MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

A FOLYTONOS IDEJŰ MÁSODRENDŰ AUTOREGRESSZIÓS FOLYAMAT PARAMÉTERBECSLÉSÉRŐL

Gy. Németh Teréz

A természet véletlen folymatai általában folytonos időben játszódnak le, de megfigyeléseket csak diszkrét időpontokban tehetünk.

A megfigyelések statisztikai kiértékelésekor, pl. a folyamat paramétereinek becslésekor gyakran már magát a véletlen folyamatot is diszkrét időben lejátszódóként kezelik. Ha a megfigyelések elvben tetszőlegesen sűríthetők, természetesebb az a megközelítés, amelynek során a folyamatot folytonos idejűnek tekintjük. Jelen dolgozatban példát adunk ennek az elvnek a következetes megvalósítására. Szimulációs módszerrel táblázatokat szerkesztünk a folytonos másodrendű autoregressziós folyamat paraméterei becslésének eloszlására.

A dolgozat végén az így nyert eredményeket alkalmazzuk a napfolttevékenység periódusának becslésére.

Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folytonosan differenciálható realizációjú stacionárius folyamat a $0 \leq t \leq 1$ intervallumban eleget tesz a

$$d\xi'(t) + (a_1 \xi'(t) + a_0 \xi(t))dt = dw(t) \tag{1}$$

másodrendű sztochasztikus differenciálegyenletnek, ahol $a_1 > 0$, $4a_0 > a_1^2$ valós számok, $w(t)$ pedig a standard Wiener-folyamat. (A sztochasztikus differenciálegyenlet matematikailag korrekt értelmezését lásd [4]-ben.)

Az (1.) másodrendű egyenlet a szokásos módon

$$\xi_1(t) = \xi(t), \quad \xi_2(t) = \xi'(t)$$

helyettesítéssel átírható elsőrendű egyenletrendszerré:

$$\begin{aligned} & d\xi_1(t) - \xi_2(t)dt = 0 \\ & d\xi_2(t) + (a_1 \xi_2(t) + a_0 \xi_1(t))dt = dw(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Az áttekinthetőség kedvéért írjuk (2.)-t vektoralakba:

$$d\underline{\xi}(t) - A\underline{\xi}(t)dt = d\underline{w}(t) \tag{2a}$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

és $\underline{w}(t)$ a

$$B_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kovariancia mátrixú elfajult kétdimenziós Wiener-folyamat.

Az a_0, a_1 együtthatókra tett feltevés azt jelenti, hogy az A mátrix-nak sajátértékei negatív valósrészű komplex számok:

$$\lambda \pm i\omega = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Ismeretes, hogy a (2.) egyenletnek elegettevő, folytonos idejű kétdimenziós vektor folyamat stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(t) = e^{A|t|}B(0)$ kovariancia mátrixszal, ahol $B(0)$ az

$$(3) \qquad A \cdot B(0) + B(0)A^* = -B_w$$

összefüggésből határozható meg. A számításokat elvégezve nyerjük, hogy

$$(4) \qquad B(t) = \frac{e^{\lambda|t|}}{\omega} \begin{pmatrix} \omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega|t| & \sin\omega|t| \\ -(\lambda^2+\omega^2)\sin\omega|t| & \omega\cos\omega t + \lambda\sin\omega|t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{4\lambda(\lambda^2+\omega^2)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}$$

A (4.) összefüggésből leolvasható az ω és λ szemléletes jelentése: az (1.) egyenletnek elegettevő $\xi(t)$ folyamat kovariancia függvénye egy ω periódusú, λ csillapodási együtthatójú csillapított rezgőmozgást ír le.

A $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ $0 \leqslant t \leqslant 1$ kétdimenziós folyamat a $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$ feltétel mellett a Kolmogorov-féle alaptétel értelmében valamilyen X mérhető téren egy P_A valószínűségi mértéket generál. Minthogy a kezdeti feltételek és a $\xi_1'(t) = \xi_2(t)$ összefüggés alapján $\xi_2(t)$ egyértelműen meghatározza $\xi_1(t)$-t, X mérhető teret választhatjuk a [0,1] intervallumon folytonos, $x_2(0) = 0$ feltételnek elegettevő függvények terének.

J.L. Doob (lásd [5]) bebizonyította, hogy P_A abszolút folytonos ugyanezen az X téren értelmezett P_w standard Wiener mértékre nézve.

A $\dfrac{dP_A}{dP_w}$ Radon-Nikodym derivált ismeretében az a_0, a_1 – vagy ami ugyanaz λ,ω – paraméterek becslése történhet a maximum-likelihood módszer segítségével.

Konkrét számításokra is alkalmazható, pontos formulák találhatók Arató [2] dolgozatában.

Ezek alapján

$$(5)\qquad \frac{dP_A}{dP_w} = \exp\left\{-\frac{a_0^2}{2}\int_0^1 x_1^2(t)dt - \frac{a_1^2 - 2a_0}{2}\int_0^1 x_2^2(t)dt + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{2}(x_2^2(1) - x_2^2(0)) -\right.$$

$$\left. - a_0a_1(x_1^2(1) - x_1^2(0)) - \frac{a_0a_1}{2}(x_1(1) - x_1(0)) - a_0(x_1(1)x_2(1) - x_1(0)x_2(0))\right\}$$

Innen az $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ becslésekre egyetlen realizáció alapján a következő közelítő formulák adódnak:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \hat{a}_0 &= \int_0^1 x_2^2(t)dt \Big/ \int_0^1 x_1^2(t)dt \\ \hat{a}_1 &= 1 \Big/ 2\int_0^1 x_2^2(t)dt \end{aligned}$$

Az $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ becslések aszimptótikus kovarianciája $\frac{B(0)^{-1}}{T}$ ha $[0,T]$-ben van a megfigyegyelés és $T \to \infty$ (lásd Arató [2]).

Esetünkben $B^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -4\lambda(\lambda^2 + \omega^2) & 0 \\ 0 & -4\lambda \end{pmatrix}$

A gyakorlatban az $\underline{x}(t)$ realizációt csak véges sok időpontban ismerjük ezért a (6.) képletben szereplő integrálokat integrálközelítő összegekkel helyettesítjük.

Tegyük fel, hogy a $\xi(t)$ folyamat értékeit a $t_k = k\delta$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ időpontokban ismerjük. Minthogy a (2.) egyenletnek elegettevő folytonos idejű kétdimenziós $\underline{\xi}(t)$ vektorfolyamat stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(t) = e^{A|t|}B(0)$ kovariancia mátrix-szal (lásd (4.)), a $\underline{\xi}(k\delta)$ diszkrét idejű folyamat is stacionárius Gauss-Markov folyamat $B(k\delta) = e^{Ak\delta}B(0)$ kovariancia mátrixszal és megoldása a

$$(7)\qquad \underline{\xi}(n\delta) = e^{A\delta}\xi((n-1)\delta) + \underline{\epsilon}(n\delta)$$

differencia egyenletnek, ahol $\underline{\epsilon}(n\delta)$ független normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó sorozat $\underline{0}$ várhatóértékkel, B_ϵ kovariancia mátrixszal.

B_ϵ a

$$(8)\qquad B(0) = e^{A\delta}B(0)e^{A^*\delta} + B_\epsilon$$

egyenletből határozható meg.

Korábban diszkrét időpontokban végzett megfigyelések esetében a $\underline{\xi}(t)$ folyamat λ és ω paramétereit úgy becsülték, hogy a folyamat $\xi_1(n\delta)$ komponensét másodrendű autoregressziós folyamatnak tekintették. (A $\xi_2(n\delta)$ általában nem figyelhető meg.)

Tehát feltételezték, hogy $\xi_1(n\delta)$ kielégíti a

$$(9)\qquad \xi_1(n\delta) - b_1\xi_1((n-1)\delta) - b_0\xi_1((n-2)\delta) = \delta\epsilon(n)$$

másodrendű sztochasztikus differenciaegyenletet. ($\epsilon(n)$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változó sorozat.) A λ és ω paraméterek

$$(10)\qquad z^2 - b_0 z - b_1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökeiből nyerhetők:

$$\lambda = Re \log z$$

$$\omega = Im \log z$$

A (9.) egyenlet $\xi_2((n-1)\delta) = \dfrac{\xi_1((n-1)\delta) - \xi_1((n-2)\delta)}{\delta}$ és $b_0 = 1 - a_1\delta + a_0\delta^2$,

$b_1 = a_1\delta - 2$ helyettesítésekkel a

$$\underline{\xi}(n\delta) = B\underline{\xi}((n-1)\delta) + \delta\underline{\epsilon}(n\delta)$$

elsőrendű differenciaegyenletbe megy át, ahol

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ -a_0\delta & 1 - a_1\delta \end{pmatrix}$$

és $\underline{\epsilon}(n)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kovariancia mátrixú normális eloszlású független valószínűségi vektorváltozó folyamat.

Mint tudjuk a valóságban a B mátrix $e^{A\delta}$ alakú, itt pedig csak ennek első közelítése, $I + A\delta$ szerepel, és B_ϵ sem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$ alakú, tehát a $\xi_1(n\delta)$ folyamat nem tekinthető másodrendű autoregressziós folyamatnak – emellett, ha z gyöke (10.) karakterisztikus egyenletnek, $\log z$ csak közelítőleg sajátértéke az A – mátrixnak.

Figyelembe véve, hogy a Radon-Nikodym deriváltban szereplő $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ statisztikák csak közelítőleg számíthatók ki, a teljesen korrekt eljárás az lenne, hogy a $\underline{\xi}(n\delta)$ folyamatot eleve $e^{A\delta}$ együtthatómátrixú elsőrendű diszkrét autoregressziós folyamatként kezelnénk, és az általa definiált végesdimenziós valószínűségi eloszlásra alkalmaznánk a maximum-likelihood módszert. Ez azonban a gyakorlatban legtöbbször nem kivitelezhető, mert nem ismerjük a folyamat $\xi_2(n\delta)$ komponensét.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az így nyert (bonyolultabb képletekkel megadott) becslések nem is jobbak a fentieknél.

Az MTA CDC 3300 gépén szimulációs módszer segítségével a $\hat{\lambda},\hat{\omega}$ becslések eloszlásaira táblázatok készültek. A szimulációs modell megválasztásánál a következő elveket vettük figyelembe. (Nyilvánvaló, hogy akár a valódi, akár a szimulált folyamat realizációit dolgozzuk fel, a realizációnak csak véges sok t_i $(i = 1, \ldots, N)$ időpontban felvett értékeit vehetjük figyelembe.)

Az A, $B(0)$, B_ϵ mátrixok ismeretében a szimuláció menete a következő: véletlenszám-generátor segítségével a (7.) összefüggés alapján stacionárius indítással rekurzíve előállítjuk az $\underline{x}(k\delta)$ realizációt $k = 1, 2, \ldots, N$. A stacionárius indítást egy $B(0)$ kovarianciamátrixú, 0-várható értékű normális eloszlású $\underline{x}(0)$ véletlen vektor generálásával biztosítjuk.

A gyakorlatban előfordulhat, hogy a $\underline{\xi}(t)$ vektorváltozónak csak az első komponense figyelhető meg és ilyenkor a becslés során a folyamat második komponensét az

$$x_2^*(i\delta) = \frac{x_1((i+1)\delta) - x_1(i\delta)}{\delta}$$

differenciahányadossal helyettesítjük. Szükségünk lehet az ílymódon nyert becslések eloszlásaira is. Ezért az $\underline{x}(k\delta)$ realizációval párhuzamosan generálunk egy $\underline{x}^*(k\delta)$ sorozatot is, ahol

$$x_1^*(k\delta) = x_1(k\delta)$$

$$x_2^*(k\delta) = \frac{x_1((k+1)\delta) - x_1(k\delta)}{\delta}$$

Az $\underline{x}(k\delta)$ ill. $\underline{x}^*(k\delta)$ realizációk alapján (6.)- összefüggésből számítottuk az $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_0^*, \hat{a}_1^*$ becsléseket, illetve a nekik mehfelelő $\hat{\lambda},\hat{\omega},\hat{\lambda}^*,\hat{\omega}^*$ becsléseket, ahol

$$\hat{\lambda} = -\frac{\hat{a}_1}{2} \qquad \hat{\omega} = \sqrt{\hat{a}_0 - \frac{\hat{a}_1^2}{4}}$$

Minden rögzített λ,ω paraméterpárra kiszámítottuk a becslések

$$\hat{\lambda}_i,\ \hat{\omega}_i,\ \hat{\lambda}_i^*,\ \hat{\omega}_i^* \qquad (i = 1, \ldots, 100)$$

sorozatát és meghatároztuk empirikus eloszlásaikat. A $\hat{\lambda}, \hat{\lambda}^*$ eloszlásának 1, 5, 10, 90, 95 és 99% kvantiliseire az 1. táblázatot állítottuk össze. A táblázatban megadtuk az empirikus eloszlások átlagait és szórásait is. Az egy realizációhoz tartozó beosztások száma 50-től 1000-ig változott (lásd a megjegyzéseket).

Meghatároztuk az

$$(11) \qquad \omega_{st} = (\hat{\omega} - \omega)(\int_0^1 x_1^2(t)dt + \int_0^1 x_2^2(t)dt)^{1/2}$$

standardizált becslések eloszlásainak várható értékét, szórását, ferdeségét, lapultságát is:

λ	ω	$M\omega_{st}$	$D\omega_{st}$	Ferdeség	Lapultság
0.1	10	0.08	0.95	1.1	4.1
0.1	5	0.29	1.3	0.19	2.37
0.5	10	0.16	0.65	0.34	2.4
2	30	0.017	0.54	0.38	3.2
1	100	–0.097	1.17	0.016	2.899
40	100	0.06	0.6	3.4	2.71

A napfoltttevékenység közel 2 évszázados (N = 174 év) adatai (1. Anderson [1]) alapján kiszámítottuk a λ,ω paraméterek becsléseit. Itt az (1.) egyenletben szereplő $w(t)$ Wiener folyamat lokális szórása nem 1, hanem valamilyen ismeretlen σ paraméter. A σ becslése egyetlen realizáció alapján a következő összefüggésből számítható ki:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(d\xi'(t_i)\right)^2 \longrightarrow \sigma^2$$

Megfelelő normálások elvégzése után a következő becslések adódtak:

$\hat{\lambda} = -44{,}7$ $\quad\hat{\omega} = 97{,}59$ $\quad\hat{T} = \dfrac{2\pi N}{\hat{\omega}}$ összefüggés alapján a $\hat{T}$ periódushosszra pedig 11.3 év.

A $\hat{\lambda}$ becsléshez szerkesztett konfidenciaintervallumok Arató M [3] táblázata alapján:

$\lambda_{0.9} = 55.5$ $\quad\lambda_{0.95} = 59.0$ $\quad\lambda_{0.99} = 65.0$

$\lambda_{0.1} = 31.0$ $\quad\lambda_{0.05} = 28.0$ $\quad\lambda_{0.01} = 21.5$

az $\hat{\omega}$ becsléshez szerkesztett konfidenciaintervallumok pedig, feltételezve ω_{st} normalitását

$\omega_{0.9} = 115.89$ $\quad\omega_{0.95} = 121.0$ $\quad\omega_{0.99} = 130.9$

$\omega_{0.1} = 79.29$ $\quad\omega_{0.05} = 74.2$ $\quad\omega_{0.01} = 64.3$

Megjegyzés.

1. Rögzített λ,ω paraméterpár esetén a δ lépésközt válasszuk meg úgy, hogy $\delta \ll \omega^{-1}$ legyen.

2. A $\dfrac{\lambda}{\omega} \gg 1$ eset alig különböztethető meg az elsőrendű sztochasztikus differenciálegyenletnek elegettevő folyamat esetétől.

3. Ismeretes (ld. A. Novikov [5]), hogy a kétdimenziós (komplex) stacionárius Gauss-Markov folyamat esetében a megfelelően standardizált $\hat{\omega}$ becslés aszimptotikusan normális eloszlású. Az empirikus eloszlás ferdeségére és lapultságára nyert jó értékek azt a hipotézist látszanak alátámasztani, hogy a mi esetünkben is ω (11.) szerint standardizált becslése aszimptotikusan normális eloszlású.

4. A $\hat{\lambda}$ becslés eloszlásának viselkedése szintén feltűnő hasonlóságot mutat a kétdimenziós (komplex) stacionárius Gauss-Markov folyamat megfelelő paramétere becslésének eloszlásával, melyre Arató M. (ld. [3]) közölt táblázatot.

Befejezésül a szerző köszönetet mond Arató Mátyásnak a probléma fölvetéséért, Tusnády Gábornak és Krámli Andrásnak értékes tanácsaiért és segítségéért.

1. Táblázat

100 minta alapján számított empirikus átlagok, szórások a $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}^*$, $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}^*$ becslések esetén (∗-os becslésekre a 2. sor adatai használhatók adott ω,λ esetén). $\hat{\lambda},\hat{\lambda}^*$ kvantilisei.

$-\lambda$	ω	$-M\lambda$	$M\omega$	$D\lambda$	$D\omega$	1 %	5 %	10 %	90 %	95 %	99 %
0.1		0.23	5.2	0.36	0.88	2.2	0.68	0.51	0.043	0.037	0.03
	5	0.23	5.1	0.37	0.87	2.1	0.70	0.51	0.043	0.037	0.031
		0.25	10.3	0.36	0.91	1.8	0.93	0.57	0.043	0.035	0.027
	10	0.25	10.2	0.37	0.88	1.9	0.96	0.58	0.043	0.035	0.027
		0.2	30.09	0.26	0.83	1.7	0.69	0.53	0.047	0.0381	0.026
	30	0.21	29.8	0.27	0.84	1.7	0.72	0.55	0.048	0.0387	0.026
		0.281	50.2	0.45	0.92	2.64	1.28	0.84	0.044	0.032	0.029
	50	0.318	47.5	0.52	2.63	2.99	1.50	0.96	0.050	0.036	0.032
0.5		0.87	5.1	0.95	1.2	4.9	2.8	2.0	0.21	0.16	0.13
	5	0.88	5.1	0.97	1.2	5.1	2.8	2.1	0.21	0.16	0.13
		0.96	10.27	1.0	1.25	3.8	3.4	2.6	0.19	0.17	0.12
	10	0.99	10.14	1.1	1.19	4.2	3.4	2.7	0.2	0.17	0.12
		1.05	30.2	1.26	1.29	6.7	3.17	2.30	0.27	0.22	0.17
	30	1.09	29.8	1.35	1.32	7.7	3.27	2.45	0.28	0.23	0.18
		0.93	50.14	1.20	1.18	7.4	2.9	1.7	0.23	0.19	0.17
	50	0.98	49.16	1.31	1.43	8.2	3.2	1.8	0.24	0.207	0.17
1.		1.7	9.9	1.5	1.3	6.9	4.4	3.2	0.54	0.42	0.30
	10	1.7	9.8	1.5	1.3	7.5	4.6	3.4	0.56	0.42	0.31
		1.65	30.3	1.57	1.53	7.1	5.47	3.57	0.50	0.38	0.24
	30	1.69	30.03	1.63	1.48	7.3	5.72	3.7	0.51	0.39	0.25
		1.48	50.00	1.19	1.76	6.6	3.25	2.64	0.56	0.42	0.307
	50	1.56	48.9	1.31	1.90	7.09	3.55	2.74	0.59	0.43	0.318
		1.7	100.1	1.6	3.5	11.2	4.4	3.1	0.54	0.44	0.3
	100	2.5	82.4	2.6	18.2	16.1	6.6	4.7	0.79	0.61	0.43
2.		2.9	10.0	1.9	1.9	9.2	6.7	5.8	1.2	0.94	0.76
	10	2.9	10.0	1.9	1.9	9.4	6.5	5.7	1.2	0.94	0.77
		2.62	30.04	1.58	1.93	8.3	5.35	4.48	1.14	1.07	0.92
	30	2.66	29.84	1.65	1.93	8.8	5.50	4.65	1.15	1.07	0.93

		2.67	49.8	1.73	2.09	8.5	5.8	5.01	1.05	0.85	0.71
	50	2.75	49.1	1.83	2.18	8.9	5.98	5.2	1.06	0.86	0.73
		6.07	29.6	2.79	2.66	19.2	10.48	9.3	3.39	2.8	2.3
	30	6.1	29.4	2.9	2.7	20.	10.8	9.5	3.4	2.9	2.4
5.		5.88	50.29	2.84	2.61	14.45	12.16	9.85	3.29	2.51	2.1
	50	6.0	49.78	2.98	2.56	14.99	12.67	10.2	3.30	2.54	2.1
		5.8	100.2	2.7	5.8	14.1	12.2	9.4	3.0	2.6	1.9
	100	9.0	80.1	5.8	20.3	25.2	18.1	14.3	4.4	3.8	2.9
		10.85	100.6	3.1	4.2	19.	16.	15.	7.0	6.6	4.8
10.	100	11.9	96.	3.9	5.4	21.	18.	17.	7.7	7.2	5.1
		15.9	99.3	4.4	4.8	28.1	25.1	21.8	10.9	10.0	9.3
15.	100	16.7	96.8	5.0	5.7	30.9	25.9	23.1	11.3	10.4	9.6
		20.7	100.2	4.3	4.5	30.	28.3	26.4	14.7	13.8	12.9
20.	100	21.2	98.7	4.6	4.6	31.	30.5	29.2	27.4	14.1	13.3
		41.22	100.6	6.31	7.87	59.35	52.63	48.53	33.65	32.07	30.52
40.	100	42.82	97.68	7.18	8.3	62.25	55.55	51.08	34.81	32.94	31.08
		–50.91	100.7	6.56	9.05	70.33	60.36	58.97	42.70	39.31	38.66
50.	100	–53.29	96.55	7.82	9.97	74.42	64.53	62.49	44.44	40.69	39.63

Beérkezett: 1973. április 5.

Irodalom

[1] Anderson T.W., The Statistical Analysis of Time Series (1970)

[2] Арато М.: Точные формулы для платностей мер элементарных гауссовских процессов.Studia Sci. Math. Hung. 5(1970) 17-27.

[3] Арато М.-Бенцур А.: Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского марковского процесса Studia Sci. Math. Hung. 5(1970) 445-456.

[4] Bartlett M.S., An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications. Cambridge 1960.

[5] Doob J.L., The elementary Gaussian processes Ann. Math. Stat. 15 (1944) 229-281.

[6] Новиков А.А.: Об оценках параметров диффузионных процессов

Summary

ON ESTIMATES OF PARAMETERS OF THE SECOND ORDER AUTOREGRESSIVE PROCESS WITH CONTINUOUS TIME

In the present paper tables are given for empirical distributions of estimates of the damping parameter $\hat{\lambda}$ and of the period $\hat{\omega}$ of the process in question by the Monte Carlo method.

Estimates are based on the maximum likelihood principle referring to the process with continuous time, and statistics in them are computed by approximative formulas from discrete observations.

Inferences:

1/ The behavior of the distribution of estimate $\hat{\lambda}$ is similar to the behavior of the distribution of the estimate of the corresponding parameter of two-dimensional stationary Gaussian-Markovian process.

2/ Standardization (by Arató-Novikov) of the estimate $\hat{\omega}$ is distributed approximately normally.

Резюме

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В настоящей работе даются таблицы для эмпирических распределений оценок параметра затухания $(\hat{\lambda})$ и периода $(\hat{\omega})$ методом Монте-Карло.

Оценки определяются по принципу наибольшего правдоподобия для процесса с непрерывным временем, а статистики, входящие в них, вычисляются приближенными формулами по дискретным наблюдениям.

Выводы:

1. Поведение распределения оценки $\hat{\lambda}$ сходно с поведением распределения оценки соответственного параметра двумерного стационарного гауссовского марковского процесса.

2. Стандартизация /по Арато-Новикову/ оценки $\hat{\omega}$ распределена приблизительно по нормальному закону.