A YOULE – WALKER EGYENLETEK MEGOLDÁSÁRÓL

Gyurácz Németh Teréz

A $\xi(t)$ stacionárius folyamatot (p, q)-rendű autoregresszív – mozgóátlag típusúnak nevezzük, ha kielégíti a (az egyszerűség kedvéért legyen $M\xi(t) = 0$)

(1) $$\xi(t) = a_1\xi(t-1) + \ldots + a_p\xi(t-p) + \epsilon_t - b_1\epsilon_{t-1} - \ldots - b_q\epsilon_{t-q}$$
$$t = 0, \pm 1, \ldots$$

differencia egyenletet, ahol az $\epsilon(t)$ egy korrelálatlan sorozat.

Amennyiben p és q ismeretlenek, az a_i és b_j együtthatók meghatározására, illetve a $p = P$ és $q = Q$ hipotézis vizsgálatára a következő eljárást szokás használni az irodalomban (lásd pl. Box – Jenkins [1] 201-204, Hannan [2] 388-395):

Első lépésben az a_i együtthatók becsléseinek meghatározása történik a Youle – Walker egyenletekből. Jelölje c_i a $\xi(t)$ folyamat i-edik empirikus momentumát, továbbá

$$\underline{c}^*(p, q) = (c_{q+1}, c_{q+2}, \ldots, c_{q+p})$$
$$\underline{a}^* = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$$
$$C = (c_{ij})_{i=1,p}^{j=1,q}, \quad \text{ahol} \quad c_{ij} = c_{|q+i-j|}\,.$$

(* jelöli a transzponálást)

akkor az $\hat{a}_i$ becslések a

(2) $$\underline{c}(p, q) = C\underline{a}$$

egyenlet megoldásai lesznek. A (2) egyenletrendszert nevezzük Youle – Walker egyenleteknek. A (2) egyenletrendszer (1)-ből $\xi(t-k)$-val szorzással és várható érték képzéssel adódik:

(3) $$r_{q+k} = \sum_{i=1}^{p} a_i r_{|k-i|} \qquad k = 1, 2, \ldots, p\,,$$

továbbá az $r_.$ kovarianciákat a $c_.$ empirikus értékekkel helyettesítjük.

A második lépésben rögzített p, q esetén az a_i paraméternek $\hat{a}_i$ becsléseinek meghatározása után behelyettesítve (1)-be az $\hat{a}_i$ becsléseket $(i = 1, 2, \ldots, p)$, a b_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ együtthatókra, valamint a fehér zaj σ^2 szórására a momentum módszerrel történik az egyenletrendszer felírása s az újabb becslések meghatározása.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy p és q együttes meghatározására a fenti eljárás valójában nem használható, és nem használható az eljárás a p, q-ra vonatkozó hipotézis vizsgálatában sem.

Jelölje

$$\underline{r}^*(P, Q) = (r_Q, r_{Q+1}, \ldots, r_{Q+P})$$

$$R(P, Q) = (r_{ij})_{i=1,P}^{j=1,P}, \quad \text{ahol} \quad r_{ij} = r_{|Q+i-j|}$$

vektort, illetve mátrixot, melyek a $\underline{c}^*$ vektor ill. C mátrix várható értékeit adják.

Érvényes a következő

Tétel. *Ha* $P > p$ és $Q > q$, *az*

$$\underline{r}(P, Q) = R(P, Q)\underline{a}', \quad \underline{a}'^* = (a_1, a_2, \ldots, a_P)$$

egyenletben szereplő $R(P, Q)$ *mátrix szinguláris.*

Bizonyítás. Mivel $Q + l - 1 \geqslant q + 1$ minden $l = 1, 2, \ldots, P$ értékre, (3) alapján az $R(P, Q)$ mátrix első oszlopvektora lineáris kombinációja a következő p oszlopvektornak. Ezzel a bizonyítás kész.

Megjegyzés. Az $R(P, Q)$ mátrix $P \leqslant p$ vagy $Q \leqslant q$ esetén nem szinguláris (lásd. T. W. Anderson [3], 240. o.).

A fenti tételre szimulációs eljárás megvalósítása során jöttünk rá, amikor is P, Q növelésével, valamint a megfigyelésszám növelésével a becslések igen "rendszertelenül" viselkedtek, igen nagy szóródásokat mutattak, aminek oka nyilvánvalóan az $R(P, Q)$ mátrix szingularitása.

Hannan [2] könyvében szerepel egy megjegyzés (393 o. 5. megjegyzés) p és q meghatározására vonatkozóan. Az ott szereplő megjegyzésből nem világos, hogy P és Q növelése esetén R szingularitása miatt az együtthatók szignifikánsan el kell, hogy térjenek 0-tól, sőt igen nagy értékeket vehetnek fel. Anderson [3] könyvében ugyancsak nem említi a fenti nehézséget. (237-242. old.)

Példák. Hannan [2] könyvében szerepel példa az a_i ill. b_j együtthatók meghatározására (349-395 o.). Megmutatjuk, hogy szimulációs eredményeink mennyire vannak összhangban a fenti tétellel.

1) A

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + a_2 \xi(t-2) + \epsilon_t - b_1 \epsilon(t-1)$$

(2,1)-rendű autoregresszív-mozgóátlag folyamat $(a_1 = 1{,}3,\ a_2 = -0{,}4,\ b_1 = 0{,}6,\ \sigma = 1,$ a_i, b_j $(i = 1, \ldots, P)$, $(j = 1, \ldots, Q)$ becsléseire $0 \leqslant P \leqslant 5$, $0 \leqslant Q \leqslant 5$ esetén a következő eredményeket kaptuk.

(P, Q)	Autoregresszív		paraméterek			Mozgóátlag			
	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$	$\hat{a}_5$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{\sigma}^2$
(1,0)	0.64								1.02
(2,0)	0.66	-0.021							1.02
(3,0)	0.66	-0.011	-0.014						1.02
(4,0)	0.66	-0.011	-0.019	0.008					1.02
(5,0)	0.66	-0.011	-0.019	0.010	-0.004				1.02
(1,1)						-0.032			1.02
(2,1)	1.33	-0.460				0.680			1.02
(3,1)	0.11	0.349	-0.025			-0.546			1.02
(4,1)	0.18	0.310	-0.025	0.001		-0.479			1.02
(5,1)	9.73	-6.000	0.083	0.184	-0.070	0.110			84.20
(1,2)	0.60					-0.050	-0.020		1.02
(2,2)	0.17	0.280				-0.470	-0.030		1.02
(3,2)	0.14	0.310	-0.010			-0.520	-0.020		1.02
(4,2)	-68.96	8.200	24.100	-1.750		-0.560	-0.010		4880.00
(5,2)	0.97	-4.400	2.760	-0.030	-0.060	-0.070	-0.024		18.00
(0,3)						-0.730	-0.440	-0.490	0.89
(1,3)	0.62					-0.040	-0.010	0.010	1.02
(2,3)	0.10	0.320				-0.560	-0.040	-0.002	1.02
(3,3)	79.50	-13.140				-0.480	-0.030	-0.001	6429.00
(4,3)	1.00	-1.850	2.450	-0.930		-0.530	-0.370	0.390	3.70
(5,3)	1.02	-0.570	2.300	-1.380	0.030	0.150	-0.170	0.470	4.50

2) A

$$\xi(t) = a_1 \xi(t-1) + \epsilon_1$$

(1,0)-rendű folyamat ($a_1 = 0.8$, $\sigma^2 = 1$) esetén pedig a következő becsléseket kapjuk:

(P, Q)	Autoregresszív				Mozgóátlag			Fehérzaj szórás
	paraméterek							
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	σ^2
(1,0)	0.8073							1.019
(2,0)	0.8150	-0.009						1.019
(3,0)	0.8150	-0.007	-0.003					1.019
(4,0)	0.8150	-0.006	-0.010	0.01				1.019
(1,1)	0.8030				-0.010			1.019
(2,1)	1.1800	-0.300			0.360			1.019
(3,1)	-2.3000	2.500	-0.030		-0.300			9.800
(4,1)	0.6300	0.150	-0.010	0.01	-0.190			1.019
(1,2)	0.8000				-0.010	-0.004		1.019
(2,2)	-2.2000	2.400			-0.300	-0.004		9.100
(3,2)	0.3000	-0.560	0.760		-0.500	-0.950		1.020
(4,2)	-0.2000	-2.100	-0.020		-0.400	-0.400		6.700
(1,3)	0.8000				-0.006	0.001	0.010	1.020
(2,3)	0.6000	0.140			-0.180	-0.001	0.010	1.019
(3,3)	-0.2000	-1.700	2.100		-0.400	-0.400	-0.003	6.700

Irodalom

[1] G.P. Box – G.M. Jenkins, Time Series Analysis forecasting and control, (1970).

[2] E.J. Hannan, Multiple Time Series, (1970).

[3] T.W. Anderson, The Statistical Analysis of Time Series, (1970).

Beérkezett: 1972 szeptember 25.

Summary

On the solution of Joule-Walker equations

Remark about the estimation of the parameters of autoregressive and moving average process by the Joule-Walker method (momentum method). It is proved that the recommended methods (sec literature) give singular linear equations.

Резюме

О решении уравнений Юл-Валкера

Замечание к оценке параметров процесса авторегрессивного типа со скользящим суммированием проводимой по методу Юл-Валкера. Доказывется, что предлагаемый метод учебников для определения порядков авторегрессии и скользяшего суммирования приводит к сингулярному уравнению.