OPERÁTOR-FÉLCSOPORTOK ÉS PARABOLIKUS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Kersner Róbert

Az alábbiakban parabolikus típusú differenciálegyenletekkel foglalkozunk. Vizsgálataink során alapvető szerepet játszik a megoldások egy bizonyos tulajdonsága, az un. félcsoport-tulajdonság. Ezen tulajdonság illusztrációjaként vizsgáljuk meg a következő példákat:

0.1. Példa. Legyen $x(t)$ egy, a valós tengelyen értelmezett differenciálható függvény, a konstans. A

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t) \qquad x(0) = x_0$$

feladatnak egyértelműen meghatározott megoldása az

$$x(t) = e^{at} \cdot x_0 \equiv T_t x_0$$

függvény. Nyílvánvaló, hogy $T_{t_1+t_2} x_0 = T_{t_1} \cdot T_{t_2} x_0$ és $T_0 = E$ ”identikus operátor”.

0.2. Példa. $x(t) = (x_2(t), \ldots, x_n(t))$, A $n \times n$-es skalármátrix. A

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) \qquad x(0) = x_0$$

feladat egyetlen megoldása az $x(t) = e^{tA} x_0 \equiv T_t x_0$ vektor függvény, ahol

$$e^B = E + B + \frac{1}{2!} B^2 + \ldots + \frac{1}{n!} B^n + \ldots .$$

Könnyen belátható, hogy

$$T_{t_1 + t_2} x_0 = T_{t_1 + t_2} x_0 \qquad \text{és} \qquad T_0 = E .$$

0.3. Példa. Ismeretes (ld. pl. [4]), hogy a

$$\frac{\partial u(tx)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(tx)}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t \geqslant 0$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

Cauchy-feladatnak a megfelelő függvényosztályban egyetlen megoldása az

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \cdot u_0(\xi) d\xi \equiv T_t u_0(x)$$

függvény.

A $T_{t_1+t_2}u_0 = T_{t_1} \cdot T_{t_2}u_0$ formula a Gauss-féle sztohasztikus folyamatok elméletében közismert azonosság, $T_0 u_0 = u_0$.

0.4. Példa. Az előbbi példa feladatának diszkrétizációjával foglalkozunk (véges differenciák módszere). A módszer lényege az, hogy a differenciálegyenletet egy differencia-egyenlettel helyettesítjük, amelynek teljesülését véges sok pontban követeljük meg. A legegyszerűbb ilyen séma a következő: osszuk fel a $t \geq 0$ félsíkot a tengelyekkel párhuzamos, egymástól h, illetve τ távolságra lévő egyenesekkel. (Legyen a "függőleges" tengely a t tengely.) Az i-edik vízszintes és a j-edik függőleges egyenes metszőpontja legyen $(j\tau, ih)$.

A harmadik feladat egyik lehetséges diszkrétizációja:

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} = \frac{u^n(x+h) - 2u^n(x) + u^n(x-h)}{h^2}$$

$$u(0, ih) = u_0(ih)\,.$$

Ebből a felírásból azonnal észrevehető (fejezzük ki $u^{n+1}(x)$-et), hogy a megoldás folyamata a következő: a nulladik szinten $(t = 0)$ adott értékekből kiszámítjuk az első szinten $(t = \tau)$ lévő értékeket, ezek ismeretében a $t = 2\tau$-nak megfelelő értékeket, és így tovább. Az előző példákban kiemelt törvényszerűségek itt is megfigyelhetők: a $t_1 + t_2$ szintnek megfelelő értékeket úgy kaphatjuk meg, hogy először eljutunk a t_1-nek megfelelő szintre, majd a t_2-nek megfelelő lépésszámmal a $t_1 + t_2$ szintre.

0.5. A $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} \cdot T_{t_2}$, $T_0 = E$ tulajdonságok több más helyzetben is megfigyelhetők. Ebből a szempontból fogjuk vizsgálni a továbbiakban a parabolikus típusú parciális differenciálegyenleteket. E cikk struktúrája a következő: bizonyos funkcionál-analízisbeli tények ismertetése után bebizonyítunk egy egzisztencia és egy unicitás tételt, majd az adott egyenlet numerikus megoldásával foglalkozunk.

0.6. Az első pont megtalálható [1]-ben (IX. fejezet). Néhány tény vázlatos bizonyítását azonban leírjuk itt is, azokét, amelyekben előfordulnak bizonyos explicit formulák, amelyek világossá teszik az előforduló operátorok felépítését. A második pont tartalmilag megtalálható a [2], [3] cikkekben. Az itt adott bizonyítás egyszerűbbnek tűnik az ottaninál.

A parabolikus parciális differenciálegyenletek más szempontból vizsgált elméletét ld. pl. [6]-ban.

1. A HILLE – YOSIDA TÉTEL

Ebben a pontban a számunkra szükséges funkcionálanalízisbeli tényekkel foglalkozunk. A nem definiált fogalmakat ismerteknek tételezzük fel.

1.1. Legyen X Banach tér, $T_t : X \to X$ lineáris operátor, t nem negatív valós szám $(t \in R^+)$.

Definíció. A $\{T_t\}$ operátorok C^0 félcsoportot alkotnak, ha

1/ T_1 korlátos $\forall t \in R^+$

2/ $T_{t+s}x = T_t T_s x \quad \forall x \in X; \quad t, s \in R^+$

3/ $T_0 = E$ identikus operátor

4/ $\lim\limits_{t_n \to t_0} T_{t_n} x = T_{t_0} x \quad \forall x \in X$ norma szerint, vagyis

$$\lim_{t_n \to t_0} \| T_{t_n} x - T_{t_0} x \| = 0, \quad \text{ahol} \quad \| \dots \| \text{ norma } X\text{-ben.}$$

1.2. **Lemma.** *Legyen* $\{T_t\}$ *egy* C^0*-félcsoport. Akkor léteznek olyan* t*-től független* M *és* m *pozitív konstansok, hogy*

$$\| T_t \| \leqslant M \cdot e^{mt} .$$

1.3. **Megjegyzés.** Ha $\{T_t\}$ C^0 félcsoport, akkor $\{e^{-mt} T_t\}$ szintén az.

1.4. Legyen X az $[a, b]$ szakaszon értelmezett Banach-tér értékű függvények tere. $x(t) \in X$ egyszerű függvény, ha véges sok mérhető halmazon állandó, ezeken kívül nulla.

Az egyszerű függvények integrálja (ha $x = x_i$ az a_i halmazon):

$$\int_a^b x(t)dt = \sum_{i=1}^n x_i \text{ mes } a_i .$$

$x(t)$ mérhető $\iff$ $\exists x_n(t)$ egyszerű függvények sorozata, olyan, hogy

$$\|x(t) - x_n(t)\| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty .$$

Az $x(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t)$ függvény Bochner-integrálja:

$$\int_a^b x(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b x_n(t)dt ,$$

ahol a limesz norma szerint értendő.

Megjegyzés. Ha $x \in X$, akkor $\int_a^b x(t)dt \in X$, vagyis a Bochner-féle integrál nem funkcionál, hanem operátor X-en.

1.5. **Lemma** *(Bochner).* $x(t)$ *integrálható Bochner szerint* $\iff$ *az* $\|x(t)\|$ *skalár függvény integrálható.*

Megjegyzés. Ez az egyszerű kritérium biztosítja a továbbiakban előforduló integrálok létezését, így az adott esetekben az integrál létezésére vonatkozó szokásos megjegyzéseket el fogjuk hagyni (az első részben).

1.6. Legyen X Banach-tér, $\{T_t\}$ C^0 félcsoport.

Definíció. A infinitezimális operátora a $\{T_t\}$ félcsoportnak, ha $\lim\limits_{h\to 0} \frac{T_h x - x}{h} = Ax$ (limesz: norma szerinti).

Az X tér azon elemeinek összességét, amelyekre a fenti határérték létezik, az A operátor értelmezési tartományának nevezzük és D_A-val jelöljük.

1.7. **Lemma.** *D_A sűrű X-ben.*

Vázlatos bizonyítás. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Hogy az állítást bebizonyítsuk, elegendő megadni egy olyan x_n sorozatot, amely tart x-hez és $x_n \in D_A$ $\forall n$.

Legyen $x_n = F_n(x) = \int\limits_0^\infty ne^{-nt} T_t(x)dt$ (az integrál Bochner-féle). Belátható, hogy $Ax_n =$ $= nx_n - nx$, vagyis azon kívül, hogy beláttuk Ax_n létezését, azt is tudjuk, mivel egyenlő.

A $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ egyenlőség könnyen bizonyítható.

1.8. **Definíció.** $D_t(T_t x) \equiv \lim\limits_{h\to 0} \frac{T_{t+h}x - T_t x}{h}$ (mindenütt, ahol a jobb oldalon lévő limesz létezik; limesz: norma szerinti.)

Lemma. *A fenti limesz létezik minden D_A-beli x-re. Azonkívül $D_t(T_t x) = AT_t x =$ $= T_t Ax$ $\forall x \in D_A$.*

Megjegyzés. Ez az egyenlőség alapvetően fontos: lehetőséget ad a $D_t u = Au$ egyenlet megoldására. A megoldás: $u = T_t x$.

1.9. **Lemma.** *Ha $\lambda > 0$ és A infinitezimális operátora a $\{T_t\}$ C^0 félcsoportnak, akkor $(\lambda E - A)^{-1} x \equiv R(\lambda, A)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x dt$ és $R(\lambda, A)$ folytonos.*

Megjegyzés. Az 1.7. lemmában előfordul az $F_n(x)$ sorozat. Látható, hogy $F_\lambda(x) =$ $= \lambda R(\lambda, A)$.

1.10. **Tétel.** *(Hille – Yosida). Legyen X Banach-tér, A lineáris operátor, D_A sűrű X-ben. Tegyük fel, hogy $R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1}$ létezik és korlátos. Ha van olyan m-től és λ-tól független M konstans, hogy $\|(\lambda R(\lambda, A))^m\| \leq M$, m és λ pozitív egészek, akkor létezik olyan egyértelműen meghározott egyenletesen korlátos C^0 félcsoport, amelynek A az infinitezimális operátora.*

Vázlatos bizonyítás. *(Az elhagyott részeket – jobbára egyszerű – feladatnak lehet tekinteni)*

a) *Legyen $I_n = nR(n, A)$, akkor $\lim I_n x = x$, $\forall x \in X$, és*

$$AI_n x = I_n Ax = n(I_n - E)x \quad \forall x \in D_A .$$

Az utóbbi állítás következik az $\left(E - \frac{1}{n}A\right)I_n = E$ *és az* $I_n\left(E - \frac{1}{n}A\right) = E$ *egyenlőségekből.*

b) *Legyen*

$$T_t^n = e^{tAI_n} = e^{-nt}e^{ntI_n}.$$

Ez korrekt módon meghatározott operátor, mivel a feltétel szerint $\|I_n^m\| \leqslant M$ *minden m-re.*

c) *A* $\{T_t^n x\}$ *sorozat fundamentális X-ben minden x-re,* $t \geqslant 0$.

Ez következik abból, hogy

$$T_t^n x - T_t^m x = \int_0^t D_s(T_{t-s}^m T_s^n x)ds = \int_0^t [T_{t-s}^m AI_n T_s^n - T_{t-s}^m AI_m T_s^n]ds$$

és

$$I_n T_t^m = T_t^m I_n,\ AT_t^m = T_t^m A.$$

Ezért létezik $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^n x \equiv T_t x$, *hiszen X Banach-tér.*

d) T_t C^0 *félcsoport. Valóban* $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0: \forall n \geqslant n_0$*-ra*

$$\|T_{t+s}x - T_t T_s x\| \leqslant \|T_{t+s}x - T_{t+s}^n x\| + \|T_t^n T_s^n x - T_t^n T_s x\| +$$

$$+ \|T_t^n T_s x - T_t T_s x\| \leqslant \epsilon.$$

A többi tulajdonság nyilvánvaló.

e) *A kapott* C^0 *félcsoportnak A az infinitezimális operátora:*

$$T_t x - x = \lim_{n\to\infty}(T_t^n x - x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t D_t T_t^n x dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T_s^n AI_n x ds = \int_0^t T_s Ax ds,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_t x - x}{t} = Ax.$$

Természetesen meg kell győződni arról, hogy a limesz és az integrál felcserélhetők.

f) *Unicitás: minden* C^0 *félcsoport, melynek A az infinitezimális operátora, megegyezik* T_t*-vel. Valóban, ha* T_t' *ilyen félcsoport, akkor*

$$\|T_t'x - T_t^n x\| = \left\|\int_0^t D_s(T_{t-s}^n T_s'x)ds\right\| = \left\|\int_0^t(-T_{t-s}^n AI_n T_s'x + T_{t-s}^n AT_s'x)ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant T\cdot\text{const.}\cdot\|Ax - I_n Ax\|,$$

és az állítás következik a)*-ból, mivel* $I_n T_s' = T_s' I_n$.

1.11. Megjegyzés. A Hille – Yosida tétel eredményei között szerepelt a $\|T_t\| \leqslant M_1$ feltétel. Tudjuk azonban (ld. 1.2), hogy tetszőleges T'_t C^0 félcsoportra

$$\|T'_t\| \leqslant M_2 e^{mt} .$$

Legyen $T_t = e^{-\beta t} T'_t$ (ld. 1.3). Nyilván $\|T_t\| \leqslant M_3$, $\beta \geqslant m$. Ha tudjuk, hogy a T'_t félcsoportnak A' az infinitezimális operátora, akkor a T_t félcsoportnak $A = A' - \beta E$ lesz az infinitezimális operátora. Valóban:

$$\frac{1}{h}(e^{-\beta h} T'_h - E) = \frac{1}{h}[e^{-\beta h}(T'_h - E) + (e^{-\beta h} - E)] \quad \text{és} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\beta h} - 1}{h} = -\beta .$$

Az 1.10. tétel alapfeltétele ennek alapján az

$$\|(E - \frac{1}{n}(A' - \beta E))^{-m}\| \leqslant M$$

alakba írható.

2. PARABOLIKUS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

2.1. Legyen $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $G = \Omega \times [0, T]$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$.

Feladat (P). Keresendő olyan $u(t, x)$ függvény, amely kielégíti az

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u$$

egyenletet és a

$$(2) \qquad \begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x) \\ \\ u|_s = 0 \end{cases} \qquad (t, x) \in G$$

feltételeket.

Feltesszük, hogy az (1) egyenlet egyenletesen parabolikus, vagyis hogy létezik olyan pozitív konstans ν, hogy minden 0-tól különböző R^n-beli $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vektorra és Ω-beli x-re

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

2.2. Az a célunk, hogy bebizonyítsuk, hogy az (1), (2) feladatoknak van egyértelműen meghatározott megoldása, amelyet egy operátor-félcsoport állít elő.

Azonban még nem tisztáztuk, milyen függvénytérben keressük u-t, s azt sem, hogy milyen feltételeket szabjunk az A operátor együtthatóira.

Tudjuk, hogy ha van olyan függvénytér (Banach-tér), amelyben A, illetve $R(\lambda, A)$ kielégíti az 1.10. tétel feltételeit, akkor figyelembe véve az 1.8 formulát és megjegyzést, meg tudjuk oldani feladatunkat.

Meg kell adnunk tehát a kívánt Banach-teret, és ebben a térben meg kell vizsgálnunk a $\lambda R(\lambda, A) = \lambda(E - \lambda A)^{-1}$ operátort.

2.3. $\varphi(x)$ tesztfüggvény, ha $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ és $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$, ahol $\operatorname{supp} \varphi$ annak a halmaznak a lezárása, ahol $\varphi \neq 0$. $\mathring{W}_2(\Omega)$ az Ω-n adott tesztfüggvények halmazának lezárása a

$$\|\varphi\| = \left(\int_\Omega \varphi^2 dx \right)^{1/2}$$

norma szerint.

$\mathring{W}_2^1(\Omega)$ ugyanazon halmaz lezárása a

$$\|\varphi\|_1 = \left(\int_\Omega \varphi^2 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 dx \right)^{1/2}$$

norma szerint.

Megjegyzések (a $\mathring{W}_2$ és a $\mathring{W}_2^1$ terek leírása).

a) $\mathring{W}_2 = L_2$ (a kis ° felül mindig a peremen való eltünést jelenti.)

b) $\mathring{W}_2$ és $\mathring{W}_2^1$ Hilbert-terek

c) $\mathring{W}_2^1$ sűrű $\mathring{W}_2$-ben.

2.4. Legyen H Hilbert-tér, $\|\ldots\|_1$ norma. Legyen F bilineáris funkcionál H-n, amely kielégíti a következő feltételeket:

$$|F(h_1, h_2)| \leqslant C_1 \|h_1\|_1 \cdot \|h_2\|_1 , \quad F(h_1, h_1) \geqslant C_2 \|h_1\|_1^2 \quad \forall h_1, h_2 \in H ,$$

C_1 és C_2 pozitív konstansok.

Akkor tetszőleges H-n értelmezett lineáris folytonos funkcionál $f(u) = F(u, v)$, $v \in H$ adott. (Lax – Milgram tétel, ld. [1].)

2.5. Tétel. *Tekintsük a*

(3) $\quad -Au + \lambda u = f$

egyenletet. Tegyük fel, hogy az A operátor együtthatói mérhető korlátos függvények, $\lambda \geqslant \lambda_0$. *Akkor* $\forall f \in \mathring{W}_2(\Omega)$ *létezik egy darab* $u \in \mathring{W}_2^1$, *olyan, hogy*

(4) $\quad F(u, \varphi) = (f, \varphi)$

minden φ-tesztfüggvényre, ahol

$$F(u,\varphi) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi - c(x)u\varphi + \lambda u\varphi \right] dx$$

és

$$(f,\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx\,.$$

Megjegyzés. (3)-ból következik (4): valóban, szorozzuk meg (3)-at φ-vel, integráljuk Ω szerint és vegyük figyelembe a

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\cdot \varphi dx = -\int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

formulát és a

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{feltételt.}$$

Ha az A operátor együtthatói elég simák, akkor (3) és (4) ekvivalensek.

Általában (4) megoldását a (3) egyenlet gyenge megoldásának nevezik.

A tétel bizonyítása. Az $F(u,\varphi)$ funkcionál nyilván bilineáris. Azonkívül

$$|F(u,\varphi)| \leqslant \lambda\|u\|\cdot\|\varphi\| + a\sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\| + b\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|\cdot\|\varphi\| +$$

$$+ c\|u\|\cdot\|\varphi\| \leqslant C\|u\|_1\cdot\|\varphi\|_1 .$$

($F(u,\varphi)$ minden tagjára alkalmazzuk a Cauchy egyenlőtlenséget,

$$a = \max_{i,j,x} |a_{ij}(x)|\,, \qquad b = \max_{i,x} |b_i(x)|\,, \qquad c = \max_x |c(x)|$$

és figyelembe vettük a $\|u\| \leqslant \|u\|_1$ és $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\| \leqslant \|u\|_1$

nyilvánvaló egyenlőtlenségeket.)

$$F(u,u) = \int_\Omega \left(\lambda u^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} u - c(x)u^2 \right) dx \geqslant$$

$$\geqslant \lambda\|u\|^2 + \nu\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 - c_1\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 - c_2\|u\|^2 \geqslant \frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 +$$

$$+ (\lambda - c_3)\|u\|^2 \geqslant \frac{\nu}{2}\|u\|_1^2\,, \quad \text{ha} \quad \lambda \geqslant c_3 + \frac{\nu}{2}\,.$$

Itt figyelembe vettük az

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |u| dx \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\| \cdot \|u\| \leqslant \epsilon \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\|u\|^2, \qquad \epsilon > 0,$$

egyenlőtlenséet és ϵ-t célszerűen választottuk ki.

A $\Phi(\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx$ funkcionál lineáris és folytonos $\mathring{W}_2^1$-on. Így 2.4-ből következik, hogy $\mathring{W}_2^1$-ben van olyan u elem, hogy $\Phi(\varphi) = F(u, \varphi)$ minden φ-re. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (4)-nek van megoldása.

Unicitás. Legyen u_1 és u_2 két megoldás, $(f, \varphi) = F(u_i, \varphi)$, $i = 1, 2$. Kivonva az első egyenlőségből a másodikat: $F(u_1 - u_2) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathring{W}_2^1$. Mivel $u_1 - u_2 \in \mathring{W}_2^1$, legyen $\varphi \equiv u_1 - u_2$: $0 = F(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant \frac{\nu}{2}\|u_1 - u_2\|_1^2$. Tehát $u_1 = u_2$.

Ezzel bebizonyítottuk a 2.5 tételt.

Tételünk azt mondta ki, hogy minden $\mathring{W}_2$-beli f-hez lehet találni egyetlen u-t $\mathring{W}_2^1$-ból, ami azt jelenti, hogy $\mathring{W}_2^1$-en az A operátornak van értelme. ($\mathring{W}_2$-ban létezik az $(\lambda E - A)^{-1}$ operátor).

2.6. Tétel. *A P feladatnak (ld. 2.1) létezik egyértelműen meghatározott gyenge megoldása, amely rendelkezik a kívánt félcsoport tulajdonsággal.*

Bizonyítás. 2.5-ben láttuk, hogy $F(u, u) \geqslant (\lambda - c_3)\|u\|^2$. Legyen $\lambda - c_3 = n$, $c_3 = \beta$, $n = \lambda - \beta$. Világos, hogy $\|(\lambda E - A)^{-1} f\| = \|u\|$ és $F(u, u) = \left|\int_\Omega fu dx\right| \leqslant \|f\| \cdot \|u\|$, tehát $\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{n}$, vagyis $\|(nE - (A - \beta E))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{n}$, vagy ami ugyanaz $\|(E - \frac{1}{n}(A - \beta E))^{-1}\| \leqslant 1$, következésképpen

$$\|(E - \frac{1}{n}(A - \beta E))^{-m}\| \leqslant 1 .$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből a Hille – Yosida tétel szerint következik, hogy létezik egy $\{T_t\}$ C^0 félcsoport, amelynek A az infinitezimális operátora.

Tudjuk (ld. 1.8), hogy

$$D_t(T_t w) = AT_t w \quad \forall w \in \mathring{W}_2^1 .$$

Ebből következik, hogy az $u(t, x) = T_t u_0(x)$ függvény $\mathring{W}_2^1(\Omega)$-beli megoldása a P feladatnak. Ha ehhez hozzávesszük az 1.10 f)-beli unicitástételt, akkor látjuk, hogy bebizonyítottuk a 2.6 tételt.

2.7. Megjegyzés. Ha az A operátor együtthatói elég simák, akkor az általunk konstruált megoldás megegyezik a klasszikus megoldással. (Ez következik abból, hogy ebben az esetben (3) és (4) ekvivalensek.)

2.8. Megjegyzés. Nem volt célunk, hogy minden állítást a maximális általánosságban mondjunk ki, ez csak elhomályosította volna a dolgok lényegét. Megengedhettük volna, hogy az A operátor $2m$-ed rendű legyen. A megfelelő állítások bizonyítása semmiben sem különbözött volna a fentiektől.

3. NUMERIKUS MEGOLDÁSOK

3.1. Tekintsük a következő Cauchy- feladatot (feltétel: A elliptikus):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \tag{5}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^n, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty. \tag{6}$$

Ha a kezdeti feltételen kívül peremfeltételek is adva vannak, hasonlóképpen kell eljárni.

Az előző részben bebizonyítottuk, hogy van olyan C^0 félcsoport $\{T_t\}$, hogy $u(t,x) = T_t u_0(x)$ megoldása az (5) és (6) feladatnak.

Figyelembe véve az 1.2 lemmát, értelmet nyer a következő

Definíció. (ld. [5]). Az $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ egyenletet egyenletesen korrektnek nevezik, ha $\|T_t\| \leqslant e^{at}$.

Láttuk, hogy esetünkben ez a feltétel teljesül.

3.2. Bevezetünk néhány jelölést:

$$u^n(x) = u(\tau n, x) = u^n$$

$$S_i u(t,x) = u(t, x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_n),$$

$$S_{-i} u(t,x) = u(t, x_1, \ldots, x_i - h_i, \ldots, x_n)$$

$$h_i \geqslant 0, \qquad h = \max h_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Legyen az (5) egyenletnek valamely diszkrétizációja:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = L_1 u^{n+1} + L_0 u^n \tag{7}$$

"kétrétegű differencia séma", ahol $L_j = L_j(t, \tau, h, S_i, S_{-i})$, $j = 0, 1$, differencia operátorok, melyeknek konkrét formája itt nem lényeges, (konkrét approximációt illetőleg ld. 0.4), fontos az, hogy approximálják az A operátort, ld. (9). A kezdeti feltétel:

(8) $$u_0^0(x) = u_0(x) .$$

Legyen $u^n(x)$ a (7) és (8) feladat megoldása.

Definíció. $C(\tau, h, t)$ léptető operátor, ha

$$u^n(x) = C(\tau, h, n\tau)u^0(x) .$$

Megjegyzés. Látható, hogy a $C(\tau, h, t)$ operátor rendelkezik az un. félcsoport tulajdonsággal, és nem más, mint az előző pontban előforduló T_t operátor diszkrét analogonja.

Definíció. A (7) séma egyenletesen korrekt, ha

$$\| C(\tau, h, t) \| \leqslant e^{\omega t}, \quad \omega \text{ konstans.}$$

Definíció. Legyen $u^n(x)$ a (7), (8), $u(t, x)$ az (5) és (6) feladat megoldása. $u^n(x)$ konvergál $u(t, x)$-hez, ha

$$\| u^n(x) - u(n\tau, x) \| = \| C(\tau, h, n\tau)u^0 - T_{n\tau}u_0 \| \to 0 , \quad \text{ha} \quad \tau \to 0 ,$$

t szerint egyenletesen a $[0, T]$ intervallumban. Természetesen mindig fel kell tüntetni, hogy ha $\tau \to 0$, akkor h hogyan tart a nullához.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy mind a diszkrétizált, mind a differenciál feladat egyenletesen korrekt, az L_1, L_2 operátorok approximálják az A operátort és*

$$\| (E - \tau L_1)^{-1} \| \leqslant N(T) .$$

Ebben az esetben a diszkrétizált feladat megoldása konvergál az eredeti feladat megoldásához. Elég bebizonyítani, hogy $\| v^n(x) \| = \| u^n(x) - u(n\tau, x) \| \to 0$, ha $\tau \to 0$, egyenletesen $[0, T]$-ben. A $v^n(x)$ függvény megoldása az

(9) $$\frac{1}{\tau}(v^{n+1} - v^n) = L_1 v^{n+1} + L_0 v^n + R_{n+1}$$

egyenletnek. R_{n+1} normája a feltétel szerint tart nullához, ugyanakkor könnyű meggyőződni a

$$\| v^n \| \leqslant t \cdot e^{\omega t} \cdot N \cdot \max_k \| R_k \|$$

becslés helyességéről.

Megjegyzés. Az A operátor konkrét approximációitól függően ki lehet mondani egy sor konvergenciát bizonyító tételt. A 3. ponttal főleg az volt a célunk, hogy a parciális differenciálegyenleteket numerikusan megoldók számára világosabb legyen a megfelelő definíciók értelme és elméletileg könnyebben meg tudják alapozni gyakorlati számításaikat.

Irodalom

[1] K. Yosida, Functional analysis, Springer Verlag, 1965.

[2] K. Yosida, An operator-theoretical integration of the wave equation, J. Math. Soc., Japan, (1956).

[3] K. Yosida, An abstract analyticity ....., Proc. Japan Acad. (1959).

[4] A.N. Tyihonov – A.A. Szamarszkij, A matematikai fizika egyenletei.

[5] N.N. Janyenko, Metod drobnüh sagov resényija mnogomérnüh zadács matyematyicseszkoj fiziki, Novoszibirszk, 1967.

[6] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, INC., 1964.

Beérkezett: 1972 április 15.

Summary

Operator-semigroups and parabolic partial differential equations

After some examples of illustration and exposition in the field of functional analysis necessary for the solution of the task in view, the paper proves a theorem of existence and uniqueness for a differential equation of parabolic type. The solution has the so-called semigroup property. The paper deals with the numerical solution of the task.

Резюме

Параболические уравнения и теория полугрупп

В работе, после некоторых примеров и рассмотрения нескольких фактов функционального анализа доказывается теорема существования и единственности для краевой задачи уравнения параболического типа. Решение задачи обладает полугрупповым свойством. Рассматривается численное решение задачи.