AZ S SZINTRE VALÓ FELRENDELÉS ELNEVEZÉSŰ KÉSZLETMODELLEK KÖLTSÉGFÜGGVÉNYEINEK ÖSSZEHASONLITÁSA

Gerencsér László

BEVEZETÉS

A dolgozat első részében az S-szintre felrendelés elnevezésű készletmodellt és annak Prékopa András által bevezetett általánosítását mutatjuk be. (ld. [1]) Az általánosított modell megengedi a szállítmány több részletben történő un. intervallumszerű érkezését. A második részben a minimális költségre egyszerű kifejezést vezetünk le. A harmadik részben két általános készletgazdálkodási folyamatot hasonlítunk össze, amelyekben a felhasználási és az érkezési folyamat is különböző lehet. Feltételt adunk arra, hogy a második folyamat minimális költsége kisebb legyen mint az elsőé, bárhogyan is állapítjuk meg a készletezési, illetve hiányköltségeket. A negyedik részben rövid áttekintést adunk az említett feltételek teljesüléséről normális eloszlással való közelítése esetén. Az ötödik részben a felhasználási illetve érkezési folyamatokban bekövetkező változásoknak a költségekre gyakorolt hatását vizsgáljuk.

1. AZ S SZINTRE FELRENDELÉS ELNEVEZÉSŰ KÉSZLETMODELL ÉS ANNAK KITERJESZTÉSE (ld. [1]).

A bemutatandó modell egy igen általános készletgazdálkodási folyamatot ír le. A modell és annak vizsgálata Prékopa idézett dolgozatának gondolatmenetét követi. Bemutatjuk az irodalomban elterjedt S szintre felrendelés elnevezésű készletmodellt és annak Prékopa által tárgyalt kiterjesztését.

Az általános modellben az igényfolyamatot egy $\alpha(0, s)$ független növekményű sztohasztikus folyamat írja le; $\alpha(0, s)$ a $(0, s)$ időintervallumban jelentkező igény. A (t_1, t_2) időintervallumban jelentkező igényt $\alpha(t_1, t_2)$-vel jelöljük, és feltesszük, hogy ennek eloszlása csak $t_2 - t_1$-től függ. $\alpha(0, s)$ eloszlásának sűrűségfüggvényét $f(x, s)$ jelöli. A várható értékre és a szórásra az

$$(1.1) \qquad M(\alpha(0, s)) = m \cdot s \quad \text{és} \quad D^2(\alpha(0, s)) = \sigma^2 \cdot s$$

jelöléseket vezetjük be.

A készleteket T időközönként felülvizsgáljuk és az utolsó periódus fogyasztását figyelembevéve rendelünk. A 0 időpontban feladott rendelés a $(\tau, \tau + T)$ időintervallumban érkezhet meg egy vagy több részletben. Az érkezési folyamatot egy $\eta(s)$ $\tau \leqslant s \leqslant \tau + T$ sztohasztikus folyamat írja le, ahol $\eta(s)$ az s időpontig leszállított árumennyiség és

$$\eta(\tau - 0) = 0 \quad \text{és} \quad \eta(\tau + T) = x\,. \tag{1.2}$$

Az x a rendelt mennyiséget jelenti.

Az $\eta(s)$ sztohasztikus folyamat csak az előző periódus fogyasztásától függ, ezért feltesszük, hogy ez az $\alpha(0, s)$ sztohasztikus folyamattól független a $(\tau, \tau + T)$ intervallumban. Az érkezési folyamat x-től való függése lineáris, tehát pl. kétszeres nagyságú rendelés esetén az érkezési folyamatot a $2 \cdot \eta(s)$ sztohasztikus folyamat írja le. Végül feltesszük, hogy bármely más $n \cdot T$ időpontban feladott rendelést követő szállítás azonos statisztikai jelleggel bír, vagyis az η sztohasztikus folyamatok a $\tau < s < \tau + T$ és a $\tau + nT < s < \tau + (n + 1)T$ intervallumokon tekintve azonos eloszlásfüggvényekkel írhatók le.

Most bevezetünk még két elnevezést. Egy s időpillanatban rendelés alatt lévő, de még meg nem érkezett árut könyvekben lévő készletnek nevezzük. Ha $\tau < s < T + \tau$, akkor ennek értéke nyilván $\eta(\tau + T) - \eta(s)$. A másik fogalom a készletállapot, melyet egy adott pillanatban a következőképpen számolunk ki:

készletállapot = fizikai készlet + könyvekben lévő készlet – hiány.

Hiányon az s időpontig jelentkező, de ki nem elégített igények mennyiségét értjük.

A készletgazdálkodási folyamatot mármost a $0, T, 2T$ időpontokban feladott rendelésekkel úgy szabályozzuk, hogy a rendelés után a készletállapot szintje egy előre rögzített S szint legyen.

Mielőtt tovább mennénk, bemutatunk két speciális modellt.

1. **Modell.** Az irodalomból jól ismert S szintre felrendelés elnevezésű modell (ld. [1], [2]) az itt bemutatott általános modell speciális esete, amikor is

$$\eta(t) \equiv x \qquad \tau \leqslant t \leqslant \tau + T\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a rendelés a τ időpillanatban teljes egészében megérkezik.

2. **Modell.** Az újabbkeletű Prékopa-féle modellben az $\eta(t)$ érkezési folyamatot a következő módon képzelhetjük el: a szállítások száma n, ez rögzített. x nagyságú rendelés esetén a minimális szállított mennyiség

$$c = \lambda \cdot \frac{x}{n}\,, \tag{1.3}$$

ahol λ fix, egynél kisebb pozitív szám.

Az egyes szállítások alkalmával $c + \gamma_i$ mennyiség érkezik. Itt a γ_i számokat úgy kapjuk, hogy a fix λx nagyságú szállítmányon túl fennmaradó $(1 - \lambda)x$ nagyságú szállítást felosztjuk, mint egy $(1-\lambda)x$ hosszúságú intervallumot $n-1$ db független egyenletes eloszlású ponttal. Végül a szállítások időpontjait a $(\tau, \tau+T)$ időintervallumban n db. független egyenletes eloszlású pont rögzíti.

Ezt az $\eta(t)$ folyamatot a következő két összefüggés jellemzi:

$$(1.4) \qquad M(\eta(s)) = x \cdot \frac{s-\tau}{T}.$$

$$(1.5) \qquad M(\eta(s)\cdot\eta(t)) - M(\eta(s))\cdot M(\eta(t)) = \frac{\delta^2 x^2}{T^2}(s-\tau)(\tau+T-s) \qquad s \leqslant t$$

Itt még a δ^2 számot kell megadni:

$$(1.6) \qquad \delta^2 = \frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)(1-\lambda)^2\right].$$

Most rátérünk a költségek számbavételére.

A készletgazdálkodási folyamatnak az u.n. változó költségével foglalkozunk. Egységnyi árú egységnyi időre eső készletezési költsége IC. A hiányköltség számításakor időarányos költséget tételezünk fel. Egységnyi árunak egységnyi ideig fennálló hiánya $\hat{p}$ költséggel jár. Itt hallgatólagosan feltételeztük, hogy a ki nem elégített igénylő várakozik, tehát az igény nem vész el.

Ha az időegységre vett átlagkészlet nagyságát D-vel, az átlaghiány nagyságát pedig B-vel jelöljük, akkor az átlagos költség függvény

$$(1.7) \qquad \kappa = IC \cdot D + \hat{p}\cdot B.$$

A költségfüggvényt hosszú idő átlagában akarjuk minimalizálni. Belátható, hogy elegendő egy T hosszú intervallumra vett átlagot minimalizálni, pl. a $(\tau, \tau+T)$ intervallumra vonatkozóan.

A $(\tau, \tau+T)$ időintervallumból ragadjunk ki egy s pillanatot. A fizikai készlet nagyságát jelölje ξ_s, a hiány nagyságát pedig χ_s. (Nyilván $\xi_s \cdot \chi_s = 0$). Számítsuk most ki ξ_s-t. Az s időpontig $\alpha(0,s)$ nagyságú igény jelentkezik. A rendelkezésünkre álló készlet, amiből az igényeket kell fedeznünk a $\tau+T$ időpontban S, az s időpontban ennél kevesebb:

$$(1.8) \qquad S - (\eta(\tau+T) - \eta(s)).$$

Tehát

$$(1.9) \qquad \xi_s = S - (\eta(\tau+T) - \eta(s)) - \alpha(0,s),$$

ha ez pozitív. Vezessük be a

$$(1.10) \qquad \zeta_s = \eta(\tau+T) - \eta(s) + \alpha(0,s)$$

valószínűségi változót. Ez S-től nem függ, ti. $\eta(\tau+T)$ az előző periódus fogyasztásával egyenlő, ami S-től független. Most már (1.9) helyett ezt írhatjuk:

$$(1.11)\qquad \xi_s = S - \zeta_s \quad \text{ha} \quad S - \zeta_s > 0$$

és hasonlóan

$$(1.12)\qquad \chi_s = \zeta_s - S \quad \text{ha} \quad \zeta_s - S > 0\,.$$

A várható értékre pedig az

$$(1.13)\qquad M(\xi_s) = \int_0^s (S - x)\, dH_s(x)$$

és az

$$(1.14)\qquad M(\chi_s) = \int_s^\infty (x - S)\, dH_s(x)$$

kifejezéseket kapjuk, ahol $H_s(x)$ a ζ_s valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. A $(\tau, \tau + T)$ intervallumra vett átlagkészletre az

$$(1.15)\qquad \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} M(\xi_s)\, ds = \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}\int_0^S (S - x)\, dH_s(x) ds = \int_0^S (S - x) dH(x)$$

kifejezést kapjuk, ahol a $H(x)$ eloszlásfüggvény a $H_s(x)$ eloszlásfüggvények egy keveréke:

$$(1.16)\qquad H(x) = \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} H_s(x) ds\,.$$

Végül is az átlagkészletre, illetve az átlaghiányra a következő kifejezéseket kapjuk:

$$(1.17)\qquad D = \int_0^S (S - x)\, dH(x)$$

$$(1.18)\qquad B = \int_S^\infty (x - S)\, dH(x)\,.$$

2. A KÖLTSÉGFÜGGVÉNY MINIMALIZÁLÁSA

Mielőtt a minimális költség meghatározására rátérnénk, egy fontos összefüggést vezetünk le. Az átlaghiányt megadó kifejezést alakítsuk át a következőképpen:

$$(2.1)\qquad B = \int_S^\infty (x - S)\, dH(x) = \int_S^\infty x dH(x) - S(1 - H(S))\,.$$

Hasonlóan

$$(2.2)\qquad D = \int_0^S (S - x)\, dH(x) = SH(S) - \int_0^S x dH(x)\,.$$

A jobboldalon hozzuk be B-t:

$$(2.3)\qquad D = B + S - \int_0^\infty x dH(x)\,.$$

(2.4) Az $\int_0^\infty x dH(x) = M$

jelölést bevezetve kapjuk, hogy

(2.5) $D = B + S - M$

Ezt az összefüggést használjuk fel most a költségfüggvény kifejezésében:

(2.6) $\kappa = IC \cdot D + \hat{p}B = IC(B + S - M) + \hat{p}B = IC(S - M) + (IC + \hat{p}) \cdot B$.

A minimumhely meghatározásához S szerint deriváljuk κ -t:

(2.7) $\frac{\partial \kappa}{\partial S} = (IC + \hat{p}) \frac{dB}{dS} + IC$.

Az optimális S eleget tesz a $\frac{\partial \kappa}{\partial S} = 0$ egyenletnek. A most felírt kifejezés alapján tehát a

(2.8) $\frac{dB}{dS} = - \frac{IC}{IC + \hat{p}}$

egyenletet kell megoldanunk.

Mármost a

$$B = \int_S^\infty (x - S)\, dH(x)$$

kifejezést S szerint deriválva kapjuk, hogy

(2.9) $\frac{dB}{dS} = H(S) - 1$.

A (2.8) egyenlőségbe ezt beírva az optimális S szintre a következő egyenletet kapjuk:

(2.10) $H(S) = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}}$.

Mielőtt ezt az alapvető egyenlőséget tanulmányoznánk, vegyük észre, hogy maga a κ függvény konvex függvény, ugyanis

(2.11) $\frac{d\kappa}{dS} = (IC + \hat{p})(H(S) - 1) + IC$

növekvő függvény. A költségfüggvény általában egyetlen S helyen veszi fel minimumát, ez a hely (2.10) szerint a $H(x)$ eloszlásfüggvény egy $\hat{p}/(\hat{p} + IC)$ kvantilise. Ezt az értéket S_0-lal jelöljük.

Folytatjuk a minimális költség kiszámítására vonatkozó levezetéseket. A

(2.12)
$$\begin{aligned}\kappa &= IC(S - M) + (IC + \hat{p})B = IC(S - M) + \\ &+ (IC + \hat{p}) \int_S^\infty x dH(x) - (IC + \hat{p})S(1 - H(S))\end{aligned}$$

formulában használjuk fel az $1 - H(S_0) = IC/(IC + \hat{p})$ összefüggést:

$$(2.13) \qquad \kappa_0 = IC(S_0 - M) + (IC + \hat{p}) \int_{S_0}^{\infty} x dH(x) - S_0 \cdot IC ,$$

vagyis

$$(2.14) \qquad \kappa^0 = (IC + \hat{p}) \int_{S_0}^{\infty} x dH(x) - IC \cdot M ,$$

ahol κ^0 a κ minimumát jelöli. Ez az összefüggés lesz további vizsgálatunk alapja.

3. KÉT ÁLTALÁNOS MODELL ÖSSZEHASONLITÁSA

Tekintsünk két fenti típusú készletgazdálkodási modellt, amelyeket az a_1, a_2 illetve η_1, η_2 igény, illetve érkezési folyamatok jellemeznek. A készletezési illetve hiányköltség mindkét modellre IC illetve $\hat{p}$. A κ_1, κ_2 költségfüggvényeket változó készletezési és hiányköltségek mellett akarjuk összehasonlítani. Bevezetőben megmutatjuk, hogy általában adott költségek mellett az egyik modell nem lehet minden S-re jobb mint a másik modell. Irjuk fel ugyanis az általános

$$(3.1) \qquad \kappa(S) = IC(S - M) + (IC + \hat{p})B$$

formulát. A két költségfüggvény eltérésére mármost ezt írhatjuk:

$$(3.2) \qquad \kappa_1(S) - \kappa_2(S) = - IC(M_1 - M_2) + (IC + \hat{p})(B_1 - B_2) .$$

Tegyük fel most, hogy pl.

$$(3.3) \qquad M_1 < M_2 .$$

Az $S = 0$ helyen

$$(3.4) \qquad B(0) = \int_0^{\infty} x dH(x) = M ,$$

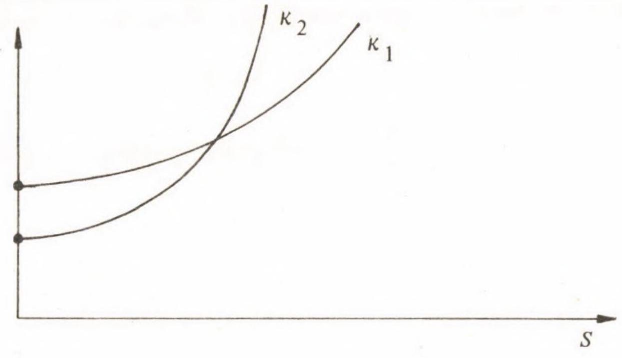
tehát

$$(3.5) \qquad \kappa_1(0) - \kappa_2(0) = \hat{p}(M_1 - M_2) < 0 .$$

Ha viszont $S \to \infty$, akkor $B(S) \to 0$, s ezért

$$(3.6) \qquad \kappa_1(S) - \kappa_2(S) \to -IC(M_1 - M_2) > 0 .$$

A két költségfüggvény tehát metszi egymást, ha $M_1 \neq M_2$ (ld. az ábrát), ezért szükséges az összehasonlítást a minimális költségekre végezni változó készletezési és hiányköltségek mellett.



Vezessük be a

$$\beta = \frac{\hat{p}}{IC + \hat{p}} \tag{3.7}$$

jelölést, a költségfüggvények minimumát pedig jelölje κ_1^0 és κ_2^0. Vezessük be végül az optimális S szintre az $S_1(\beta)$ ill. $S_2(\beta)$ jelöléseket. Ezeket a

$$\begin{aligned} &H_1(S_1(\beta)) = \beta \qquad \text{illetve a} \\ &H_2(S_2(\beta)) = \beta \end{aligned} \tag{3.8}$$

egyenletek alapján kapjuk. (H_1 és H_2 az 1. szakaszban bevezetett H függvénynek felelnek meg.)

A (2.14) eredmény alapján általában

$$\kappa^0(\beta) = (IC + \hat{p}) \int_{S(\beta)}^{\infty} x dH(x) - ICM\,. \tag{3.9}$$

Mi most azt vizsgáljuk, hogy mikor lesz

$$\kappa_2^0(\beta) \leqslant \kappa_1^0(\beta)$$

tetszőleges IC és $\hat{p}$ értékekre. Az idézett formula alapján ez az egyenlőtlenség $(IC + \hat{p})$-vel való osztás és némi átrendezés után egyenértékű az

$$\int_{S_2(\beta)}^{\infty} x dH_2(x) - \int_{S_1(\beta)}^{\infty} x dH_1(x) \leqslant (1 - \beta)(M_2 - M_1) \tag{3.10}$$

egyenlőtlenséggel, ahol felhasználtuk azt is, hogy $IC/(IC + \hat{p}) = 1 - \beta$.

Az egyenlőtlenség két oldalát vizsgáljuk most mint β függvényét. A jobboldal β-nak lineáris függvénye, amely értelmezve van a $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ értékekre.

A baloldalon vezessük be az

(3.11) $$L_i(\beta) = \int_{S_i(\beta)}^{\infty} x dH_i(x) \qquad i = 1, 2$$

jelöléseket. Számítsuk ki az $L(\beta) = L_2(\beta) - L_1(\beta)$ függvény értékét először a $\beta = 0$ és $\beta = 1$ helyeken.

Nyilván

(3.12) $$L_1(0) = \int_0^{\infty} x dH_1(x) = M_1 \quad \text{és}$$
$$L_2(0) = \int_0^{\infty} x dH_2(x) = M_2 ,$$

tehát

(3.13) $$L(0) = M_2 - M_1 ,$$

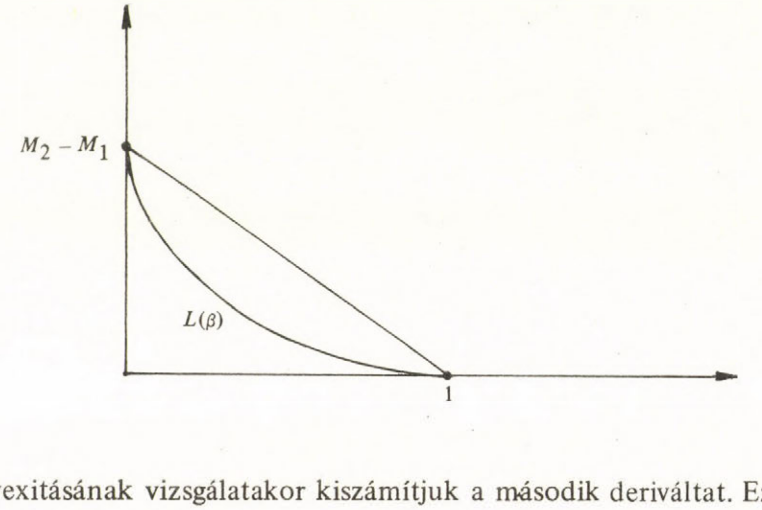
ami egyben a jobboldal értéke is a $\beta = 0$ helyen. $\beta = 1$ esetén pedig nyilván

(3.14) $$L_1(1) = L_2(1) = L(1) = 0 ,$$

ami ismét egyezik a jobboldallal. Az

(3.15) $$L(\beta) \leqslant (1 - \beta)(M_2 - M_1)$$

egyenlőtlenség teljesüléséhez elég tehát, ha $L(\beta)$ konvex (ld. az ábrát).



$L(\beta)$ konvexitásának vizsgálatakor kiszámítjuk a második deriváltat. Ezt megelőzően azonban meghatározzuk $S(\beta)$ deriváltját. A

$$H(S(\beta)) = \beta$$

összefüggést β szerint deriválva kapjuk:

(3.16) $$h(S(\beta)) \frac{dS}{d\beta} = 1 ,$$

vagyis

(3.17) $$\frac{dS}{d\beta} = \frac{1}{h(S(\beta))},$$

ahol $h(x)$ a $H(x)$ eloszlás sűrűségfüggvénye, amelynek létezését a továbbiakban feltesszük. Már most az

$$L_1(\beta) = \int_{S_1(\beta)}^{\infty} x h_1(x)\, dx$$

függvény deriváltja:

(3.18) $$\frac{dL_1}{d\beta} = - S_1(\beta) h_1(S_1(\beta)) \cdot \frac{1}{h_1(S_1(\beta))} = - S_1(\beta)$$

második deriváltja pedig

(3.19) $$\frac{d^2 L_1}{d\beta^2} = - \frac{dS_1}{d\beta} = - \frac{1}{h_1(S_1(\beta))}.$$

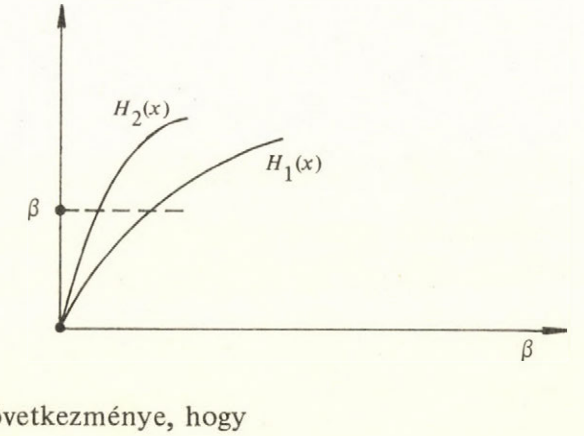
Az $L = L_2 - L_1$ függvényre tehát

(3.20) $$\frac{d^2 L}{d\beta^2} = \frac{1}{h_1(S_1(\beta))} - \frac{1}{h_2(S_2(\beta))}.$$

Ez pozitív akkor és csak akkor, ha

(3.21) $$h_1(S_1(\beta)) \leqslant h_2(S_2(\beta))$$

Ezt az alapvető összefüggést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a második modell jobb mint az első, ha a H_1 eloszlásfüggvény sűrűsége kisebb mint a H_2 eloszlásfüggvény sűrűsége bármely β kvantilis $0 < \beta < 1$ mentén összehasonlítva (ld. az ábrát).



E feltétel egy következménye, hogy

(3.22) $$H_2(x) > H_1(x).$$

Ugyanis a $H_i(x)$ függvény értéke x negatív értékére 0, és általában bármely pozitív x-re $H(x) > 0$. A $H_i^{-1}(y)$ inverz függvények tehát az $y = 0$ pontban egyenlők zérussal, ugyanakkor $H_2^{-1}(y)$ deriváltja kisebb mint $H_1^{-1}(y)$ deriváltja.

Ezért

$$(3.23) \qquad H_2^{-1}(y) < H_1^{-1}(y),$$

ami az állítással egyenértékű.

Az imént kapott eredményeket úgy is megkaphatjuk, hogy közvetlenül az átlagkészlet és az átlaghiány optimális értékeit vizsgáljuk. Jelöljük ezeket $D^0(\beta)$-val ill. $B^0(\beta)$-val. Könnyű megmutatni az előzőek alapján, hogy

$$(3.24) \qquad \frac{dD^0(\beta)}{d\beta} = \frac{\beta}{h(S^0(\beta))}$$

és

$$(3.25) \qquad \frac{dB^0(\beta)}{d\beta} = \frac{\beta - 1}{h(S^0(\beta))}.$$

Két modell esetére a

$$(3.26) \qquad D_1^0(\beta) \geqslant D_2^0(\beta)$$

és a

$$(3.27) \qquad B_1^0(\beta) \geqslant B_2^0(\beta)$$

feltételek együttes teljesülését kívánhatjuk meg. Ezek a feltételek pedig teljesülnek, ha (3.21) teljesül. A (3.26) egyenlőtlenség a $\beta = 0$ helyen ugyanis érvényes. Másrészt a baloldal deriváltja nagyobb, mint a jobboldal deriváltja minden β-ra (3.24), és (3.21) alapján, ezért az egyenlőtlenség helyes. Hasonlóan bizonyítható (3.27) is.

Ebben a formában eredményünk azt jelenti, hogy a második modell átlagkészlete csökkenthető az átlaghiány egyidejű csökkentésével.

A következő szakaszban a (3.21) feltétellel kapcsolatban végzünk speciális vizsgálatokat.

4. EGY SPECIÁLIS ÖSSZEHASONLITÁSI MÓDSZER

Először az 1. szakaszban bevezetett 1. és 2. modell viszonyát vizsgáljuk, majd bemutatunk egy normális eloszlással való közelítési módszert és azt a két említett modellre alkalmazzuk.

A két modell költségfüggvényeinek összehasonlításakor számítsuk ki a $H_1(x)$ és $H_2(x)$ keverék eloszlásokat. Valójában megelégszünk a várható értékek kiszámításával. Az

$$(4.1) \qquad M(S_s^{(1)}) = M(\alpha(0, s)) = m \cdot s \quad \text{és a}$$

$$(4.2) \qquad M(S_s^{(2)}) = M(\alpha(0, s) + \eta(\tau + T) - \eta(s)) = m(\tau + T)$$

összefüggésekből indulunk ki. A második összefüggés (1.4)-ből adódik, ha először az x feltétel mellett számítjuk a várható értékeket, s aztán figyelembevesszük, hogy az $x = \alpha(-T, 0)$

valószínűségi változó várható értéke $m \cdot T$.

A (4.1) illetve (4.2) egyenlőségek τ és $(\tau + T)$ határok közötti integrálközepe adja az M_1 illetve M_2 értékeket:

$$M_1 = m(\tau + \frac{T}{2}) \tag{4.3}$$

$$M_2 = m(\tau + T). \tag{4.4}$$

Mivel $M_1 < M_2$ a 3. szakasz bevezetése szerint

$$\kappa_1(0) \leqslant \kappa_2(0). \tag{4.5}$$

Ebből nyilván következik, hogy ha β elegendő kicsiny vagyis $\hat{p}$ kicsiny, akkor $S_1(\beta)$ és $S_2(\beta)$ is kicsi lévén, érvényes lesz a

$$\kappa_1^0(\beta) < \kappa_2^0(\beta) \tag{4.6}$$

egyenlőtlenség is. A klasszikus modell szerint történő gazdálkodás tehát alacsony hiányköltség esetén biztosan kedvezőbb.

Hogy a klasszikus modell totálisan is jobb (tehát β akármilyen értékére) azt egzakt módon nem tudjuk megvizsgálni, tekintve, hogy az intervallumszerű érkezés modelljében a keverékeloszlás explicit formában nem ismert. Mégis adunk némi támpontot, amelynek alapján a két modell költségfüggvényei összehasonlíthatók. A modellek kiszámításának elterjedt módszere, hogy pl. az igényfolyamatot Wiener-folyamattal közelítik. Prékopa idézett dolgozatában a ζ_s változó normális közelítése szerepel. Ezek a közelítések nehezen számítható integrálokra vezetnek, ezért most magát a ζ változó $H(x)$ eloszlását közelítjük normális eloszlással. Az ilyenfajta közelítések gyakorlati értékére később visszatérünk, most tisztán matematikai szempontból vizsgáljuk meg a kérdést.

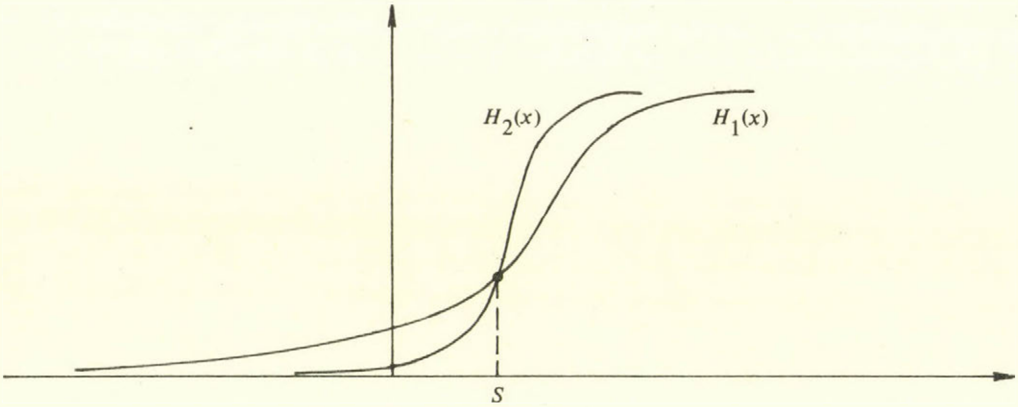
Legyenek tehát $H_1(x)$ és $H_2(x)$ normális eloszlásfüggvények m_1, σ_1 és m_2, σ_2 paraméterekkel. Ha $\sigma_1 = \sigma_2$, akkor a vizsgálandó (3.21) formulában nyilván egyenlőség szerepel. Tegyük fel tehát, hogy pl. $\sigma_2 < \sigma_1$.

Állítjuk, hogy ha $\sigma_2 < \sigma_1$, akkor a (3.21) feltétel teljesül, azaz:

$$h_1(S_1(\beta)) < h_2(S_2(\beta)). \tag{4.7}$$

A bizonyítás vázlata a következő: tetszőleges m-re bizonyítjuk, hogy a $H_1(x)$ és a $H_2(x - m)$ függvények görbéi egyetlen pontban metszik egymást (ld. az ábrát). (Ez annak következménye, hogy a $h_1(x)$ és $h_2(x - m)$ függvénygörbék pontosan két pontban metszik egymást). Mármost könnyű belátni, hogy

$$\begin{aligned} &H_1(x) > H_2(x) \quad \text{ha} \quad x \to -\infty \quad \text{és} \\ &H_1(x) < H_2(x) \quad \text{ha} \quad x \to +\infty \end{aligned} \tag{4.8}$$



az átmetszés módja tehát az ábrán korrekt módon van feltüntetve, az S metszéspontban

(4.9) $\quad h_1(S) < h_2(S)$.

A $H_2(x)$ függvény mozgatásával azonban az S metszéspont az egész számegyenest bejárhatja, s ez állításunkat bizonyítja.

A most ismertetett eredmény alapján hasonlítsuk össze a szakasz elején vizsgált 1. és 2. készletmodellt. A ζ_s változók $H_s(x)$ eloszlásfüggvényeinek $H(x)$ keverékét azonos várható értékű és azonos szórású normális eloszlással közelítjük. Számításaink alapján a szórásnégyzetekre a

(4.10) $$\Sigma_1^2 = \sigma^2\left(\tau + \frac{T}{2}\right) + \frac{m^2}{12} \cdot T^2 .$$

és a

(4.11) $$\Sigma_2^2 = \sigma^2\left(\tau + \frac{5}{6}T + \frac{\delta^2}{6}T\right) + \frac{\delta^2}{6} m^2 T^2$$

eredményeket kaptuk az 1. illetve 2. modellre. A $\kappa_1^0(0) < \kappa_2^0(0)$ egyenlőtlenségtől indíttatva azt vizsgáljuk meg, mikor lesz

(4.12) $$\Sigma_1^2 < \Sigma_2^2 .$$

A Σ_2^2 érték csökken, ha $\delta = 0$-t helyettesítünk be, elégséges feltétel ezért a

(4.13) $$\delta^2\left(\tau + \frac{T}{2}\right) + \frac{m^2}{12}T^2 < \delta^2\left(\tau + \frac{5}{6}T\right)$$

egyenlőtlenség. Némi átrendezés után az

(4.14) $$\frac{m}{\sigma} < \frac{2}{\sqrt{T}}$$

feltételt kapjuk. A gyakorlat számára a (4.14) összefüggés teljesülése azt jelenti, hogy ha lehetséges a rendelések egy tételben és a megadott határidőre történő szállítását kell előnyben részesíteni.

5. ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATOK

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, hogyan változik a költségfüggvény a felhasználási és az érkezési folyamat függvényében.

Az igény folyamat variációját az 1. modellen vizsgáljuk meg, de eredményeink nehézség nélkül átvihetők a 2. modellre is. A felhasználási folyamat legyen Wiener-folyamat. Ez egy már jól ellenőrzött közelítési módszer. A variáció abban áll, hogy e folyamat szórását csökkentjük.

Számítsuk ki először egy adott s időpillanatban fellépő hiány változását. Feladatunk az $\alpha(0, s) - S$ valószínűségi változó integráljának meghatározása a pozitív féltengelyen. Legyen e változó várható értéke m, szórása σ. A keresett kifejezés:

$$(5.1)\qquad R(m, \sigma) = \int_0^\infty x \, \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) dx .$$

Az integrálás elvégezhető és kapjuk, hogy

$$(5.2)\qquad R(m, \sigma) = \sigma\varphi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) + m\left[1 - \Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right)\right].$$

Ebből pedig a $\varphi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right)$ összefüggést figyelembevéve:

$$(5.3)\qquad \frac{\partial R(m, \sigma)}{\partial \sigma} = \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right).$$

A derivált pozitív, a hiány tehát σ növelésével együtt nő. Ez minden s időpillanatban így van, tehát a B átlagértékről is elmondhatjuk, hogy az σ-nak monoton függvénye.

A derivált numerikus értékét is megbecsüljük. Az (5.3) összefüggést az s időpillanatban jelentkező B_s hiányra alkalmazva a

$$(5.4)\qquad \frac{\partial}{\partial \sigma} B_s(\sigma) = \varphi\left(\frac{S - ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \cdot \sqrt{s} > \varphi\left(\frac{S - ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \cdot \sqrt{\tau}$$

eredményt kapjuk. Nem nehéz belátni, hogy ha s végigfut a $(\tau, \tau + T)$ intervallumon, akkor a jobb oldal minimuma valamelyik végpontban valósul meg, tehát

$$(5.5)\qquad \varphi\left(\frac{S - ms}{\sigma\sqrt{s}}\right) \geqslant \min\left\{\varphi\left(\frac{S - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad \varphi\left(\frac{S - m(\tau + T)}{\sigma\sqrt{\tau + T}}\right)\right\}.$$

Figyelembevéve most még a

$$(5.6)\qquad B = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} B_s ds$$

összefüggést kapjuk, hogy

$$(5.7)\qquad \frac{\partial B}{\partial \sigma} \geqslant \sqrt{\tau} \cdot \min\left\{\varphi\left(\frac{S - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \quad \varphi\left(\frac{S - m(\tau + T)}{\sigma\sqrt{\tau + T}}\right)\right\}.$$

Az átlagkészletre vonatkozóan nem kell újabb számítást végezni, ugyanis (2.5) alapján $D - B$ konstans, tehát

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma} = \frac{\partial B}{\partial \sigma} \tag{5.8}$$

bármely S-re. A $\kappa = IC \cdot D + \hat{p}B$ összefüggés és (5.7) és (5.8) alapján végül

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \sigma} \geqslant (IC + \hat{p}) \cdot \sqrt{\tau} \cdot \min\left\{ \varphi\left(\frac{S - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right), \quad \varphi\left(\frac{S - m(\tau + T)}{\sigma\sqrt{\tau + T}} \right) \right\}. \tag{5.9}$$

A $\sigma = 0$ határesetben az ismert Prékopa – Ziermann-féle modell egy minimumköltséges változatát kapjuk.

Az érkezési folyamatban változást a szállítások n számának növelésével tudunk eszközölni. Most a $\kappa^0(\beta)$ függvény változását vizsgáljuk meg, s ehhez az általunk bevezetett normális közelítést használjuk.

Az (1.6) formula alapján n növekedésével δ^2 csökken. Ebből pedig (4.11) alapján $\sum'^{2}_{2}$ csökkenése is következik, s ezáltal $\kappa^0(\beta)$ is kisebb lesz. Elmondhatjuk tehát, hogy ha már egyszer intervallumszerű az érkezés, akkor célszerű minél több részletben szállítani.

I r o d a l o m

[1] Prékopa András, Az S szintre való felrendelés elnevezésű készletmodell és annak kiterjesztése intervallumszerű érkezések esetén, Számológép, 1971.

[2] G. Hadley – T.M. Whitin, Analysis of Inventory Systems Prentice Hall, 1963.

Beérkezett: 1972 június 10.

S u m m a r y

Comparison of cost functions of inventory models called raising to S level

In given T intervals we re-examine the stock in store of a commodity and raise it by order to S level. In the general model the demand process has an independent growth, the arrival is an arbitrary stochastic process. A simple expression is given to that S_0 level for which the costs of storage and of articles missing are minimal. We compare two processes of general inventory control in which use and transportation can also be different. For arbitrary costs of storage and of articles missing we give a condition in order to make smaller the minimal cost of the second process than that of the first and to decrease the average stock simultaneously with the decrease of the average deficiency.

We apply the result to two special models. In the first model all commodities ordered arrive at the same time, whill in the second, so-called Prékopa model, the order is shipped in instalments at random times in even distributions of fixed number. A part of the incoming quantity is constant; while the part left behind from the order is distributed at random, according to an even distribution with the particular shipments. In case of low cost of articles missing the first model is more advantageous. If the demand process is approximated by a Wiener process, then the minimal cost of the process with smaller dispersion is smaller.

Р е з ю м е

Сравнение функций расходов в случае моделей запасов повышения до уровня S путём заказа.

Через данные интервалы времени T контролируем запас некоторого товара на складе и путём заказа повышаем уровень запаса до S. В общей модели процесс требований имеет независимое приращение, поставка товара - какой угодно стохастических процесс.Мы дадим простое выражение для такого уровня S_0, при котором затраты на хранение и потери от дефицита минимальны. Приведено сравнение двух общих процессов управления запасами, в которых как поставка товара, так и спрос могут быть различными. При любых расходах на хранение и потерях от дефицита дадим условие одновременного сокращения среднего запаса и среднего дефицита и того, чтобы минимальные расходы второго процесса были меньше расходов первого. Полученный результат применяется в двух специальных моделях. В первой из них всё заказанное количество товара поступает сразу, во второй, так называемой модели Прекопы, заказ поступает по частям в данное число случайных моментов времени равномерного распределения. Часть поступающего количества постоянна, в то время, как оставшаяся часть заказа разделяется между отделными транспортировками случайно по закону равномерного распределения. При низких потерях от дефицита первая модель выгоднее. Если процесс требований оппроксимируется с помощью процесса Винера, то ниже оказываются минимальные расходы процесса с меньшей дисперсией.