *9. ábra* az eredeti és az átalakított függvényt jellemző felület egy metszetét adja. A felületet metsző sík átmegy a ζ'-tengelyen, és a pozitív térnegyedet felezi. Megállapítható, hogy a két görbe gyakorlatilag közel esik egymáshoz.

8. A költségfüggvény gyakorlati meghatározása

A regressziós úton előállított költségfüggvény annál megbízhatóbb, minél több összetartozó érték áll rendelkezésre. Ennek a lehetősége a bányászatban megvan, mert a bányaüzemek termelési kapacitásában és az aknaüzem mindenkori kiterjedésében bő változatosság található.



9. ábra

A költségfüggvény két tagból tevődik össze:

$$K = \frac{K_A}{N} + K_B = \frac{aq^{\mu}}{N} + bq^{\nu}L^{\omega}$$

illetve a fajlagos költségfüggvény:

$$k = \frac{aq^{\mu-1}}{N} + bq^{\nu-1}L^{\omega}$$

Az N az alapberuházási költség visszatérítésének ideje években, ha egyenletes visszatérítésről van szó, és ha a visszatérítési idő megegyezik az üzemidővel. A *10.* illetve *11. ábra* a két függvényt ábrázolja abban az esetben, amikor N megegyezik az években kifejezett üzemidővel.

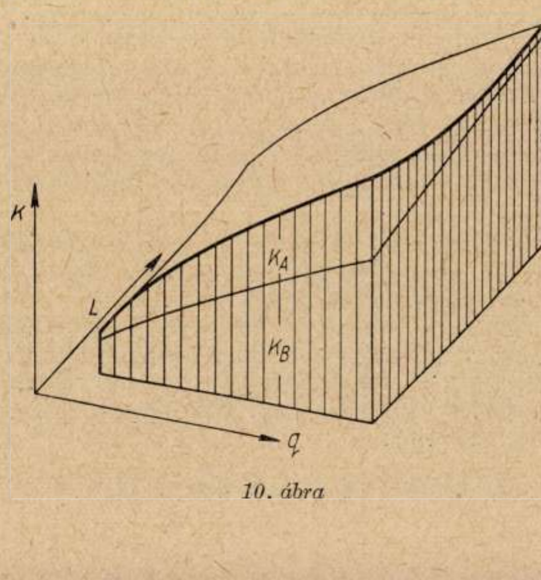
A) Nézzük meg először közelebbről a

$$\xi = a\eta^{\mu}$$

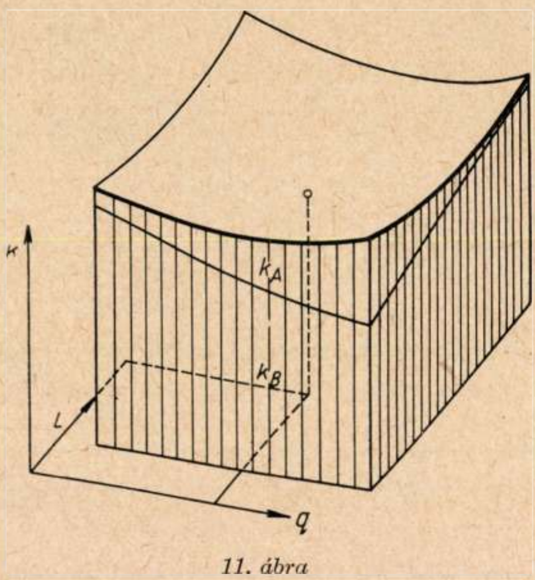
illetve a

$$K_A = aq^{\mu}$$

alapberuházási regressziós költségfüggvényt.



10. ábra



11. ábra

Az alapberuházás költsége alatt azt a tőkebefektetést értjük, amely szükséges ahhoz, hogy az üzem a tervezett termelési kapacitással megindul-jon. Magában foglalja tehát a szükséges külszíni objektumok, aknák, akna környéki állandó bányatérségek megépítésének és berendezéseinek költségét. A tervezett termelési kapacitással való megindulás után idővel a folyamatosság biztosítása érdekében újabb és újabb tőkebefektetésre van szükség. Idővel újabb szinteket kell kiképezni, az aknamező fővonalait meg kell hosszabbítani stb. Ezeknek a folyamatosságot biztosító beruházások költségeit az alapberuházás költségeitől elkülönítjük, más szóval a K_A alapberuházási költségben ezek nem szerepelnek. A folyamatosságot biztosító beruházási költségek a K_B költségben jutnak kifejezésre.

Az alapberuházási költségfüggvény regressziós görbéjének meghatározásához szükséges értékpárokat (K_A, q) feljegyezhetjük már megépült üzemek tényleges adataiból vagy még meg nem épült üzemek tervezési adataiból. Az előbbi általában megbízhatóbb, különösen akkor, ha az üzemek az összegyűjtés időpontját megelőző közeli években épültek meg.

A geológiai és települési viszonyok hatással vannak a beruházási költségre. Ezért célszerűen akkor járunk el, ha csak a hasonló geológiai és települési viszonyokkal rendelkező bányaüzemek adatait fogjuk össze egy csoportba. Az így kapott regressziós függvény egy meghatározott jellegű előfordulásra lesz jellemző. Egy-egy országban 3—4, néha még több ilyen regressziós függvényre is szükség lehet.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a regressziós függvény megválasztott alakja igen alkalmas a ponthalmaz megközelítésére.

Előnye a regressziós beruházási költségfüggvénynek, hogy egy ország más országok regresziós függvényeit is felhasználhatja hasonló körülmények mellett. Legyenek egy külső ország összetartozó értékpárjai:

$$(\xi_1, \eta'_1), (\xi_2, \eta'_2), \ldots, (\xi_i, \eta'_i), \ldots, (\xi_n, \eta'_n)$$

a hazai értékpárok pedig:

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_i, \eta_i), \ldots, (\xi_n, \eta_n),$$

amikor

$$\eta_i = f\eta'_i$$

ahol f a pénznemek átszámítási kulcsa.

Ha most már a hazai pénzre átszámított értékpárokkal követnénk végig a regressziós eljárást, arra az eredményre jutnánk, hogy a μ-érték ugyanaz, mint a külső ország összetartozó értékpárjaiból kapott μ-érték, az a-érték ellenben megváltozik:

$$a = fa'$$

Ebből következik, egy külső ország regressziós függvénye:

$$K'_A = a'q^{\mu}$$

a hazaira egyszerűen alakítható át:

$$K_A = fa'q^{\mu} = aq^{\mu}$$

A rendelkezésre álló irodalmi adatok alapján meghatározható volt néhány előfordulás regressziós alapberuházási költségfüggvénye.

1. Szovjetunió *Kuznyeck* szénmedencéjében a külfejtések regressziós alapberuházási költségfüggvénye (K_A[10^6 rubel], q [10^6 t/év]):

$$K_A = 135q^{0,79}$$
$$I = 0,98$$
$$n = 19$$

2. Szovjetunió *Dnyeper* szénmedencéjének külfejtései:

$$K_A = 155q^{0,75}$$
$$I = 0,90$$
$$n = 12$$

3. Szovjetunió *egyéb* szénmedencéinek külfejtései:

$$K_A = 148q^{0,69}$$
$$I = 0,91$$
$$n = 20$$

4. Az 1., 2., 3. alatti külfejtések együttesen:

$$K_A = 142q^{0,76}$$
$$I = 0,94$$
$$n = 51$$

5. Szovjetunió különböző *vasércelőfordulásainak* külfejtései:

$$K_A = 61q^{0,86}$$
$$I = 0,91$$
$$n = 28$$

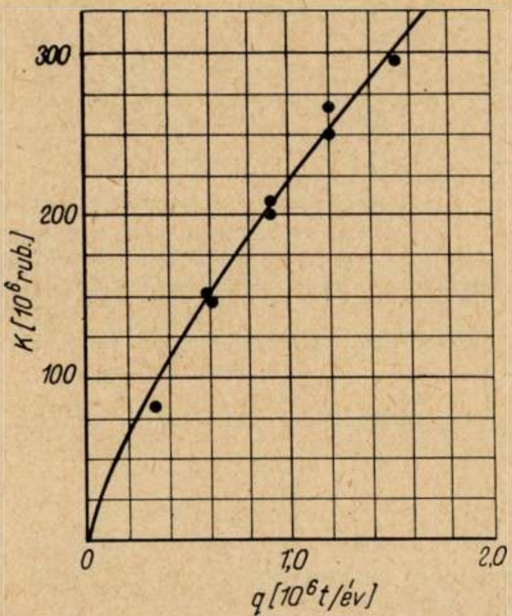
6. Német Demokratikus Köztársaság szénkülfejtései: (K_A[10^6DM], q[10^6 t/év]):

$$K_A = 78q^{0,52}$$
$$I = 0,99$$
$$n = 3$$

7. Szovjetunió *Donyec*-medence mélyművelésű bányái:

$$K_A = 216q^{0,80}$$
$$I = 0,98$$
$$n = 8$$

8. Szovjetunió n_1 számú, a *Donyec*-medencén kívüli mélyművelésű bányája, és n_2 számú véletlen



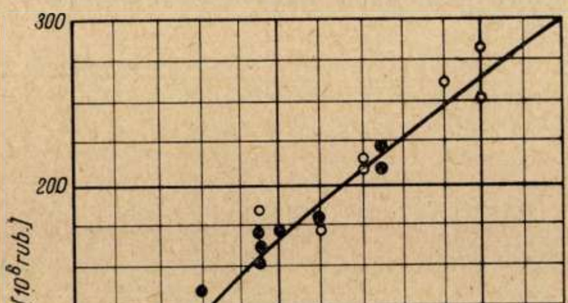
12. ábra

jelleggel kiválasztott külfejtése:

$$K_A = 161q^{0,69}$$
$$I = 0,97$$
$$n_1 = 15$$
$$n_2 = 9$$
$$n = 24$$

A *12. ábrán* a *Donyec*-medence (7) regressziós görbéje, a *13. ábrán* pedig a Szovjetunió $n_1 = 15$ számú mélyművelésű és $n_2 = 9$ számú külművelésű bányájának (8) regressziós görbéje látható.

A bemutatott esetek azt igazolják, hogy erős pozitív korreláció van a termelési kapacitás és a beruházási költség között, a korrelációs index ugyanis minden esetben közel áll az egységhez. A (8) eset szerint ez még abban a különleges esetben is fennáll, amikor mélyművelésű és külszíni üzemeket együtt vontunk be a regressziós eljárásba. Megállapítható az is, hogy a regressziós függvény



13. ábra

felvett alakja igen jó simulást biztosít a ponthalmazhoz.

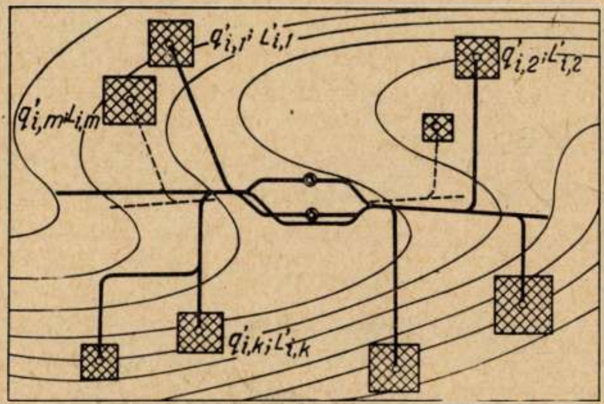
Általában az alapberuházási regressziós függvény kitevője kisebb az egységnél, azaz az alapberuházási költség a termelési kapacitás változásával nem proporcionálisan, hanem degresszív módon változik.

B) Az alapberuházási költség nélküli üzemi költség a működő bányaüzemeknél könnyen beszerezhető. A regressziós függvény előállításához három-három összetartozó érték (K_B, q, L) gyűjtése szükséges. Természetesen geológiailag hasonló üzemeket sorolunk egy csoportba.

Az adatok összegyűjtése megbízható könyvelés esetén nem okoz gondot, így a

$$K_B = bq^{\nu} L^{\omega}$$

regressziós függvény b, ν és ω paramétereinek meghatározása viszonylag egyszerű.



14. ábra

Egy bányaüzemben az egy évi termelési mennyiség (q) különböző fejtésekből, fejtési területekről kerül ki *(14. ábra)*. Az egyes fejtésekből, fejtési területekről kitermelt mennyiség adva van:

$$q'_{i,1}, q'_{i,2}, \ldots, q'_{i,k}, \ldots, q'_{i,m};$$

azaz

$$q_i = \sum_{k=1}^{m} q'_{i,k}$$

Ugyancsak megállapítható az egyes fejtésekhez, fejtési területekhez tartozó és a kérdéses évre vonatkozó súlyponti távolság is:

$$L'_{i,1}, L'_{i,2}, \ldots, L'_{i,k}, \ldots, L'_{i,m}$$

Ezek segítségével képezhető a súlyozott átlagos mozgatási távolság:

$$L_i = \frac{\sum_{k=1}^{m} q'_{i,k} L'_{i,k}}{\sum_{k=1}^{m} q'_{i,k}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} q'_{i,k} L'_{i,k}}{q_i}$$

Az összetartozó értékek (K_B, q, L) sora hozható létre. Az összetartozó értékek képe egy térbeli pont. Arra kell törekedni, hogy a pontok száma (n)

minél nagyobb legyen. Ennek megvan a lehetősége: egyrészt egy üzemen belül több év adatai használhatók fel, másrészt több hasonló jellegű üzem vonható egy eljárás keretébe a közös regressziós függvény paramétereinek meghatározása érdekében.

C) A regressziós költségfüggvény alapja annak a tervező munkának, amelynek célja a létesítendő bányaüzem legfőbb paramétereinek meghatározása. A létrehozott regressziós fügvény nemcsak egy jellegzetes előfordulásra érvényes, hanem arra az időszakra is, amelyből az összetartozó értékek származnak. A terv ezzel szemben a jövőre szól. A technikai fejlődés természetesen a költségekre is hatással van.

A tervezett időszakra megbecsülhető egy olyan f faktor, amely a költségek várható változását fejezi ki. Az f faktor birtokában a regressziós függvény könnyen átalakítható. Legyen például a beruházási költség jelenleg érvényes regressziós függvénye:

$$K_A = 135q^{0{,}79}$$

a várható faktor $f = 0{,}85$

Mint már korábban láttuk, a μ-érték (0,79) változatlan marad, az a együttható helyébe a' lép, azaz:

$$K'_A = 0{,}85 \cdot 135q^{0{,}79} \doteq 115q^{0{,}79}$$

Ha a költségfüggvény mindkét tagjára ugyanaz az f faktor érvényes, akkor az f faktor kiemelhető:

$$K = f(K_A + K_B)$$

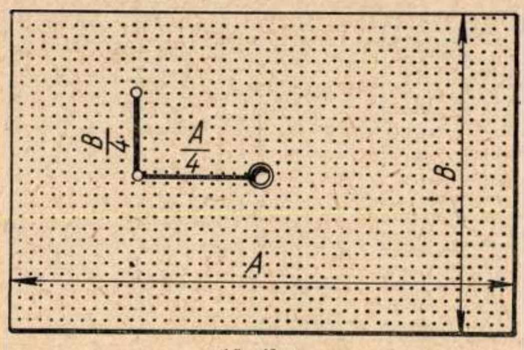
Könnyű belátni ebben az esetben, hogy a költségfüggvény minimumhelye független az f faktortól. Módosított költségfüggvényre tehát csak akkor lehet szükség, ha a költségfüggvény egyes tagjainak f faktora számottevően eltérő. Arányos technikai fejlődés mellett ez nem várható.

D) Az évi regressziós költségfüggvény két tagját (K_A, K_B) a meglevő üzemek összegyűjtött adataiból kapjuk. Új üzemek legfőbb paramétereinek (q, L) tervezésében a fajlagos költségfüggvényt használjuk:

$$k = \frac{aq^{\mu-1}}{N} + bq^{\nu-1}L^{\omega}$$

Amikor az üzemi adatokat gyűjtjük össze, az L-érték az összegyűjtés időtartamára érvényes súlyozott átlagos mozgatási távolságot jelenti függetlenül attól, hogy eben az időtartamban mekkora az adatot szolgáltató, működő üzem kiterjedése. A tervezés alapját szolgáló fajlagos költség összefüggésében az L-érték helyett F-értékkel operálunk, amikor F a tervezett üzem kiterjedését jelenti km²-ben. Természetesen az L-érték és az F-érték között szoros összefüggés van, azaz az L és F nem jelentenek független változókat.

Vegyünk fel egy derékszögű négyszög alakú modellt *(15. ábra)*, és ez képviselje a tervezett aknamezőt. Az is feltétel természetesen, hogy az aknamező nagysága szabadon választható meg.



15. ábra

Legyen továbbá a két oldal közötti arány λ, azaz

$$B = \lambda A,$$

és legyen az akna a középpontban.

Ha a modellben Q_0, azaz a felületegységről kitermelhető ásványvagyon állandó, felírható az alábbi összefüggés:

$$F = AB = \lambda A^2$$

Mivel

$$L = \frac{A+B}{4} = \frac{A}{4}(1+\lambda)$$

azért

$$F = 16\lambda \frac{L^2}{(1+\lambda)^2}$$

Ha $\lambda = 1$, akkor

$$F = 4L^2$$

illetve

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{F}$$

A modell szerint a mozgatás egymásra merőleges irányokban bonyolódik le (pl. csapásmenti fővonalak és keresztvágatok). A λ megegyezik az egységgel, vagy ahhoz közel esik, ha szintművelésses rendszerről van szó. Ha a bányaművelés táblás rendszerben folyik és ha A az átlagos csapásban, B az átlagos dőlésben fekszik, akkor a λ kisebb az egységnél.

A λ-érték akkor lesz egyenlő az egységgel, ha a két irányban lebonyolódó mozgatás fajlagos költségei azonosak vagy gyakorlatilag azonosak. Ha a két irányban a fajlagos költségek számottevően különböznek, akkor a két irányú mozgatás költségeit célszerű szétválasztani. Ilyen eset leginkább a táblás művelési rendszerben fordul elő. Itt ugyanis a csapásirányú mozgatás fajlagos költségei általában kisebbek, mint a ferdeirányú (siklós és ereszkés) mozgatás költségei.

A λ-érték meghatározásába csak mozgatási költségek szólnak bele. Ide tartoznak a bányaszállítás, a személyközlekedés, a víztelenítés, a szellőztetés költségei. A λ-érték egyébként szoros öszefüggésben áll az akna telepítési helyével, amiről más helyen esik szó.

Ha az akna nincs a középpontban, akkor általában

$$L = \varphi_A A + \varphi_B B$$