Dr. KOLLÁR LAJOS,
a műszaki tudományok doktora

LÉCRÁCSHÉJAK KONTINUUM-EGYENLETEI

1. BEVEZETÉS

Nagy terek lefedésének egyik szellemes megoldása a (többnyire fából készült) lécrácshéj [2], amelyet úgy építenek meg, hogy a földön négyzethálós (vagy más) alakban lazán összecsavarozzák a folytatólagos léceket (1. kép), majd felemelik a kívánt alakú felületre, s e helyzetben rögzítik a peremeken (2. kép). A lécek e művelet során általában kétirányú hajlítást és csavarást szenvednek, s egymással bezárt szögük, amely eredetileg derékszög volt, eltorzul.

A következőkben célul tűzzük ki a lécrácshéj belső erőit és alakváltozásait leíró kontinuum-differenciálegyenletek felírását.

2. FELTEVÉSEK

Az egyes lécek folytonosak; egymáshoz a csomópontokban csavarokkal vannak rögzítve, amelyek akadálytalanul lehetővé teszik, hogy a két léc a héjfelület érintősíkjában egymáshoz képest elforduljon.

A lécek egyik keresztmetszeti főiránya merőleges a héjfelületre, a másik beleesik az érintősíkba.

A lécek hosszváltozása elhanyagolhatóan kicsi.

A lécrácshéj felülete oly mértékben laposnak tekinthető, hogy érvényesek rá a laposhéj-elmélet közelítései, így az is, hogy az alaprajzban derékszögű négyzet- (vagy téglalap-)háló a héjfelületen elhelyezkedve is közelítően derékszögű háló marad.

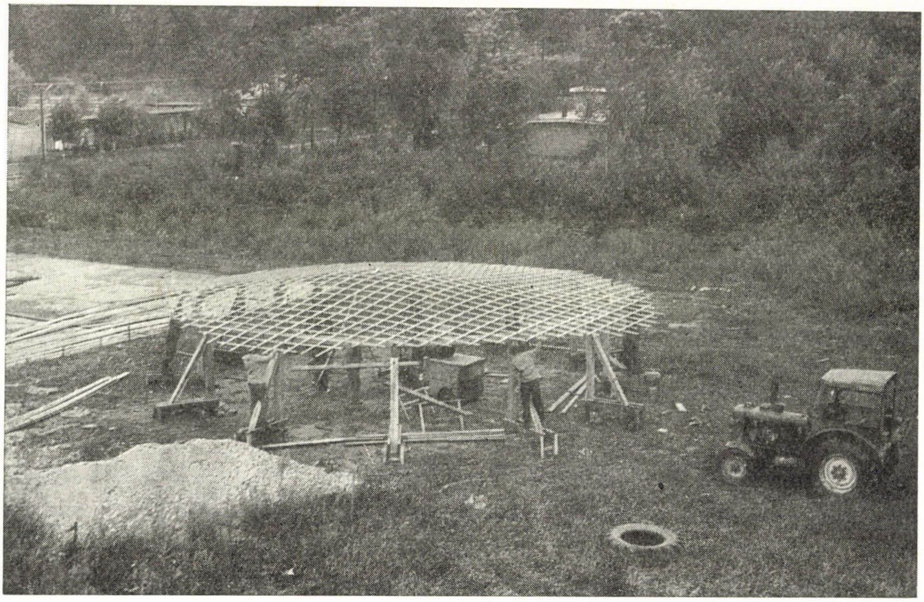
A lécek elég sűrűn helyezkednek el ahhoz, hogy a lécrácshéj belső erőit egy kontinuum metszeterőivel írhassuk le. Ehhez az egyes lécekben fellépő erőket, ill. nyomatékokat el kell osztanunk a lécre merőleges b_x (vagy b_y) távolsággal, hogy fajlagos erőket, ill. nyomatékokat kapjunk. E közelítés jogosságának feltételeit [4]-ben tisztáztuk.

A kontinuum harántkontrakciós tényezőjét zérusnak vesszük ($\nu = 0$).

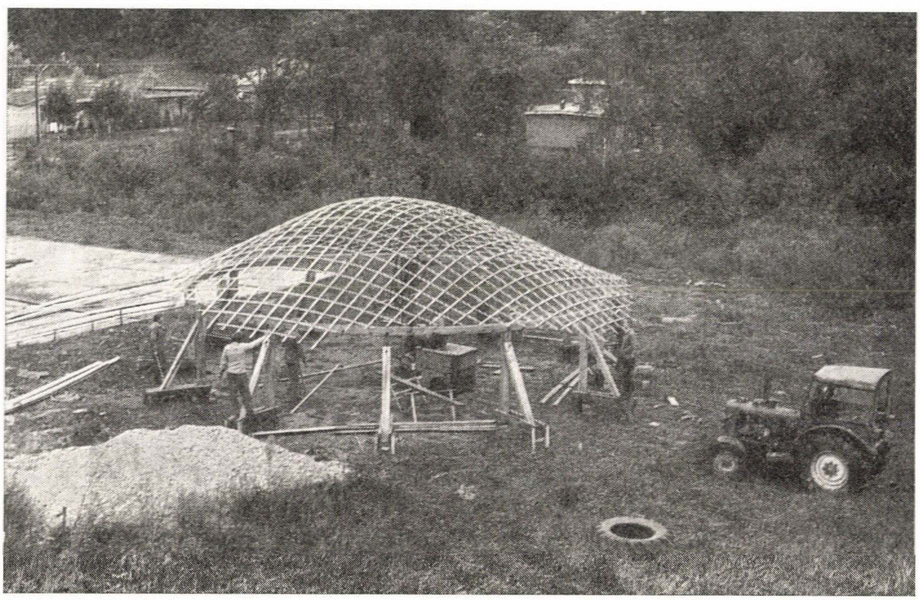
A szerkezetre csak függőleges p_z teher hat.

3. AZ EGYENSÚLYI EGYENLETEK

A lécrácshéjban a 3a, 4a és 5. ábrákon vázolt belső erők ébrednek. Ezek közül a 3a. és 4a. ábrán szereplőknek van egyenértékű párjuk a folytonos hajlított laposhéjban (3b. és 4b. ábrák). Az 5. ábrán látható belső lécrácserőknek megfelelő erők azonban már nincsenek meg a folytonos héjban, így a lécrácshéjnak egy magasabbrendű, általánosabb (poláros) kontinuum felelhet csak meg, amelyben megvannak az 5. ábrának megfelelő belső erők is.



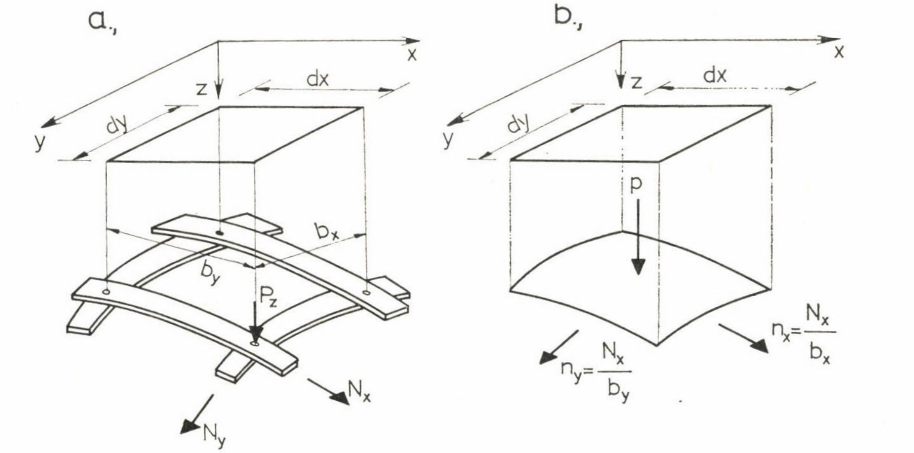
1. ábra



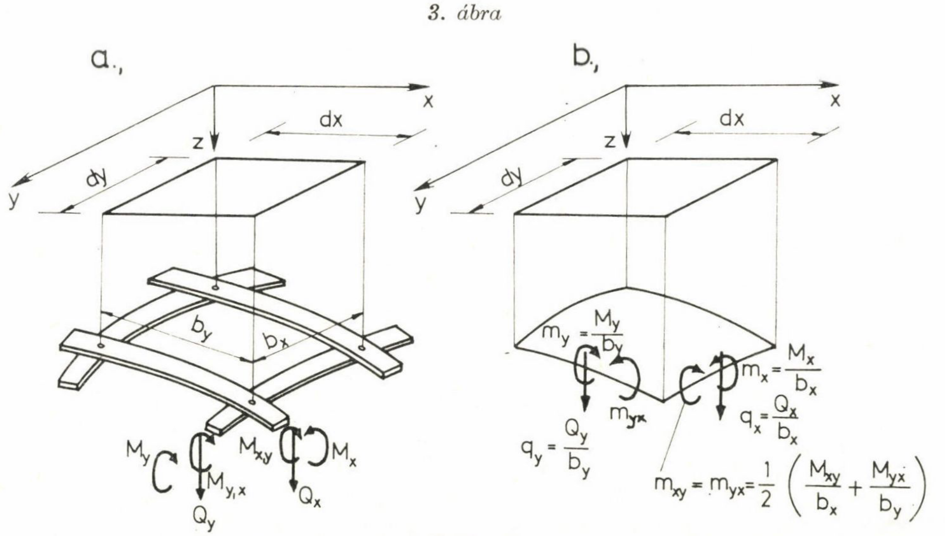
2. ábra

A 3. ábra erőivel kapcsolatban azt kell megemlítenünk, hogy a lécrácshéjban nem ébred a folytonos héj n_{xy} membrán-nyíróerejének megfelelő erő, mivel az egyes négyzeteknek önmagukban nincs nyírási ellenállásuk. Ezért szerepel a 3b. ábrán $n_{xy} = n_{yx} = 0$. Az 5. ábrán látható $T_{z,x}$ és $T_{z,y}$ nyíróerők ugyan látszólag a folytonos héj n_{xy} és n_{yx} erőinek felelnek meg, valójában azonban alapvető különbség van köztük. $T_{z,x}$ és $T_{z,y}$ az egymásra merőleges léceknek, mint a héj érintősíkjában hajlított tartóknak a „saját" nyíróerői, ezek azonban nincsenek egymással az $n_{xy} = n_{yx}$ összefüggésnek megfelelő közvetlen kapcsolatban, mivel két, egymástól független hajlított tartóban keletkeznek, s ezért nem egymással, hanem e tartók hajlítónyomatékának megváltozásával tartanak egyensúlyt.

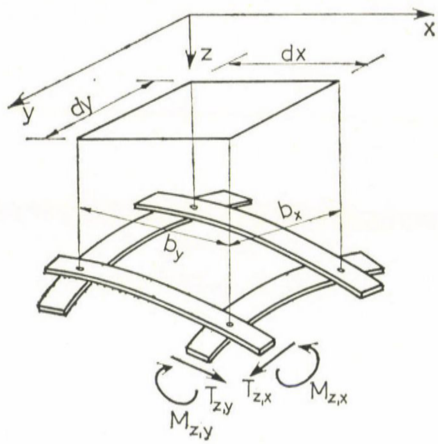
A lécrácsnak ezt a tulajdonságát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nincs közvetlen nyírási ellenállása: a 6a. ábrán vázolt alakváltozás (γ = konst.) ellen-



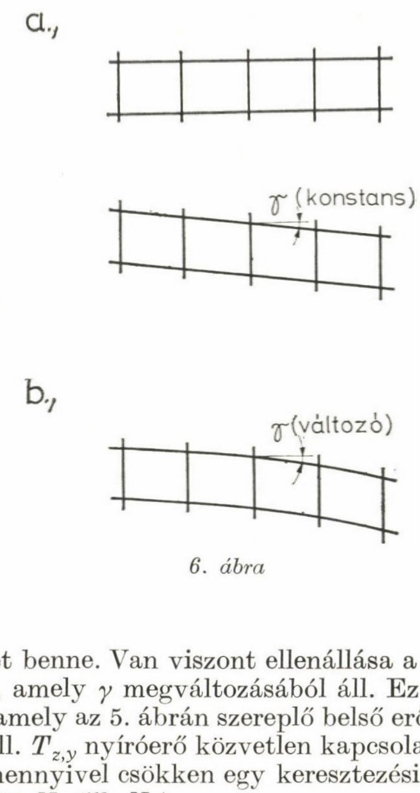
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

állás nélkül létrejöhet benne. Van viszont ellenállása a 6b. ábrán látható alakváltozással szemben, amely γ megváltozásából áll. Ez a gerenda érintősíkbeli hajlítási merevsége, amely az 5. ábrán szereplő belső erőkkel van kapcsolatban.

Az említett $T_{z,x}$, ill. $T_{z,y}$ nyíróerő közvetlen kapcsolatban áll a másik irányú léc derékerőjével: amennyivel csökken egy keresztezési pontban $T_{z,x}$ (ill. $T_{z,y}$), annyival növekszik itt N_y (ill. N_x).

Mindezek alapján derékszögű koordinátarendszerben a következő egyensúlyi egyenletek adódnak a helyettesítő kontinuum metszeterőire (az x szerinti deriválást vesszővel, az y szerintit ponttal jelölve):

Vetületi egyensúly az x és az y irányban:

$$\frac{T_{z,y}^{\cdot}}{b_y} = n_x', \tag{1}$$

$$\frac{T_{z,x}'}{b_x} = n_y^{\cdot}. \tag{2}$$

A z irányban vett vetületi egyensúlyi egyenletet a laposhéj-elmélet alapján [1], [1a] így írhatjuk fel (figyelembe véve, hogy $n_{xy} = 0$):

$$n_x(z'' + w'') + n_y(z^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) + q_x' + q_y^{\cdot} + p_z = 0. \tag{3}$$

Ebben az egyenletben

z — a héjfelületnek az xy síktól mért ordinátája terheletlen állapotban („szerelési alak"),

w — a héjfelület pontjainak a felületre merőleges eltolódása. Az y és az x tengely körül forgató nyomatékok egyensúlyát szintén a laposhéj-elméletből vehetjük át:

$$m_x' + m_{xy}^{\cdot} - q_z = 0, \tag{4}$$

$$m_{xy}' + m_y^{\cdot} - q_y = 0. \tag{5}$$

Végül a z tengely körül forgató nyomatékok egyensúlyát nem szükséges külön felírnunk, mivel ezt a követelményt a lécekre, mint a héj érintősíkjában hajlított tartókra érvényes $T_{z,x} = M_{z,x}'$, ill. $T_{z,y} = M_{z,y}^{\cdot}$ összefüggések biztosítják.

A (3) egyenletben a görbületek kifejezésében z — n kívül w deriváltjait is szerepeltettük, azaz ezt az egyenletet nem az „eredeti" (z-vel meghatározott) alakra írtuk fel, hanem a (terhelés folytán) megváltozott alakra, vagyis a „nagy alakváltozásos" elméletet használtuk. Ha megelégszünk a „kis alakváltozásos" elmélettel, akkor (3)-ból törölhetjük a két w-deriváltat.

4. A METSZETERŐK KIFEJEZÉSE AZ ELTOLÓDÁSOKKAL

Ha az x, ill. y irányú eltolódást u-val, ill. v-vel jelöljük, akkor a folytatólagos léceknek, mint a héjfelület érintősíkjában hajlított tartóknak a belső erői a szokásos képletekkel fejezhetők ki:

$$v'' = -\frac{M_{z,x}}{EI_{z,x}}, \tag{6a}$$

$$v''' = -\frac{T_{z,x}}{EI_{z,x}}, \tag{6b}$$

$$v'''' = -\frac{T_{z,x}'}{EI_{z,x}}; \tag{6c}$$

$$u^{\cdot\cdot} = -\frac{M_{z,y}}{EI_{z,y}}, \tag{7a}$$

$$u^{\cdot\cdot\cdot} = -\frac{T_{z,y}}{EI_{z,y}}, \tag{7b}$$

$$u^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = -\frac{T^{\cdot}_{z,y}}{EI_{z,y}}. \tag{7c}$$

Ezekben a képletekben $EI_{z,x}$, ill. $EI_{z,y}$ az x, ill. y irányú léc-gerendáknak a héj érintősíkjában bekövetkező hajlítás során szerephez jutó (azaz a z tengelyre vonatkozó) hajlítási merevsége.

A továbbiakban u_0, v_0-val fogjuk jelölni a szerelési alak előállítása során keletkező x, y irányú eltolódásokat, a terhelés hatására létrejövőket pedig u, v-vel.

A (4) és (5) egyenletekben szereplő lemeznyomatékok a héjfelület görbületeivel és elcsavarodásával, valamint a héjfelületre merőleges w elmozdulással fejezhető ki:

$$m_x = -\frac{EI_x}{b_z}(z'' + w''), \tag{8}$$

$$m_y = -\frac{EI_y}{b_y}(z^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}), \tag{9}$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{2}\left(\frac{GI_{tx}}{b_x} + \frac{GI_{ty}}{b_y}\right)(z'^{\cdot} + w'^{\cdot}), \tag{10}$$

ahol EI_x, ill. EI_y az x, ill. y irányú léc-gerendáknak a héjra merőleges síkban bekövetkező hajlításakor szerephez jutó hajlítási merevsége, GI_{tx}, ill. GI_{ty} pedig ugyanezen gerendáknak a csavarási merevsége.

A (8)—(10) egyenletekben z második deriváltjai azt fejezik ki, hogy a lécekben a kívánt szerelési alakba történő meggörbítés okozza a nyomatékok egy részét, w második deriváltjai pedig azt mutatják, hogy más részüket a z szerelési alaktól mért w elmozdulás hozza létre.

Most még az (1) és (2) egyenletekben szereplő n_x és n_y derékerőket kellene kifejeznünk a saját lécek irányába eső eltolódásokkal. Ez azonban a lécek nyúlásmentességére vonatkozó feltevésünk miatt nem lehetséges. Helyette magának a nyúlásmentességnek a feltételét tudjuk felírni.

A szerelési alak előállítása során fennálló nyúlásmentesség feltétele nem fejezhető ki egyszerű egyenlettel, mivel a szerelési alak z ordinátája semmiképpen sem tekinthető ,,kis'' eltolódásnak. E követelmény teljesülését tehát egy, a nagy eltolódásokra is érvényes módszerrel kell leírnunk, amilyen pl. [3]-ban található, s amely megadja a z-hez tartozó u_0 és v_0 eltolódásokat.

A terhelés hatására bekövetkező alakváltozás nyúlásmentes voltát a kis elmozdulásokra érvényes

$$u' - w(z'' + w'') = 0 \tag{11}$$

és

$$v^{\cdot} - w(z^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) = 0 \tag{12}$$

egyenletek fejezik ki, l. pl. [6]-ban. Ezekből az egyenletekből a legtöbb esetben elhagyhatjuk a w'' és $w^{\cdot\cdot}$ tagokat, mert kicsik z megfelelő deriváltjaihoz képest.

Az n_x és n_y derékerőket azonban összefüggésbe tudjuk hozni a merőleges lécek u, v eltolódásaival, mégpedig oly módon, hogy $T'_{z,x}$-t és $T^{\cdot}_{z,y}$-ot (6c)-ből és (7c)-ből kifejezzük és behelyettesítjük (1)-be és (2)-be (különválasztva u_0, v_0-t és u, v-t):

$$n'_x = -\frac{EI_{z,y}}{b_y}(u_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + u^{\cdot\cdot\cdot\cdot}), \tag{13}$$

$$n^{\cdot}_y = -\frac{EI_{z,x}}{b_x}(v_0'''' + v''''). \tag{14}$$

5. AZ EGYENLETEK FELÍRÁSA AZ ELTOLÓDÁSOK SEGÍTSÉGÉVEL

Helyettesítsük be (8), (9), (10)-et (4)-be és (5)-be, majd fejezzük ki belőlük q_x-et és q_y-t és helyettesítsük be (3)-ba:

$$\begin{gathered} n_x(z'' + w'') + n_y(z^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot}) - \frac{EI_{x,n}}{b_x}(z'''' + w'''') - \\ - \left(\frac{GI_{tx}}{b_x} + \frac{GI_{ty}}{b_y}\right)(z''^{\cdot\cdot} + w''^{\cdot\cdot} - \frac{EI_{y,n}}{b_y}(z^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) + p_z = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Ehhez járul még a két nyúlásmentességi egyenlet, (11) és (12), amelyeket a szerelési alak meghatározásakor az említett, [3]-ban található módszerrel kell pótolnunk.

Ily módon tehát három egyenletünk van a három eltolódásfüggvényre, de (15)-ben szerepel még n_x és n_y, s ezeket nem tudjuk kiküszöbölni. E három egyenlethez tehát hozzá kell még vennünk (13)-at és (14)-et, azaz öt egyenletünk lesz az öt ismeretlen mennyiségre (n, v, z azaz w, n_x, n_y).

6. AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSI ELVE

Egyenletrendszerünket két különböző esetre kell megoldanunk: a szerelési alak előállítására és a terhekre.

Ha a *szerelési alakot* akarjuk vizsgálni, akkor

$$u = v = w = 0. \tag{16}$$

Felvesszük a kívánt $z(x, y)$ szerelési alakot, célszerűen valamilyen függvénysor formájában. Meghatározzuk (pl. [3] alapján) az ehhez tartozó u_0, v_0 függvényeket, azaz a lécek vízszintes eltolódásait, s ebből (13)-ból és (14)-ből n'_x-t és $n^{\cdot}_y$-ot. Integrálással előállítjuk n_x-et és n_y-t, majd behelyettesítjük (15)-be. Így z-re kapunk egy feltételi egyenletet, amelyben még az n_x és n_y integrálásakor fellépő két ismeretlen egyváltozós függvény is szerepel. Ebből meghatározzuk z-t, majd ebből kiindulva, megismételjük az eljárást. Az iterációt addig folytatjuk, amíg a (11)-ből kapott z kellő pontossággal nem egyezik meg a kiindulási z-vel.

Egyszerűsíthetjük a feladatot, ha közelítésképpen elhanyagoljuk a lécrácshéj önsúlyát ($p_z = 0$). Ekkor tulajdonképpen a lécrácshéj nagy alakváltozásos horpadási alakját határozzuk meg.

Ha ismerjük a z szerelési alakot, és *adott* p_z *teherre* keressük a lécrácshéj alakváltozását és belső erőit, akkor a feladat bonyolultabbá válik. Megtehetjük azonban, hogy több lépésben határozzuk meg a megoldást, s az első lépésekben közelítéseket alkalmazunk. Így az első lépésben elhanyagolhatjuk u-t és v-t, azaz n_x-et és n_y-t változatlan nagyságúnak tételezhetjük fel.

Egy következő dolgozatban szándékozunk bemutatni a fentiek alkalmazását számpélda keretében.

IRODALOM

[1] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Aufl. Springer, Berlin(Göttingen)-Heidelberg 1962.

[1a] Flügge, W.: Stresses in Shells. Springer, Berlin (Heidelberg) New York, 1973.

[2] Happold, E.—Liddell, W. I.: Timber Lattice Roof for the Mannheim Bundesgartenschau. In: The Structural Engineer *53* (1975), 99—135.

[3] Hegedüs, I.: Computation of the Stretched Network Shape of Timber Lattice Shells. In: Acta Techn. Acad. Sci. Hung.

[4] Kollár, L.—Hegedüs, I.: Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method. Publ. House Hungarian Academy of Sciences, Budapest, és Elsevier Scientific Publ. Corp., Amsterdam, 1983.

[5] Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th Ed. Dover Publ. New York, 1944.

[6] Timoshenko, S. P.—Gere, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York/Torontó/London, 1961.