MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

EGY FOLYAMATOS NYILVÁNTARTÁS SZTOCHASZTIKUS KÉSZLETGAZDÁLKODÁSI MODELL ISMERTETÉSE ÉS ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATA

dr. Gerencsér László

BEVEZETÉS

Folyamatos nyilvántartású készletgazdálkodáson azt értjük, hogy a készletek szintje, és az azokban bekövetkező változások állandó ellenőrzés allatt állnak, szemben a korábbi gyakorlattal, amikor a készletek felülvizsgálata meghatározott időközönként (pl. negyedévenként) történt. A modell szokásos elnevezése: r,Q modell, ahol r egy alsó biztonsági szint, Q a tételnagyság. A modell alkalmazásának előfeltétele a teljesen gépesített adatfeldolgozás. Ez a feltétel számos külföldi vállalatnál adva van, s ezért a folyamatos nyilvántartási készletgazdálkodási modellek alkalmazása elterjedt, amennyire ezt a szakirodalom tükrében megítélhetjük. A modell a hazánkban is alkalmazott s,S modell egy továbbfejlesztése és több előnyös új tulajdonsággal bír. A dolgozatban a modell leírásán túl a költségfüggvény vizsgálatára összpontosítjuk figyelmünket. Megmutatjuk, hogy ez jó közelítéssel konvex függvény. Diszkutáljuk az optimális r_0,Q_0 paraméterekre kapott egyenleteket, valamint r_0,Q_0 függését a modell bemenő paramétereitől.

1. A MODELL LEIRÁSA

A modell egyetlen cikk készletezésével foglalkozik. A cikkel szemben jelentkező igényeket egy független és stacionárius növekményű sztochasztikus folyamat írja le.

Felsoroljuk a modell előre megadott jellemzőit:

$f(x,t)$	a t idő alatt beérkező igény sűrűségfüggvénye
λ	az igények átlagos sebessége
τ	szállítási idő
A	rendelési költség
IC	idő- és mennyiségarányos készletezési költség
$\hat{p}$	idő- és mennyiségarányos hiányköltség.

A folyamat ellenőrzésen azt értjük, hogy amint a készletállapot elér egy általunk előírt r alsó szintet, feladunk egy rendelést Q nagyságú tételre. A feladott rendelés fix τ fix idő után érkezik meg.

Jelölje D az időegységre eső átlagkészletet, B az időegységre eső átlaghiányt. Mivel a rendelés feladásának gyakorisága átlagosan $\frac{\lambda}{Q}$, az egy időegységre eső átlagos költségre a

(1.1) $$K(r,Q) = \frac{\lambda}{Q} A + ICD + \hat{p}B$$

kifejezést írhatjuk fel. A B átlaghiány kiszámításához megjegyezzük, de nem bizonyítjuk, hogy a készletállapot eloszlása r és $r + Q$ között egyenletesnek tekinthető bármely időpillanatban, ha a folyamat már hosszú ideje tart. Ezért

(1.2) $$B = \frac{1}{Q} \int_r^{r+Q} b(x)dx$$

ahol $b(x)$ az x készletállapothoz tartozó átlaghiány. Ezt a következőképpen kell értenünk. Az x készletállapot τ idő után realizálódik fizikai készletként. A τ idő alatt jelentkező igényt jelölje y. A hiány kiszámítását a τ időpontra vonatkoztatva írhatjuk, hogy ennek nagysága

(1.3) $$b(x) \equiv E(y - x)^+$$

ahol z^+ a z pozitív részét jelöli. Integrálalakban írva

(1.4) $$b(x) = \int_x^{\infty} (y - x) f(y,\tau) dy$$

Az (r,Q) modellre az átlag hiány számításánál elfogadott közelítés a következő

(1.5) $$B = \frac{1}{Q} \int_r^{\infty} b(x)dx$$

Ennek jogosságát természetesen ellenőrizni kell. Az integrálkifejezésre bevezetjük a

(1.6) $$\beta(r) = \int_r^{\infty} b(x)dx$$

jelölést.

Ami az átlagkészletet illeti, könnyen bebizonyítható a következő állítás:

(1.7) $$D = B + \frac{Q}{2} + r - \mu$$

ahol

(1.8) $\mu = \lambda\tau$

a szállítási idő alatt jelentkező igény várható értéke. A B-re és D-re adott új kifejezések alapján költségfüggvényként a következő kifejezést használjuk

(1.9) $$K(r,Q) = \frac{\lambda}{Q}A + IC\left(\frac{Q}{2} + r - \mu\right) + (IC + \hat{p})\frac{\beta(r)}{Q}$$

2. AZ ELSŐ DERIVÁLTAK KISZÁMITÁSA

A költségfüggvény vizsgálatának egyik lehetséges módja az (s,S) modellre ismert eredmények alkalmazása. Az (s,S) modell ugyanis átmegy az (r,Q) modellbe, ha a felülvizsgálások között eltelt idő zérushoz tart. Mi ettől különböző utat választunk, hogy elkerüljük a (s,S) modellre való hivatkozást, főleg pedig azért, hogy kiaknázzuk a modell speciális vonásait.

Számítsuk ki a parciális deriváltakat:

(2.1) $$\frac{\partial K}{\partial r} = IC + (IC + \hat{p})\frac{\beta'(r)}{Q}$$

(2.2) $$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{-\lambda A + (IC + \hat{p})\beta(r)}{Q^2} + \frac{IC}{2}$$

A parciális deriváltakat 0-val egyenlővé téve a következő két egyenletet kapjuk

(2.3) $$Q = -\frac{IC + \hat{p}}{IC}\cdot\beta'(r)$$

(2.4) $$Q^2 = \frac{2\lambda A}{IC} + \frac{2(IC + \hat{p})}{IC}\,\beta(r)$$

Ezen egyenletek megoldásai szolgáltatják az optimális r_0, Q_0 értékeket.

Még egy megjegyzés az r szerinti deriváltakról.
Az átlaghiány (1.2) kifejezésben elvégezve az $y = x - r$ helyettesítést $\frac{\partial K}{\partial r} = 0$-ból egyszerű számolás után a következő ismert alakú eredményre jutunk:

(2.5) $$\frac{1}{Q}\int_{\partial}^{Q} F(y + r,\tau)dy = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

ahol $F(y,\tau)$ az $f(x,\tau)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény. A baloldalon egy keverékeloszlás áll, amit $H(r)$-rel jelölhetünk és az optimális r szintre a

(2.6) $$H(r) = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

egyenletet kapjuk.

3. A KONVEXITÁS FELTÉTELE

Vizsgáljuk az r,Q változókat továbbra is külön-külön.
A második deriváltakra a

(3.1) $$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} = \frac{(IC + \hat{p})}{Q} \cdot \beta''(r)$$

(3.2) $$\frac{\partial^2 K}{\partial Q^2} = \frac{2\lambda A + 2(IC + \hat{p})\beta(r)}{Q^3}$$

egyenleteket kapjuk. Mindjárt látjuk, hogy K Q-ban konvex függvény. Számítsuk még ki β''-t. (1.6) alapján:

(3.3) $$\beta'(r) = - b(r)$$

Felhasználva $b(r)$ formuláját, (1.3)-t, kapjuk, hogy

(3.4) $$b'(x) = F(x,\tau) - 1$$

A két eredményt összevetve adódik, hogy

(3.5) $$\beta''(r) = 1 - F(r,\tau)$$

$F(x,\tau)$ eloszlásfüggvény lévén a jobboldal mindig nemnegatív. Kimondhatjuk tehát, hogy $K(r,Q)$ külön-külön mindkét változójában konvex.

A két változóban való együttes konvexitásához kiszámítjuk a költségfüggvény második deriváltjaiból alkotott mátrix determinánsát. Ez bármilyen költségtényezők mellett pozitív, ha teljesül a következő feltétel:

(3.6) $$2\beta \geqslant \frac{(\beta')^2}{\beta''}$$

E feltétel teljesülését illetően első megjegyzésünk az, hogy az egyenlőtlenség két oldalán szereplő függvények deriváltjaira fordított irányú egyenlőtlenség érvényes. Deriválás és rendezés után ugyanis a

(3.7) $$\beta''' \leqslant 0$$

egyenlőtlenségre jutunk, ami nem más, mint

(3.8) $$-f(x,\tau) \leqslant 0$$

Mármost $\beta(r)$ zérushoz tart, midőn r tart végtelenhez. Ha ugyanezt sikerül megmutatni a jobboldalról is, akkor a (3.6) egyenlőtlenségnek minden r-re fenn kell állnia.

A jobboldal négyzetgyöke

(3.9) $$\frac{\int_x^\infty (y-x) f(x,\tau)dx}{\sqrt{1-F(x,\tau)}}$$

A L' Hospital szabály alkalmazásával elegendő a zérushoz tartást az

(3.10) $$\frac{f(x,\tau)}{\sqrt{1-F(x,\tau)}}$$

hányadosról igazolni. A L' Hospital szabályt e tört négyzetére alkalmazva az

(3.11) $$f'(x,\tau) \longrightarrow 0$$

feltételt kapjuk. Ez tehát $K(r,Q)$ konvexitásának elégséges feltétele. A feltétel a gyakorlati eloszlások mindegyikére teljesül.

Az eddig elmondottak illusztrálására megvizsgáljuk a normális eloszlással való közelítés esetét.

4. KÖZELITÉS NORMÁLIS ELOSZLÁSSAL

Jelölje $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét, $\phi(x)$ az eloszlásfüggvényt, $\phi^c(x)$ a kiegészítő eloszlásfüggvényt:

(4.1) $$\phi^c(x) = \int_x^\infty \varphi(x)dx$$

Először közöljük azokat a formulákat, amelyeket az

(4.2) $$F(x,\tau) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

esetére kapunk,

(4.3) $$\beta''(r) = \phi^c(\frac{r-\mu}{\sigma})$$

(4.4) $\beta'(r) = \sigma\varphi(\frac{r-\mu}{\sigma}) + (r-\mu)\,\phi^c(\frac{r-\mu}{\sigma})$

(4.5) $\beta(r) = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 + (r-\mu)^2\right]\phi^c(\frac{r-\mu}{\sigma}) - \frac{1}{2}\sigma(r-\mu)\varphi(\frac{r-\mu}{\sigma})$

A normális eloszlással való közelítés különböző vizsgálatai (3.6)-hoz hasonló alakú egyenlőtlenségek vizsgálatára vezettek. Az ezzel kapcsolatos eredményeket egy segédtételben foglaljuk össze. Közvetlen alkalmazására itt nem kerül sor, ez többnyire rutinfeladat, megfogalmazását mégis hasznosnak gondoljuk.

Segédtétel. *A*

(4.6) $\phi^c(x) \geqslant \frac{\varphi(x)}{\nu(x)}$

egyenlőtlenség teljesüléséhez elegendő, ha a jobboldal zérushoz tart, ha $x \to \infty$, *feltéve, hogy*

(4.7) $x \cdot \nu(x) + \nu'(x) \leqslant \nu^2(x)$

A bizonyitáshoz irjuk fel az

(4.8) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} k(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\nu(x)}$

egyenlőséget, ahol $k(x)$ *egyenlőre ismeretlen függvény. Ha meg tudjuk mutatni, hogy*

(4.9) $k(x) \leqslant 1$

akkor a (4.6) *egyenlőség helyes.*
Differenciálva (4.8) *mindkét oldalát az*

(4.10) $x\nu + \nu' = \nu^2 k$

egyenletet kapjuk. (4.7) *alapján itt* $k(x)$ *kisebb egynél. A* (4.10) *alapján bevezetett* $k(x)$ *függvénnyel* (4.8) *jobb és baloldalának deriváltjai egyenlők, továbbá mindkét oldal zérushoz tart, ha* $x \to \infty$, *ezért* (4.8) *érvényes.*
A segédtételt ezzel bebizonyitottuk.

Példaként megemlítjük, hogy a (3.6) feltétel vizsgálatához a segédtételt alkalmazhatjuk a

(4.11) $\nu(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$

függvénnyel.

5. AZ ALAPEGYENLETEK DISZKUSSZIÓJA

Nem nehéz belátni, hogy $K(r,Q)$ a végesben veszi fel minimumát. A jobb megérthetőség kedvéért itt újra felírjuk azt a két egyenletet, amelyből az optimális r_0, Q_0 szinteket kiszámítjuk.

$$Q = -\frac{IC + \hat{p}}{IC} \beta'(r) \tag{5.1}$$

$$Q^2 = \frac{2\lambda A}{IC} + \frac{2(IC + \hat{p})}{IC} \beta(r) \tag{5.2}$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$z = Q^2$$

$$a = \frac{2\lambda A}{IC} \tag{5.3}$$

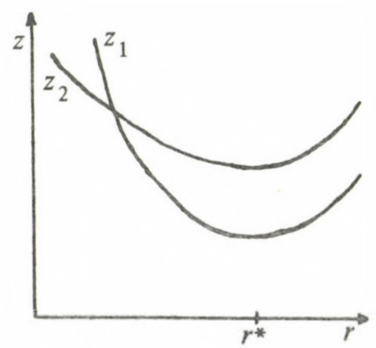
$$k = \frac{IC + \hat{p}}{IC}$$

Ezekkel egyenleteink a következőképpen módosulnak:

$$z = k^2 (\beta')^2 \tag{5.4}$$

$$z = a + 2k\beta \tag{5.5}$$

A két egyenlet által definiált $z_1(r)$ és $z_2(r)$ görbék relatív elhelyezkedését fogjuk először megvizsgálni. Meggondolásainkat az ábrán követhetjük, ahol a szemléletesség kedvéért egy lineáris tagot adtunk mindkét függvényhez.



Vezessük be az r^* szintet az

(5.6) $$F(r^*,\tau)=\frac{\hat{p}}{IC+\hat{p}}$$

egyenlet alapján. Azt állítjuk, hogy

(5.7) $$\frac{dz_1}{dr}<\frac{dz_2}{dr} \quad \text{ha} \quad r<r^*$$

A fordított irányú egyenlőtlenség érvényes, ha $r>r^*$.

A bizonyításhoz végezzük el a deriválást. A lehetséges egyszerűsítések után a

(5.8) $$\beta''k>1$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mármost $r<r^*$ miatt

(5.9) $$\beta''=1-F(r,\tau)>\frac{IC}{IC+\hat{p}}$$

ezért (5.7) érvényes. Hasonlóan okoskodunk $r>r^*$ esetén is.

Most megmutatjuk, hogy az (5.4),(5.5) egyenletrendszer r_0 megoldására teljesül az

(5.10) $$r_0<r^*$$

egyenlőtlenség, feltéve, hogy $K(r,Q)$ konvex.

Az állítást először az $a=0$ esetre igazoljuk. Ekkor az (5.4),(5.5) egyenletekből a

(5.11) $$\beta'^2(r_0)\cdot k=2\beta(r_0)$$

egyenletet kapjuk r_0-ra. Tegyük fel, hogy $r_0>r^*$, ami (5.8)-hoz hasonlóan

(5.12) $$\beta''(r_0)\,k<1$$

alakban írható. Az előbbi egyenletből k-t kifejezve a

(5.13) $$\frac{2\beta''\cdot\beta}{\beta'^2}<1$$

eredményt kapjuk. Ez azonban ellentétben áll a költségfüggvény konvexitásával egyenértékű (3.6) feltétellel. Mármost növekvő a esetén a $z_2(r)$ görbe a z tengely irányában párhuzamos eltolással mozdul el. Amennyiben kellő elmozdulás esetén a $z_1(r)$ és $z_2(r)$ görbék r^*-tól balra eső ágai megszünnének egymást metszeni, úgy volna olyan a érték, amely mellett a két görbe éppen érintené egymást. Ez azonban (5.7) alapján nem lehetséges.

6. ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATOK

Vizsgáljuk meg végül az optimális r_0, Q_0 értékek függését a modell bemenő paramétereitől. Az ábráról is leolvashatunk kvalitatív összefüggéseket, de nem minden irányban. A bemenő paramétereket rögzítsük a már (5.3)-ban definiált a-ban és a megbízhatósági szintet jellemző

$$(6.1) \qquad \gamma = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$$

tényezőben. A korábbi k-val a következő kapcsolat áll fenn:

$$(6.2) \qquad \gamma = \frac{1}{1 - k}$$

Az (5.4),(5.5) egyenletek alapján vizsgáljuk az $r_0(a,\gamma)$, $Q_0(a,\gamma)$ függvényeket. Először a γ szerinti parciális deriváltakat adjuk meg:

$$(6.3) \qquad \frac{\partial r_0}{\partial \gamma} = \frac{\beta'^2 - \beta(1 - \gamma)}{(1 - \gamma)\beta'(1 - \gamma - \beta'')}$$

$$(6.4) \qquad \frac{\partial Q_0}{\partial \gamma} = \frac{\beta'^2 - \beta\beta''}{\beta'(1 - \gamma)(1 - \gamma - \beta'')}$$

Mindkét kifejezésről megmutatható, hogy pozitívak, amennyiben K-ra a konvexitási feltétel teljesül. Ez r esetén szemléletes is könnyen bizonyítható.

Kevésbé szemléletes Q_0-nak γ-ban való monotonitása és annak bizonyítása a segédtétel egy nem éppen könnyű alkalmazását igényli.

A teljesség kedvéért megadjuk az a szerinti deriváltakat is:

$$(6.5) \qquad \frac{\partial r_0}{\partial a} = \frac{(1 - \gamma)^2}{-2\beta'(1 - \gamma - \beta'')}$$

$$(6.6) \qquad \frac{\partial Q_0}{\partial a} = \frac{1 - \gamma}{-2(1 - \gamma - \beta'')}$$

Egészen könnyű megmutatni, hogy az első kifejezés negatív, a második pozitív. Ez az az eredmény, amelyet az ábráról is leolvashatunk.

Az optimális paraméterek érzékenységének birtokában további karakterisztikák érzékenysége is kiértékelhető. A kapott kifejezésekben szereplő függvények jól számíthatók, ezért az eredmények a gyakorlat számára sem közömbösek.

Irodalom

G. Hadley – T. Whitin Analysis of inventory systems. Prentice Hall, 1968.

Beérkezett: 1972. szept. 25.

Summary

DESCRIPTION OF A TRANSACTION REPORTING STOCHASTIC INVENTORY MODEL AND ITS SENSITIVITY ANALYSIS

We describe the well-known (r,Q) model, which is introduced in the book of Hadley and Whitin. We find a sufficient condition for the convexity of the cost functions. The optimal values r_0, Q_0 of the parameters r, Q are found by solving an algebraic equation of one variable. We give estimations of r_0, Q_0 and obtain formulas for the derivatives of r_0, Q_0 with respect to the cost of placing an order and a certain security factor.

Р е з ю м е

ОПИСАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛЯ С ПОСТОЯННЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Опишем известный (r,Q) модель, который введен в книге Хедли и Уайтин. Найдем достаточное условие для выпуклости функции стоимости. Оптималные значения r_0, Q_0 параметров r, Q найдены решением алгебрайческого уравнения одного переменного. Найдем оценки для r_0, Q_0 и выведем формулы производных r_0, Q_0 по стоимости транспорта и по некоторым факторам надежности.