MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

KÉTSZERESEN FOKOZATOS KÖZELITÉS

Balla Katalin

Véges számú aritmetikai művelettel nem előállitható függvények gyöke az ismert iterációs módszerekkel csak előre jól nem becsülhető képlethibával és műveletszámmal számítható ki. Az alábbi tétel lehetőséget ad az egyenletek tetszőleges pontosságú megoldására, alkalmazásaiban pedig a műveletszám becslésére.

Legyen M teljes metrikus tér, $\{A_n\}$ operátorsorozat, amely az

$N = \{x \in M : \rho(x,a) \leq r, a, r$ rögzített$\}$ zárt gömbben kielégíti a következő feltételeket:

1. Létezik N-ben olyan A operátor, hogy

   $\rho(A_n x, Ax) \leq L^n \cdot C \qquad x \in N,\ 0 < L < 1$

   teljesül (C-konstans).

2. Tetszőleges $x, y \in N$-re

   $\rho(A_n x, A_n y) \leq K \cdot \rho(x,y) \qquad 0 < K < 1$

3. Az $a \in N$ pontban

   $\rho(A_n a, a) \leq (1 - K) \cdot r$

   K és L közös az egész sorozatra.

Tétel. *Az 1.-3. feltételek mellett az* $x_{n+1} = A_n x_n$ *sorozat tetszőleges* $x_0 \in N$ *esetén konvergens.*
Ha $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$, *akkor* $\alpha = A\alpha$ *és N-ben ez az egyetlen fixpont.*

Bizonyítás.

1/ 1. miatt az $\{A_n\}$ operátorsorozat egyenletesen konvergens: tetszőleges $\epsilon > 0$-ra ha n elég nagy, akkor

$\rho(A_n x, Ax) \leq \epsilon$ minden $x \in N$-re.

Ezért

$$\rho(Ax, Ay) \leq \rho(Ax, A_n x) + \rho(A_n x, A_n y) + \rho(A_n y, Ay) \leq 2\epsilon + K \cdot \rho(x,y)$$

valamint

$$\rho(Aa, a) \leq \rho(Aa, A_n a) + \rho(A_n a, a) \leq \epsilon + (1 - K) \cdot r$$

Mivel ϵ tetszőlegesen kicsinynek választható, így A eleget tesz a

2*. $(Ax,Ay) \leqslant K \cdot (x,y)$

3*. $(Aa,a) \leqslant (1-K) \cdot r$

egyenlőtlenségeknek N-ben. Igy A-ra alkalmazható a közismert kontrakciós tétel: az $x = Ax$ egyenletnek N-ben létezik egyetlen megoldása. Jelöljük α-val.

2/ Jelölje F_k az $A_k \circ A_{k-1} \circ \ldots \circ A_1 \circ A_0$ kompozíciót.

$$\begin{aligned}\rho(\alpha,x_{n+1}) &= \rho(A\alpha,F_n x_0) \leqslant \rho(A\alpha,A_n\alpha) + \rho(A_n\alpha,F_n x_0) \leqslant L^n \cdot C + \\ &+ K \cdot \rho(\alpha,F_{n-1}x_0) = L^n \cdot C + K \cdot \rho(A\alpha,F_{n-1}x_0) \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant (L^n + K \cdot L^{n-1} + K^2 \cdot L^{n-2} + \ldots + K^{n-1} \cdot L) \cdot C + \\ &+ K^n \cdot \rho(A\alpha,A_0x_0)\end{aligned}$$

Legyen $M = \max(L,K)$ $\quad d = \max(C, \rho(\alpha,A_0x_0))$

Innen $\rho(\alpha,x_{n+1}) \leqslant (n+1) \cdot M^n \cdot d$

Mivel pedig $M < 1$, ez a különbség tetszőlegesen kicsinnyé tehető.

Megjegyzések.

a) Az 1. feltétel nem lényegesen erősebb az egyenletes konvergencia feltételénél. Igaz ugyanis a következő: Ha az $\{A_n\}$ operátorsorozat valamely D tartományban egyenletesen konvergál A-hoz, akkor létezik olyan részsorozata, amely kielégíti a $\rho(A_nx,Ax) \leqslant L^n \cdot C$ $0 < L < 1$ feltételt. Elegendő az $\epsilon_n = L^n \cdot C$ értékekhez tartozó $\{A_n\}$ operátorsorozatot kiválasztani.

b) A 2. -3. feltétel még egyenletes konvergencia esetén sem helyettesíthető a 2*. -3*. feltétellel. Pontosabban: A 2*. 3*. feltételt kielégítő A operátorra nézve még nem feltétlenül igaz, hogy a tetszőleges, hozzá egyenletesen konvergáló $\{A_n\}$ operátorsorozatnak létezne olyan részsorozata, amely valamely K'-vel teljesítené 2. -3.-t.

Triviális ellenpélda:

$M = R$ – a számegyenes a szokásos metrikával, $N_r = \{x : |x-1| \leqslant r\}$, r – tetszőleges

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^n} \geqslant x \quad \text{és} \quad 1 < x \\ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^n} < x \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2 - x & \text{ha} \quad 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál a $\varphi(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ függvényhez. Tetszőleges K-val teljesül 3. és 3*. $a = 1$-ben. Továbbá $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

Ugyanakkor a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat valamennyi eleme csupán a $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq |x - y|$ egyenlőtlenséget teljesíti, amely semmilyen r-nél nem élesíthető tovább.

c) Nyilvánvaló, hogy $A_n \equiv A$ esetén az ismert fokozatos közelítések módszeréhez jutunk. Egyébként az iterációs eljárás nem stacionárius.

Alkalmazások.

1. (Mint az előbbi példában) $M = R$ a valós számegyenes, $N = \{x : |x - a| \leq r\}$ zárt intervallum $\{\varphi_n(x)\}$ megfelelő tulajdonságú valós függvénysorozat.
Az $\{x_{n+1} = \varphi_n(x_n)\}$ sorozat határértéke $x_0 \in N$ esetén az $x = \varphi(x)$ egyenlet gyöke.

2. A metrikus tér a komplex sík, N-zárt körlap, $\{\psi_n(x)\}$ – komplex függvénysorozat.

Summary

ON THE DOUBLE SUCCESSIVE APPROXIMATION

The convergence of the "double" successive iterative process is proved when the conditions (1)-(3) are satisfied. The theorem can be applied for solving the equation $x = Ax$ and it allows us to estimate the error and the number of the operations.

Резюме

О ДВАЖДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В статье доказывается сходимость "дважды" последовательного итерационного процесса при выполнении условий (1) - (3) . Указывается, что теорема может применяться для вычисления корня уравнения $x=Ax$ с оценимым числом операций и заданной точностью.

Beérkezett: 1972 nov. 9.