SZIMULÁCIÓS EREDMÉNYEK AZ ELEMI GAUSS FOLYAMAT PARAMÉTEREI BECSLÉSEINEK ELOSZLÁSÁRA

Arató Mátyás – Benczúr András

BEVEZETÉS

A dolgozatban megvizsgáljuk a stacionárius Gauss-Markov folyamat $m = M\xi(t)$ és λ ($M[(\xi(t) - m)(\xi(t+\tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$) paraméterei különböző becsléseinek viselkedését Monte-Carló módszerrel.

Az Arató-Benczur [1] (lásd még Benczur [1]) táblázatai alapján lehetőség van ($m = 0$ esetén) az időben folytonos eset maximum likelihood becslése és a 2. §. (2.1) – (2.5) becsléseinek összehasonlítására. Az I.1 – I.6 táblázatok megadják $T = 20, 60, 100$ megfigyelés esetén az empirikus eloszlások $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ kvantiliseit. Figyelemre méltó a statisztikai irodalomban nem használt

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2\sum_0^T \xi_i^2} \tag{2.4}$$

becslés eloszlása kvantiliseinek jó egyezése a λ_p (elméleti úton nyert) oszlop kvantiliseivel.

A 3 §. táblázataiban a (3.1) – (3.3) becslések eloszlásainak kvantiliseit adjuk meg. A II. táblázat m becsléseinek átlagát és szórását adja meg. Az m különböző becslései azonosan viselkednek és szórásuk közel van az elméletileg adódó $\frac{1}{2\lambda}$ értékhez (de nem az $\frac{1}{2\tilde{\lambda}}$ értékhez). A λ paraméter becsléseiből nem adódnak alsó konfidencia határok, mivel tetszőleges $\tilde{\lambda}$ becslésre adott $\underline{p}$ esetén λ-tól függetlenül létezik olyan x_p, hogy

$$\sup_{\lambda > 0} P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda} > x_p\} \geq p.$$

Az x_p értékek numerikus meghatározása csak a (3.3) becslések esetén sikerült elméleti úton. A III. táblázatok megadják a p ($p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$) kvantilisek viselkedését λ függvényében.

Az empirikus eloszlásfüggvényeket 100-as mintákra határoztuk meg. Egy λ, T értékpárhoz 10-20 ilyen empirikus eloszlásfüggvényt számoltunk ki. A program leírását a 4. §-ban adjuk meg. Adott paraméterérték és kiinduló véletlen szám esetén a program 1-2 perc időtartam alatt fut le (CDC 3300-as típusú gépen).

1. §. A LIKELIHOOD FÜGGVÉNY

A $\xi(t)$ időben folytonos stacionárius, Gauss-Markov folyamat az $M\xi(t) = m$, $M(\xi(t) - m) \cdot (\xi(t + \tau) - m) = \sigma^2 \cdot e^{-\lambda|\tau|}$ összefüggésekben szereplő m, σ^2, λ paraméterekkel jellemezhető (m tetszőleges valós, $\lambda > 0$). Ismeretes, hogy a $\sigma_{\bar\epsilon}^2 = 2\lambda\sigma^2$ paraméter a $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ folyamat egy realizációjából 1 valószínűséggel becsülhető (Baxter tétele). A folyamatot jellemző két paraméternek a λ és m mennyiségeket tekintjük, mivel a

$$t = t' \cdot T, \qquad \xi(t) = \zeta(t') \cdot \sigma_{\bar\epsilon} \cdot \sqrt{T} \tag{1.1}$$

leképezéssel az általános feladatot a $\sigma_{\bar\epsilon} = 1$ és $T = 1$ esetre vezethetjük vissza. A továbbiakban ezért a realizációkat mindig a $[0, 1]$ intervallumban vizsgáljuk. A két paraméter együttes becslése eloszlása megvizsgálását Kolmogorov vetette fel 1948-ban Jerevánban. Részbeni megoldást – amikor is egyetlen ismeretlen paraméter van – adnak Arató [1], [2], valamint Benczúr [1] és Arató-Benczúr [1] cikkei.

Az időben folytonos folyamatról jólismert, hogy kielégíti a

$$d\xi(t) = -\lambda\xi \cdot dt + d\bar\epsilon(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet.

A továbbiakban szükségünk van a következő tételre:

1. Tétel: A $\xi(n)$ reguláris folyamat akkor és csak akkor stacionárius Gauss-Markov típusú, ha kielégíti a

$$\xi(n) = \rho\xi(n - 1) + \epsilon(n) \tag{1.2}$$

differencia egyenletet, ahol $\epsilon(n)$ egy független Gauss sorozat.

Az 1. Tétel alapján az időben folytonos folyamat diszkrét $\xi(n\Delta)$ megfigyelései, ($\Delta > 0$ és $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), kielégítik a (2) összefüggést, ahol

$$\rho = e^{-\lambda \cdot \Delta}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}, \quad \sigma_\epsilon^2 = \frac{(1 - e^{-2\lambda \cdot \Delta})}{2\lambda}.$$

A (2) összefüggés módot nyújt az időben folytonos folyamat pontos imitálására számológépen.

A $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$ realizációk terén értelmezett $P_{\lambda,m}$ Gauss-Markov mérték, valamint a $V = L \times W$ standard mérték, ahol L a Lebesgue, W pedig a feltételes Wiener mérték Radon – Nikodym deriváltja (lásd Arató [2])

$$\frac{dP}{dV}(\xi(t)) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}[(\xi(0) - m)^2 + (\xi(1) - m)^2 - 1 + \lambda\int_0^1 (\xi(1) - m)^2 ds]\right\} = \tag{1.3}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}[\xi^2(0) + \xi^2(1) + \lambda \int_0^1 \xi^2(s)ds - 2m(\xi(0) + \xi(1) + \lambda \int_0^1 \xi(s)ds) + \right.$$

$$\left. + m^2(1 + \lambda) - 1]\right\} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\left[\frac{(\xi(1) - \xi(0))^2}{2} - 1 + \lambda \int_0^1 (\xi(s) - \int_0^1 \xi(s)ds)^2 ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\left(m - \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2}\right)^2 + \lambda(m - \int_0^1 \xi(s)ds)^2\right]\right\}.$$

Az időben diszkrét $\xi_1, \dots, \xi_n$ realizáció sűrűségfüggvénye

$$(1.4) \quad p(x_1, \dots, x_n) = (2\pi\sigma)^{-n}(1 - \rho^2)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1 - \rho^2)}[(x_1 - m)^2(1 - \rho^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho x_{i-1} - m(1 - \rho))^2]\right\} = (2\pi\sigma)^{-n}(2\pi\sigma)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2}[(x_1 - \right.$$

$$\left. - m)^2(1 - \rho^2) + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \rho x_{i-1} - m(1 - \rho^2))^2]\right\}.$$

A (3) és (4) összefüggésekből az m, λ (ill. m, ρ) paraméterek maximum likelihood becsléseire a következő egyenleteket kapjuk:

$$(1.5) \quad \frac{1}{2\lambda} - (s_1^2 - 1/2) - \lambda s_2^2 - (m - m_1)^2 - \lambda(m - m_2)^2 = 0\,,$$

$$2(m - m_1) + \lambda(m - m_2) = 0\,,$$

ahol

$$m_1 = \frac{\xi(0) + \xi(1)}{2}\,, \quad m_2 = \int_0^1 \xi(s)ds,\ s_1^2 = \frac{1}{4}(\xi(1) - \xi(0))^2\,,\ s_2^2 = \int_0^1(\xi(s) - \int_0^1 \xi(t)dt)^2 ds.$$

Az (5) egyenletek alapján az $\hat{m}$, $\hat{\lambda}$ becslések között a következő összefüggések adódnak:

$$(1.5') \quad \hat{m} = \frac{2m_1 + \hat{\lambda} m_2}{2 + \hat{\lambda}}\,,$$

$$(2 + \hat{\lambda})^2 - 2\hat{\lambda}(2 + \hat{\lambda})^2(s_1^2 - 1/2) - 2\hat{\lambda}^2(2 + \hat{\lambda})^2 s_2^2 - 2\hat{\lambda}^3(m_2 - m_1)^2 -$$

$$- 2\hat{\lambda}^4(m_2 - m_1)^2 = 0\,.$$

Az s_1^2, s_2^2, $m_2 - m_1$ statisztikák előnye, hogy függetlenek a $\xi(t)$ folyamat kiindulási értékétől.

Az időben diszkrét esetben

$$(1.6)\quad \frac{1-\rho}{\sigma_\epsilon^2}\left\{(1+\rho)(x_1-m)+\sum_2^4[x_i-m-\rho(x_{i-1}-m)]\right\}=0-$$

$$-\frac{\rho}{1-\rho^2}+\frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\left\{\rho(x_1-m)^2+\sum_2^4[x_i-m-\rho(x_{i-1}-m)](x_{i-1}-m)\right\}=0$$

adódik, ahonnan

$$\widetilde{m}=\frac{x_1+x_n+(1-\widetilde{\rho})\sum_2^{n-1}x_i}{2+(n-2)(1-\widetilde{\rho})}-$$

$$-\widetilde{\rho}\cdot\sigma_\epsilon^2+(1-\widetilde{\rho}^2)\left\{\widetilde{\rho}(x_1-\widetilde{m})^2+\sum_2^n[x_i-\widetilde{m}-\widetilde{\rho}(x_{i-1}-\widetilde{m})](x_{i-1}-\widetilde{m})\right\}=0.$$

Az

$$m_1=\frac{1}{2}(\xi(0)+\xi(T)),\quad m_2=\frac{1}{T}\int_0^T\xi(t)dt,\quad s_{01}^2=\frac{1}{2}[\xi^2(0)+\xi^2(T)],\quad s_{02}^2=\int_0^T\xi^2(t)dt$$

statisztikák együttes karakterisztikus függvényére, lásd Arató [1], ($M\,\xi(t)=0$ esetén)

$$M\exp\left\{i(\alpha_1m_1+\alpha_2s_{01}^2+\alpha_3m_2+\alpha_4s_{02}^2)\right\}=\frac{2\sqrt{\lambda}\,e^{\frac{K}{2}}\varphi_1^{1/2}(\alpha_4)}{\sqrt{T}[\varphi(\alpha_2,\alpha_4)]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\frac{1}{2}\left\{-\frac{\alpha_1\alpha_3\sigma_\epsilon^2+\alpha_3^2\sigma_\epsilon^2}{\varphi_1^2(\alpha_4)}T+\left(\frac{i\alpha_1}{2}-\frac{i\alpha_3\lambda+\alpha_2\alpha_3\sigma_\epsilon^2}{\varphi_1^2(\alpha_4)}\right)\left[\left(\frac{i\alpha_1\sigma_\epsilon^2}{2}(1+e^{-\varphi_1(\alpha_4)})+i\alpha_3\sigma_\epsilon^2\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1-e^{-\varphi_1(\alpha_4)}}{\varphi_1(\alpha_4)}\right)\cdot\frac{(K-Ti\alpha_2\sigma_\epsilon^2+\sqrt{K^2-2T\sigma_\epsilon^2i\alpha_4})e^{\varphi(\alpha_4)}-(K-T\sigma_\epsilon^2i\alpha_2-\varphi(\alpha_4))}{T\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}+$$

$$+\left(\frac{i\alpha_1}{2}\sigma_\epsilon^2(1+e^{-\varphi(\alpha_4)})-i\alpha_3\sigma_\epsilon^2\frac{1-e^{\varphi(\alpha_4)}}{\sqrt{K^2-2T\sigma_\epsilon^2i\alpha_4}}\right)\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\frac{(K-T\sigma_\epsilon^2i\alpha_2+\varphi(\alpha_4))-(K-T\sigma_\epsilon^2i\alpha_4)\,\varphi(\alpha_4))e^{-\varphi(\alpha_4)}}{T\varphi(\alpha_2,\alpha_4)}\right]\right\}$$

adódik, ahol $K=\lambda\cdot T$

$$\varphi_1(\alpha)=\sqrt{K^2-2T\sigma_\epsilon^2i\alpha}$$

$$\varphi(\alpha_2,\alpha_4)=\frac{1}{T^2}e^{\varphi(\alpha_4)}(K-T\sigma_\epsilon^2i\alpha_2+\varphi(\alpha_4))^2-$$

$$-\frac{1}{T^2}\cdot e^{-\varphi(\alpha_4)}(K - T\sigma_\varepsilon^2 i\alpha_2 - \varphi(\alpha_4))^2 .$$

A karakterisztikus függvény felírása azonban nem jelenti a probléma megoldását, mivel a legegyszerűbb becsléseket véve is a két ismeretlen paramétere, (pl. a $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt$, $\int_0^T(\xi(s)-\frac{1}{T}\int\xi(t)dt)^2 ds$ statisztikákat) azok eloszlása (karakterisztikus függvénye) nem határozható meg. A statisztikák aszimptotikus viselkedésére vonatkozó következtetéseket azonban le tudjuk vonni. Tekintsük a $\sqrt{\lambda}m_1$, $\sqrt{\lambda}m_2$, λs_{01}^2, $\lambda^2 s_{02}^2$ statisztikák karakterisztikus függvényét $\lambda \to 0$ esetén. Könnyen látható, hogy

$$Me^{i(\alpha_1\sqrt{\lambda}m_1+\alpha_2\sqrt{\lambda}m_2+\alpha_3\sqrt{\lambda}s_{01}^2+\alpha_4\lambda^2 s_{02}^2)} = \frac{(1+\frac{K}{2})}{\left\{1-\sigma_\varepsilon^2 i\alpha_2+\frac{K}{2}[(1-\sigma_\varepsilon^2 i\alpha_2)^2+1-2\sigma_\varepsilon^2\frac{i\alpha_4}{T}]\right\}^{1/2}} + o(K) .$$

2. §. EGYETLEN ISMERETLEN PARAMÉTER KÜLÖNBÖZŐ BECSLÉSEI ÉS A BECSLÉSEK ELOSZLÁSAI

Ha a $\xi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ folyamat egyetlen ismeretlen paramétere $m = M\xi(t)$, akkor m maximum likelihood becslése

$$\hat{m} = \frac{m_1 + m_2}{2+\lambda}$$

normális eloszlású m, $D^2(\hat{m}) = \frac{2\sigma_\xi^2}{2+\lambda}$ paraméterekkel (lásd pl. Grenander [1]).

Legyen a továbbiakban $m = 0$ és az ismeretlen paraméter λ. A λ paraméter maximum likelihood becslésének eloszlását különböző λ értékekre egy előbbi cikkünkben megadtuk (Arató – Benczúr [1]). Mivel mind a folytonos, mind a diszkrét esetben eddig ez az egyetlen analitikus úton meghatározott s táblázatba foglalt eloszlás, a gyakorlatban használt becsléseknek a maximum likelihood becsléssel való összehasonlítása és az időben diszkrét és időben folytonos eset eredményeinek összevetése igen fontosnak tűnik. A már említett Arató – Benczúr [1] cikk táblázataiból látható, hogy a maximum likelihood becslés eloszlásának normális eloszlással való közelítése csak $\lambda T > 1000$ értékekre használható! Ez a körülmény is szükségessé teszi a pontos eloszlások meghatározását, amikor az lehetséges. A CDC-3300-as gépre került szimulációs programban az időben diszkrét megfigyelések $\rho = e^{-\lambda/T}$ (ahol T a $[0,1]$ intervallumba eső megfigyelések száma) paraméterének különböző becsléseit vizsgáljuk, ahonnan a $\lambda = -T \log \rho$ összefüggés alapján számíthatók λ becslései. A program leírását a 4. §.-ban adjuk meg. A következő becsléseket vizsgáljuk:

(2.1) $$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_1^T \xi_i \xi_{i-1}}{\sum_1^T \xi_i^2},$$

(2.2) $$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_1^T \xi_i \xi_{i-1}}{\sum_0^T \xi_i^2},$$

(2.3) $$\hat{\rho}_3 = \frac{T+1}{T} \frac{\sum_1^T \xi_i \xi_{i-1}}{\sum_0^T \xi_i^2},$$

(2.4) $$\hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2\sum_0^T \xi_i^2},$$

(2.5) $\hat{\rho}_5$ a ρ maximum likelihood becslése:

$$(1 - \hat{\rho}_5^2)(\sum_{i=1}^T \xi_i \xi_{i-1} - \hat{\rho}_5 \sum_1^{T-1} \xi_i^2) - \hat{\rho}_5 (1 - \hat{\rho}_5)/2\lambda = 0 .$$

T értékét 20, 60, 100-nak (egyes esetekben 500, 800, 1000) választottuk. A folytonos folyamat maximum likelihood becslése eloszlásával való összehasonlításból látható, hogy a $0 < \lambda \leq 10$ intervallumban a folytonos folyamattal való egyezéshez gyakorlatilag elegendő a T = 60, ill. 100 választása.

Fix λ, T értékek esetén n = 100 különböző realizációra határoztuk meg a $\hat{\lambda}_{i,k}$ $(i = 1, \dots, 5;\ k = 1,2, \dots, 100)$ értékeket s a megfelelő $F_{i,n}(x)$ $(i = 1, \dots, 5)$ empirikus eloszlásokat:

$$F_{i,n}(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{ha} \quad \hat{\lambda}_{i,k} \leq x < \hat{\lambda}_{i,k+1} \quad (i = 1, \dots, 5;\ k = 1,2, \dots 100).$$

Az alábbi táblázatban megadjuk a különböző becslések p kvantiliseit a p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95 értékekre, azaz a táblázatban (adott T, λ értékek mellett) fix p-re azon λ_p szerepel, melyre $F_{i,n}(\lambda_p) = p$. A λ_p értékeket az empirikus eloszlásokból átlagolással számítottuk (adott λ, T esetén 10 – 20 darab 100-as elemszámú empirikus eloszlásfüggvény meghatározására került sor).

A táblázatok 6. oszlopában az időben folytonos folyamat maximum likelihood becslésre elméletileg számolt λ_p érték szerepel.

Külön táblázatban megadjuk az empirikus eloszlásfüggvényekből számított várható értékek átlagát is (I. 7. táblázat)

I.1. táblázat (p = 0.01 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_\lambda\{\hat\lambda_i \leqslant z\} = 0.01$

$\lambda \diagdown \hat\lambda_i$			$\hat\lambda_1$	$\hat\lambda_2$	$\hat\lambda_3$	$\hat\lambda_4$	$\hat\lambda_5$	$\lambda_{0.01}$
			(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
		20	–0.16	0.945	–0.042	$0.36 * 10^{-3}$	$0.14 * 10^{-6}$	
0.000001	T=	60	–0.05	0.96	–0.034	$0.13 * 10^{-6}$	$0.77 * 10^{-7}$	$0.15 * 10^{-6}$
		100	–0.18	0.91	–0.089	$0.16 * 10^{-6}$	$0.90 * 10^{-7}$	
			(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
		20	–0.085	0.91	–0.065	$0.14 * 10^{-5}$	$0.14 * 10^{-5}$	
0.00001	T=	60	–0.22	0.92	–0.133	$0.15 * 10^{-5}$	$0.12 * 10^{-5}$	$0.15 * 10^{-5}$
		100	–0.22	0.89	–0.081	$0.13 * 10^{-5}$	$0.07 * 10^{-5}$	
			(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
		20	–0.42	0.82	–0.15	$0.13 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	
0.0001	T=	60	–0.45	0.91	–0.07	$0.14 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-4}$
		100	–0.39	0.82	–0.17	$0.08 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-4}$	
			(18)			(18)	(18)	
		20	–0.68			$0.14 * 10^{-3}$	$0.14 * 10^{-3}$	
0.001	T=	60	–0.80			$0.13 * 10^{-3}$	$0.11 * 10^{-3}$	$0.15 * 10^{-3}$
		100	–0.98			$0.15 * 10^{-3}$	$0.10 * 10^{-3}$	
			(14)(13)(13)	(5)	(5)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	
		20	–1.16	0.65	–0.32	$0.13 * 10^{-2}$	$0.12 * 10^{-2}$	
0.01	T=	60	–1.02	0.63	–0.36	$0.15 * 10^{-2}$	$0.10 * 10^{-2}$	$0.16 * 10^{-2}$
		100	–0.95	0.57	–0.42	$0.15 * 10^{-2}$	$0.10 * 10^{-2}$	
			(8)(8)(7)			(8)(8)(8)	(8)(8)(8)	
		20	–1.80			0.017	0.016	
0.1	T=	60	–1.58			0.018	0.017	$0.16 * 10^{-1}$
		100	–1.50			0.014	0.012	
			(9)(8)(8)			(9)(8)(8)	(9)(8)(8)	
		20	–1.98			0.07	0.08	
0.5	T=	60	–1.58			0.08	0.06	0.09
		100	–1.31			0.09	0.06	
			(13)(12)(12)	(5)	(5)	(13)(12)(12)	(13)(12)(12)	
		20	–1.55	0.58	–0.39	0.16	0.18	
1.0	T=	60	–1.69	0.67	–0.31	0.20	0.20	0.205
		100	–1.14	0.53	–0.46	0.16	0.14	
			(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
		20	–1.26	0.72	0.73	0.40	0.41	
2.0	T=	60	–0.77	0.86	0.87	0.51	0.45	0.48
		100	–0.57	0.84	0.84	0.48	0.35	
			(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
		20	–0.28	0.97	–0.003	0.68	0.64	
3.0	T=	60	–0.08	1.11	0.12	0.73	0.62	0.807
		100	–0.19	1.11	0.120	0.67	0.56	
			(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
		20	–0.55	1.056	0.084	0.95	0.80	
4.0	T=	60	0.02	1.36	0.47	1.08	0.98	1.192
		100	0.13	1.49	0.509	1.07	0.75	
			(12)(11)(11)	(10)	(10)	(12)(11)(11)	(12)(11)(11)	
		20	0.25	1.37	0.40	1.46	1.13	
5.0	T=	60	0.93	1.86	0.87	1.58	1.34	1.615
		100	0.78	1.97	0.98	1.53	1.21	
			(10)	(5)	(5)	(9)	(9)(9)(8)	
		20	2.31	2.74	1.77	3.81	2.76	
10.0	T=	60	3.27	4.12	3.13	4.25	3.21	4.20
		100	3.12	4.26	3.27	4.21	3.18	

I.2. táblázat (p = 0.05 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_\lambda\{\hat{\lambda}_i \leq z\} = 0.05$

λ \ $\hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.05}$
		(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	
	20	–0.02	0.97	–0.006	$0.21 * 10^{-6}$	$0.23 * 10^{-6}$	
0.000001	T= 60	$-0.70 * 10^{-2}$	0.99	–0.0030	$0.22 * 10^{-6}$	$0.19 * 10^{-6}$	$0.26 * 10^{-6}$
	100	–0.01	0.99	–0.0053	$0.11 * 10^{-6}$	$0.19 * 10^{-6}$	
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
	20	–0.02	0.96	–0.0101	$0.25 * 10^{-5}$	$0.24 * 10^{-5}$	
0.00001	T= 60	–0.03	0.97	–0.014	$0.27 * 10^{-5}$	$0.20 * 10^{-5}$	$0.26 * 10^{-5}$
	100	–0.04	0.97	–0.021	$0.24 * 10^{-5}$	$0.13 * 10^{-5}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
	20	–0.13	0.93	–0.036	$0.27 * 10^{-4}$	$0.25 * 10^{-4}$	
0.0001	T= 60	–0.10	0.95	–0.04	$0.26 * 10^{-4}$	$0.20 * 10^{-4}$	$0.26 * 10^{-4}$
	100	–0.08	0.95	–0.04	$0.27 * 10^{-4}$	$0.14 * 10^{-4}$	
		(18)			(18)	(18)	
	20	–0.19			$0.26 * 10^{-3}$	$0.25 * 10^{-3}$	
0.001	T= 60	–0.20			$0.25 * 10^{-3}$	$0.20 * 10^{-3}$	$0.26 * 10^{-3}$
	100	–0.22			$0.27 * 10^{-3}$	$0.18 * 10^{-3}$	
		(14)	(5)	(5)	(13)	(14)	
	20	–0.42	0.78	–0.19	$0.24 * 10^{-2}$	$0.22 * 10^{-2}$	
0.01	T 60	–0.35	0.83	–0.15	$0.26 * 10^{-2}$	$0.23 * 10^{-2}$	$0.26 * 10^{-2}$
	100	–0.41	0.79	–0.202	$0.27 * 10^{-2}$	$0.20 * 10^{-2}$	
		(5)			(8)	(8)	
	20	–0.82			0.026	0.026	
0.1	T= 60	–0.69			0.030	0.028	$0.27 * 10^{-1}$
	100	–0.64			0.026	0.020	
		(8)			(8)	(9)	
	20	–0.74			0.14	0.13	
0.5	T= 60	–0.65			0.16	0.12	$0.15 * 10^{-1}$
	100	–0.66			0.14	0.09	
		(13)	(5)	(5)	(12)	(12)	
	20	–0.46	0.83	–0.144	0.29	0.28	
1.0	T= 60	–0.52	0.91	–0.044	0.34	0.31	0.332
	100	–0.44	0.88	–0.13	0.30	0.25	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
	20	–0.25	1.16	1.16	0.63	0.58	
2.0	T= 60	0.28	1.43	1.43	0.81	0.73	0.75
	100	0.36	1.32	1.32	0.74	0.71	
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
	20	0.61	1.56	0.87	1.13	1.02	
3.0	T= 60	0.79	1.51	0.64	1.25	1.15	1.233
	100	0.67	1.70	0.73	1.12	0.92	
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
	20	0.93	2.06	1.093	1.67	1.30	
4.0	T= 60	1.55	2.24	1.25	1.70	1.54	1.760
	100	1.27	2.15	1.16	1.62	1.38	
		(12)(12)(11)	(10)	(10)	(12)	(11)	
	20	1.54	2.45	1.48	2.13	1.86	
5.0	T= 60	2.04	2.73	1.74	2.28	2.27	2.325
	100	1.97	2.83	1.84	2.23	1.91	
		(9)(10)(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
	20	3.68	4.74	3.77	5.23	3.99	
10.0	T= 60	5.03	5,66	4.67	5.71	5.12	5.50
	100	5.04	5.66	5.67	5.09	5.07	

I.3. táblázat (p = 0.1 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_\lambda \{\hat{\lambda}_i \leqslant z\} = 0.1$

λ \ $\hat{\lambda}_i$			$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.1}$
			(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(1)(1)	(3)(2)(1)	
		20	$-0.57 * 10^{-2}$	0.97	−0.003	$0.37 * 10^{-6}$	$0.36 * 10^{-6}$	
0.000001	T=	60	$-0.45 * 10^{-2}$	0.99	−0.002	$0.28 * 10^{-6}$	$0.25 * 10^{-6}$	$0.369 * 10^{-6}$
		100	$-0.49 * 10^{-2}$	0.99	−0.002	$0.27 * 10^{-6}$	$0.16 * 10^{-6}$	
			(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
		20	−0.013	0.97	−0.0065	$0.34 * 10^{-5}$	$0.32 * 10^{-5}$	
0.00001	T=	60	−0.02	0.98	−0.0092	$0.41 * 10^{-5}$	$0.31 * 10^{-5}$	$0.369 * 10^{-5}$
		100	−0.02	0.98	−0.0108	$0.33 * 10^{-5}$	$0.18 * 10^{-5}$	
			(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
		20	−0.05	0.95	−0.02	$0.37 * 10^{-4}$	$0.35 * 10^{-4}$	
0.0001	T=	60	−0.04	0.96	−0.02	$0.38 * 10^{-4}$	$0.22 * 10^{-4}$	$0.369 * 10^{-4}$
		100	−0.04	0.97	−0.019	$0.37 * 10^{-4}$	$0.20 * 10^{-4}$	
			(18)			(18)	(18)	
		20	−0.12			$0.38 * 10^{-3}$	$0.37 * 10^{-3}$	
0.001	T=	60	−0.10			$0.36 * 10^{-3}$	$0.29 * 10^{-3}$	$0.369 * 10^{-3}$
		100	−0.13			$0.37 * 10^{-3}$	$0.24 * 10^{-3}$	
			(14)(13)(13)	(5)	(5)	(14)	(14)	
		20	−0.25	0.86	−0.11	$0.33 * 10^{-2}$	$0.32 * 10^{-2}$	
0.01	T=	60	−0.22	0.89	−0.093	$0.35 * 10^{-2}$	$0.29 * 10^{-2}$	$0.369 * 10^{-2}$
		100	−0.25	0.87	−0.12	$0.37 * 10^{-2}$	$0.27 * 10^{-2}$	
			(8)(8)(7)			(8)	(8)	
		20	−0.50			0.041	0.041	
0.1	T=	60	−0.46			0.038	0.036	$0.369 * 10^{-1}$
		100	−0.39			0.035	0.029	
			(9)(9)(8)			(9)	(9)	
		20	−0.31			0.20	0.19	
0.5	T=	60	−0.36			0.21	0.17	0.209
		100	−0.45			0.22	0.12	
			(13)(13)(12)	(5)	(5)	(13)(13)(12)	(13)(12)(12)	
		20	−0.05	0.98	0.0104	0.42	0.40	
1.0	T=	60	0.03	1.07	0.084	0.45	0.41	0.445
		100	−0.09	1.07	0.075	042	0.36	
			(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
		20	0.36	1.48	1.48	0.74	0.80	
2.0	T=	60	0.71	1.77	1.78	1.08	1.02	0.972
		100	0.67	1.606	1.608	0.91	1.01	
			(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
		20	1.06	1.930	0.96	1.41	1.35	
3.0	T=	60	1.32	2.04	1.05	2.03	1.44	1.557
		100	1.17	2.16	1.17	1.47	1.23	
			(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
		20	1.53	2.69	1.72	2.03	1.78	
4.0	T=	60	1.91	2.73	1.74	2.19	1.99	2.180
		100	1.80	2.64	1.71	2.06	1.77	
			(11)	(10)	(10)	(12)	(12)	
		20	2.17	2.97	1.980	2.47	2.34	
5.0	T=	60	2.59	3.39	2.38	2.89	2.86	2.835
		100	2.50	3.33	2.34	2.65	2.40	
			(9)	(5)	(5)	(9)	(9)	
		20	4.46	5.904	4.93	6.03	5.10	
10.0	T=	60	6.15	6.90	5.92	6.52	6.23	6.38
		100	5.71	6.77	5.78	5.87	5.55	

I.4. táblázat (p = 0.5 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_\lambda\{\hat{\lambda}_i \leq z\} = 0.5$

λ \ $\hat{\lambda}_i$		$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$
		(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(1)(1)	(3)(2)(1)
	20	$-0.01 * 10^{-3}$	0.98	$-0.13 * 10^{-3}$	$0.24 * 10^{-5}$	$0.23 * 10^{-5}$
0.000001	T= 60	$-0.30 * 10^{-4}$	0.99	$-0.67 * 10^{-4}$	$0.15 * 10^{-5}$	$0.14 * 10^{-5}$
	100	$0.20 * 10^{-4}$	1.00	$-0.18 * 10^{-3}$	$0.17 * 10^{-5}$	$0.90 * 10^{-6}$
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)
	20	$0.48 * 10^{-3}$	0.98	$-0.27 * 10^{-3}$	$0.21 * 10^{-4}$	$0.22 * 10^{-4}$
0.00001	T= 60	$-0.28 * 10^{-3}$	0.99	$-0.18 * 10^{-3}$	$0.25 * 10^{-4}$	$0.19 * 10^{-4}$
	100	$0.09 * 10^{-3}$	0.99	$-0.92 * 10^{-4}$	$0.21 * 10^{-4}$	$0.12 * 10^{-4}$
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)
	20	$-0.2 * 10^{-3}$	0.97	$-0.19 * 10^{-3}$	$0.23 * 10^{-3}$	$0.21 * 10^{-3}$
0.0001	T= 60	0.001	0.99	$0.33 * 10^{-3}$	$0.22 * 10^{-3}$	$0.16 * 10^{-3}$
	100	$0.13 * 10^{-3}$	1.00	$0.11 * 10^{-2}$	$0.22 * 10^{-3}$	$0.12 * 10^{-3}$
		(18)			(18)	(18)
	20	0.065			$0.22 * 10^{-2}$	$0.21 * 10^{-2}$
0.001	T= 60	0.044			$0.22 * 10^{-2}$	$0.18 * 10^{-2}$
	100	−0.00043			$0.22 * 10^{-2}$	$0.12 * 10^{-2}$
		(14)	(5)	(5)	(14)	(14)
	20	0.018	1.00	0.025	0.020	0.018
0.01	T= 60	0.033	1.02	0.036	0.021	0.018
	100	0.039	1.01	0.017	0.020	0.014
		(8)			(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
	20	0.31			0.21	0.19
0.1	T= 60	0.21			0.20	0.19
	100	0.29			0.20	0.17
		(9)			(9)	(9)
	20	0.94			0.87	0.75
0.5	T= 60	0.82			0.83	0.71
	100	0.90			0.87	0.57
		(13)	(5)	(5)	(13)	(13)
	20	1.59	2.64	1.66	1.47	1.41
1.0	T= 60	1.68	2.74	1.79	1.65	1.49
	100	1.61	2.73	1.73	1.53	1.29
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)
	20	2.62	3.81	3.82	2.38	2.35
2.0	T= 60	2.79	3.908	3.91	2.79	2.70
	100	2.73	4.07	3.48	2.48	2.33
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)
	20	3.50	4.49	3.47	3.42	3.47
3.0	T= 60	3.85	5.17	4.12	3.79	3.52
	100	3.67	4.72	3.64	3.75	3.17
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)
	20	4.55	5.61	4.61	4.44	4.26
4.0	T= 60	5.01	5.79	5.01	4.72	4.56
	100	4.68	5.805	4.815	4.66	4.68
		(12)	(10)	(10)	(12)	(12)
	20	5.55	6.49	5.52	6.68	5.61
5.0	T= 60	6.09	6.88	5.89	5.81	5.86
	100	5.92	6.79	5.79	5.81	5.43
		(9)	(5)	(5)	(9)	(8)
	20	10.50	11.52	10.54	10.28	10.64
10.0	T= 60	11.06	11.92	10.93	10.80	10.95
	100	10.88	12.24	10.98	10.66	10.26

I.5. táblázat (p = 0.9 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_{\lambda}\{\hat{\lambda}_i \leq z\} = 0.9$

λ \ $\hat{\lambda}_i$			$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.9}$
			(3)(2)(1)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
		20	$0.59 \ast 10^{-2}$	0.98	$0.20 \ast 10^{-2}$	$0.95 \ast 10^{-4}$	$0.90 \ast 10^{-4}$	
0.000001	T=	60	$0.30 \ast 10^{-2}$	0.99	0.0016	$0.36 \ast 10^{-4}$	$0.18 \ast 10^{-4}$	$0.636 \ast 10^{-4}$
		20	$0.38 \ast 10^{-2}$	1.00	0.0024	$0.51 \ast 10^{-4}$	$0.27 \ast 10^{-4}$	
			(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
		20	0.02	0.98	0.0089	$0.47 \ast 10^{-3}$	$0.44 \ast 10^{-3}$	
0.00001	T=	60	0.01	1.002	0.011	$0.61 \ast 10^{-3}$	$0.43 \ast 10^{-3}$	$0.636 \ast 10^{-3}$
		100	0.01	1.002	0.007	$0.66 \ast 10^{-3}$	$0.43 \ast 10^{-3}$	
			(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
		20	0.06	1.008	0.03	$0.9 \ast 10^{-2}$	$0.9 \ast 10^{-2}$	
0.0001	T=	60	0.044	1.02	0.03	$0.52 \ast 10^{-2}$	$0.6 \ast 10^{-2}$	$0.636 \ast 10^{-2}$
		100	0.14	1.02	0.03	$0.86 \ast 10^{-2}$	$0.45 \ast 10^{-2}$	
			(18)			(18)	(18)	
		20	0.23			0.072	0.065	
0.001	T=	60	0.177			0.069	0.050	$0.636 \ast 10^{-1}$
		100	0.17			0.057	0.039	
			(14)	(5)	(5)	(14)	(14)	
		20	0.87	1.84	0.86	0.38	0.40	
0.01	T=	60	0.74	1.50	0.506	0.40	0.37	0.473
		100	0.67	1.55	0.55	0.42	0.37	
			(8)			(8)	(8)	
		20	2.41			1.87	2.04	
0.1	T=	60	2.19			1.94	1.62	1.908
		100	2.45			2.21	1.72	
			(9)			(9)	(9)	
		20	4.37			3.90	3.66	
0.5	T=	60	3.15			3.54	3.63	3.861
		100	3.92			3.58	3.06	
			(13)	(5)	(5)	(13)	(13)	
		20	5.82	7.37	6.39	5.11	5.34	
1.0	T=	60	6.09	7.29	6.29	5.72	5.13	5.188
		100	5.69	6.84	5.85	5.21	4.98	
			(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
		20	7.48	8.65	8.66	6.35	7.35	
2.0	T=	60	8.34	9.806	9.81	7.39	7.43	7.156
		100	7.27	8.87	8.87	6.86	6.55	
			(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
		20	9.44	10.31	9.33	8.61	9.06	
3.0	T=	60	9.24	10.38	9.39	8.78	8.87	8.81
		100	7.95	10.07	9.08	8.61	7.93	
			(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
		20	10.87	12.04	11.07	9.83	10.70	
4.0	T=	60	11.37	12.66	11.67	10.35	11.19	10.352
		100	10.46	12.09	11.10	10.10	9.85	
			(12)	(10)	(10)	(12)	(12)	
		20	12.75	13.56	12.58	11.47	12.65	
5.0	T=	60	12.90	14.32	13.34	11.98	12.78	12.755
		100	12.64	13.89	12.90	11.08	11.78	
			(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
		20	18.91	22.64	21.67	19.09	21.96	
10.0	T=	60	19.45	21.604	20.61	18.12	19.06	18.53
		100	18.04	21.45	20.44	18.45	18.16	

I.6. táblázat (p = 0.95 empirikus kvantilisei)

A táblázatban adott z, amelyre $P_\lambda\{\hat{\lambda}_i \leqslant z\} = 0.95$

λ \ $\hat{\lambda}_i$	T	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$	$\lambda_{0.95}$
		(3)	(3)	(3)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	
	20	0.013	0.98	0.0040	$0.26 * 10^{-3}$	$0.24 * 10^{-3}$	
0.000001	T= 60	$0.42 * 10^{-2}$	0.99	0.0030	$0.72 * 10^{-4}$	$0.11 * 10^{-3}$	$0.255 * 10^{-3}$
	100	0.01	1.00	0.005	$0.24 * 10^{-3}$	$0.12 * 10^{-3}$	
		(6)	(5)	(5)	(6)	(6)	
	20	0.032	0.99	0.015	$0.34 * 10^{-2}$	$0.33 * 10^{-2}$	
0.00001	T= 60	0.035	1.01	0.0204	$0.34 * 10^{-2}$	$0.26 * 10^{-2}$	$0.255 * 10^{-2}$
	100	0.037	1.01	0.014	$0.73 * 10^{-2}$	$0.37 * 10^{-2}$	
		(11)	(5)	(5)	(11)	(11)	
	20	0.11	1.05	0.092	0.035	0.032	
0.0001	T= 60	0.12	1.068	0.074	0.021	0.42	$0.255 * 10^{-1}$
	100	0.15	1.104	0.106	0.0307	0.019	
		(18)			(18)	(18)	
	20	0.53			0.28	0.23	
0.001	T= 60	0.38			0.23	0.209	0.255
	100	0.43			0.21	0.14	
		(14)	(5)	(5)	(14)	(14)	
	20	1.57	2.77	1.99	1.03	0.87	
0.01	T= 60	1.41	2.419	1.42	1.206	1.05	1.17
	100	1.32	2.22	1.24	0.92	0.75	
		(8)			(8)	(8)	
	20	3.86			3.27	3.28	
0.1	T= 60	3.42			2.83	2.88	3.268
	100	4.13			3.96	3.67	
		(9)			(9)	(9)	
	20	6.04			5.65	5.39	
0.5	T= 60	5.82			5.18	5.03	5.605
	100	5.26			5.71	4.08	
		(13)	(5)	(5)	(13)	(13)	
	20	7.95	10.26	9.86	6.76	7.43	
1.0	T= 60	6.52	9.12	8.13	7.43	6.92	7.103
	100	7.69	8.46	7.27	6.86	6.81	
		(8)	(5)	(5)	(8)	(8)	
	20	9.39	11.03	11.03	8.21	8.97	
2.0	T= 60	10.56	11.87	11.98	9.25	9.75	9.272
	100	9.57	10.51	10.51	8.64	8.34	
		(13)	(10)	(10)	(13)	(13)	
	20	12.25	13.24	12.26	9.89	12.32	
3.0	T= 60	11.61	13.30	12.31	10.97	10.95	11.082
	100	11.47	12.58	11.52	10.56	10.25	
		(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	
	20	13.32	15.05	14.08	11.88	13.19	
4.0	T= 60	13.68	15.35	14.36	12.33	13.08	12.732
	100	13.20	14.91	13.92	12.55	12.61	
		(12)	(10)	(10)	(12)	(12)	
	20	16.03	16.96	15.98	13.77	16.25	
5.0	T= 60	15.33	16.58	15.59	14.12	15.04	14.395
	100	15.16	16.450	15.57	13.99	14.36	
		(9)	(5)	(5)	(9)	(8)	
	20	27.92	28.55	27.58	22.27	29.07	
10.0	T= 60	23.50	24.90	23.91	20.63	23.22	21.47
	100	22.75	24.93	23.93	20.78	21.53	

I.7. táblázat (várható értékek átlagai)

λ \ $\hat{\lambda}_i$	T=	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{\lambda}_5$
		(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)	(3)(2)(1)
	20	$0.1 \ast 10^{-2}$	0.98	$0.1 \ast 10^{-2}$	$0.2 \ast 10^{-3}$	$0.5 \ast 10^{-3}$
0.000001	T= 60	$0.4 \ast 10^{-2}$	1.00	$0.2 \ast 10^{-2}$	$0.6 \ast 10^{-2}$	$0.7 \ast 10^{-2}$
	100	$0.1 \ast 10^{-2}$	0.99	$-0.6 \ast 10^{-3}$	$0.4 \ast 10^{-3}$	$0.3 \ast 10^{-2}$
		(6)(6)(6)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
	20	$0.9 \ast 10^{-2}$	0.98	$0.45 \ast 10^{-2}$	$0.3 \ast 10^{-2}$	$0.3 \ast 10^{-2}$
0.00001	T= 60	$0.5 \ast 10^{-2}$	0.99	$0.29 \ast 10^{-2}$	$0.5 \ast 10^{-2}$	$0.4 \ast 10^{-2}$
	100	$0.5 \ast 10^{-2}$	1.00	$0.92 \ast 10^{-2}$	$0.5 \ast 10^{-2}$	$0.3 \ast 10^{-2}$
		(11)(11)(11)	(10)(10)(9)	(10)(10)(9)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
	20	0.02	0.99	0.02	0.02	0.02
0.0001	T= 60	0.03	1.04	0.05	0.03	0.03
	100	0.03	1.02	0.03	0.03	0.02
		(18)(18)(18)			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
	20	0.08			0.08	0.09
0.001	T= 60	0.08			0.09	0.07
	100	0.09			0.09	0.07
		(14)(13)(13)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	0.20	1.27	0.29	0.22	0.21
0.01	T= 60	0.27	1.29	0.29	0.26	0.22
	100	0.22	1.18	0.18	0.21	0.75
		(8)(8)(7)			(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
	20	0.74			0.73	0.70
0.1	T= 60	0.69			0.72	0.67
	100	0.84			0.82	0.74
		(9)(9)(8)			(9)(9)(8)	(9)(9)(8)
	20	1.63			1.59	1.56
0.5	T= 60	1.59			1.59	1.48
	100	1.49			1.55	1.26
		(13)(13)(12)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(13)(13)(12)	(13)(12)(12)
	20	2.47	3.69	2.72	2.30	2.38
1.0	T= 60	2.54	3.67	2.67	2.52	2.34
	100	2.48	3.65	2.65	2.44	2.21
		(8)(8)(8)	(5)(5)(5)	(5)(5)(5)	(8)(8)(8)	(8)(8)(8)
	20	3.47	4.68	4.68	3.27	3.70
2.0	T= 60	3.83	5.10	5.10	3.75	3.65
	100	3.59	4.57	4.57	3.44	3.30
		(13)(13)(13)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
	20	4.77	5.30	4.81	4.43	5.45
3.0	T= 60	4.87	6.03	5.03	4.72	4.66
	100	4.55	5.67	4.57	4.44	4.15
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
	20	5.61	7.05	6.07	5.48	6.06
4.0	T= 60	6.02	7.16	6.17	5.84	5.85
	100	5.67	6.87	5.88	5.59	5.40
		(12)(12)(11)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(12)(12)(11)	(12)(12)(11)
	20	7.11	8.25	7.28	6.52	7.59
5.0	T= 60	7.12	8.13	7.14	6.87	6.97
	100	6.88	7.99	6.99	6.67	6.50
		(9)(9)(9)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(9)(9)(9)	(8)(8)(8)
	20	12.34	13.95	12.97	11.78	15.26
10.0	T= 60	12.25	13.14	12.15	11.82	12.07
	100	11.97	13.12	12.13	11.69	11.47

A táblázatokban a táblázat fejlécében megadott értékhez tartozó kvantilisek $\bar{x}_{ip}$ átlagértékei szerepelnek ($\bar{x}_{ip}$ azon x_{ip} értékek átlaga, melyre $P_n\{\hat{\lambda}_i < x_{ip}\} = p$, ahol $\hat{\lambda}_i$ a (2.i) (i = = 1,2,...,5) összefüggés alapján számolt becslés). A λ_p oszlopban (6. oszlop) az időben folytonos eset λ paramétere maximum likelihood becslése eloszlásának p kvantilise. Az egyes oszlopokban zárójelben szereplő egész szám adja meg, hogy hány minta alapján számoltuk az átlagokat.

Annak illusztrálására, hogy a megfigyelésszám növelésével a becslések eloszlásai lényegesen nem javulnak, tekintsük a $T = 1000$ és $\lambda = 10$ értékekhez tartozó $\hat{\lambda}_{1i}$, $\hat{\lambda}_{4i}$, $\hat{\lambda}_{5i}$ (I. 8. táblázat) valamint a $T = 800$ és $\lambda = 0.1$ értékekhez tartozó $\hat{\lambda}_{1i}$, $\hat{\lambda}_{4i}$, $\hat{\lambda}_{5i}$, becslések (i = 1,2, . . . , 100) rendezett táblázatát (I. 9. táblázat). A táblázatokban a $\tilde{\lambda}_i$ becslések empirikus eloszlásait is megadjuk (amikor mindkét paraméter ismeretlen).

I.8. táblázat ($\lambda = 10.0$, $T = 1000$)

$\hat{\lambda}_1$ empirikus eloszlása

.405E+1	.427E+1	.464E+1	.496E+1	.503E+1	.553E+1	.594E+1	.603E+1	.610E+1	.625E+1
.669E+1	.684E+1	.685E+1	.700E+1	.702E+1	.713E+1	.729E+1	.742E+1	.823E+1	.835E+1
.848E+1	.856E+1	.880E+1	.885E+1	.888E+1	.911E+1	.923E+1	.926E+1	.931E+1	.946E+1
.953E+1	.955E+1	.968E+1	.970E+1	.974E+1	.986E+1	.989E+1	.997E+1	.999E+1	.100E+2
.100E+2	.100E+2	.103E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2	.107E+2	.108E+2	.108E+2
.114E+2	.115E+2	.118E+2	.118E+2	.120E+2	.121E+2	.121E+2	.122E+2	.124E+2	.124E+2
.125E+2	.132E+2	.134E+2	.135E+2	.135E+2	.139E+2	.140E+2	.142E+2	.143E+2	.149E+2
.149E+2	.149E+2	.153E+2	.154E+2	.154E+2	.156E+2	.158E+2	.162E+2	.168E+2	.173E+2
.175E+2	.178E+2	.180E+2	.183E+2	.186E+2	.188E+2	.191E+2	.191E+2	.191E+2	.192E+2
.195E+2	.196E+2	.203E+2	.224E+2	.226E+2	.227E+2	.231E+2	.240E+2	.263E+2	.267E+2

$\hat{\lambda}_5$ empirikus eloszlása

.408E+1	.490E+1	.508E+1	.519E+1	.541E+1	.544E+1	.624E+1	.646E+1	.651E+1	.676E+1
.678E+1	.681E+1	.685E+1	.717E+1	.732E+1	.740E+1	.746E+1	.746E+1	.751E+1	.765E+1
.768E+1	.772E+1	.790E+1	.864E+1	.888E+1	.890E+1	.898E+1	.928E+1	.928E+1	.930E+1
.935E+1	.939E+1	.939E+1	.960E+1	.977E+1	.979E+1	.982E+1	.986E+1	.993E+1	.994E+1
.994E+1	.101E+2	.102E+2	.103E+2	.104E+2	.104E+2	.104E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2
.107E+2	.107E+2	.109E+2	.111E+2	.111E+2	.112E+2	.113E+2	.114E+2	.114E+2	.117E+2
.118E+2	.122E+2	.124E+2	.125E+2	.125E+2	.126E+2	.130E+2	.131E+2	.135E+2	.136E+2
.136E+2	.137E+2	.140E+2	.140E+2	.140E+2	.141E+2	.145E+2	.149E+2	.153E+2	.155E+2
.156E+2	.159E+2	.161E+2	.168E+2	.168E+2	.174E+2	.181E+2	.182E+2	.190E+2	.191E+2
.192E+2	.194E+2	.196E+2	.201E+2	.226E+2	.231E+2	.234E+2	.237E+2	.258E+2	.271E+2

$\hat{\lambda}_4$ empirikus eloszlása

.415E+1	.481E+1	.497E+1	.542E+1	.552E+1	.636E+1	.640E+1	.666E+1	.670E+1	.684E+1
.691E+1	.719E+1	.739E+1	.739E+1	.745E+1	.746E+1	.782E+1	.827E+1	.830E+1	.844E+1
.844E+1	.850E+1	.852E+1	.854E+1	.865E+1	.870E+1	.905E+1	.908E+1	.912E+1	.926E+1
.932E+1	.955E+1	.957E+1	.965E+1	.976E+1	.985E+1	.991E+1	.999E+1	.100E+2	.100E+2
.101E+2	.101E+2	.101E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.106E+2	.107E+2	.109E+2	.109E+2
.111E+2	.112E+2	.114E+2	.114E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.117E+2	.118E+2
.122E+2	.125E+2	.126E+2	.126E+2	.127E+2	.128E+2	.132E+2	.132E+2	.137E+2	.142E+2
.142E+2	.145E+2	.149E+2	.150E+2	.151E+2	.152E+2	.155E+2	.157E+2	.158E+2	.158E+2
.165E+2	.166E+2	.166E+2	.172E+2	.173E+2	.176E+2	.177E+2	.177E+2	.177E+2	.179E+2
.180E+2	.198E+2	.208E+2	.210E+2	.212E+2	.220E+2	.229E+2	.240E+2	.259E+2	.259E+2

$\tilde{\lambda}_1$ empirikus eloszlása

.511E+1	.557E+1	.573E+1	.648E+1	.668E+1	.698E+1	.710E+1	.717E+1	.742E+1	.829E+1
.834E+1	.863E+1	.889E+1	.912E+1	.935E+1	.939E+1	.957E+1	.962E+1	.966E+1	.967E+1
.978E+1	.979E+1	.990E+1	.100E+2	.101E+2	.103E+2	.109E+2	.109E+2	.110E+2	.113E+2
.113E+2	.114E+2	.115E+2	.115E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.118E+2	.119E+2
.119E+2	.120E+2	.121E+2	.122E+2	.123E+2	.124E+2	.125E+2	.125E+2	.128E+2	.130E+2
.132E+2	.134E+2	.136E+2	.137E+2	.141E+2	.142E+2	.145E+2	.146E+2	.148E+2	.149E+2
.149E+2	.150E+2	.152E+2	.153E+2	.153E+2	.163E+2	.166E+2	.167E+2	.168E+2	.169E+2
.169E+2	.170E+2	.173E+2	.174E+2	.175E+2	.179E+2	.185E+2	.185E+2	.188E+2	.197E+2
.197E+2	.200E+2	.200E+2	.207E+2	.211E+2	.212E+2	.213E+2	.219E+2	.220E+2	.221E+2
.229E+2	.239E+2	.244E+2	.245E+2	.260E+2	.264E+2	.290E+2	.319E+2	.321E+2	.380E+2

$\tilde{\lambda}_2$ empirikus eloszlása

.586E+1	.610E+1	.618E+1	.687E+1	.701E+1	.720E+1	.728E+1	.738E+1	.797E+1	.823E+1
.826E+1	.851E+1	.875E+1	.904E+1	.914E+1	.941E+1	.944E+1	.960E+1	.971E+1	.979E+1
.980E+1	.100E+2	.102E+2	.103E+2	.104E+2	.105E+2	.105E+2	.106E+2	.108E+2	.108E+2
.108E+2	.110E+2	.111E+2	.113E+2	.115E+2	.116E+2	.116E+2	.117E+2	.118E+2	.120E+2
.120E+2	.120E+2	.121E+2	.121E+2	.122E+2	.122E+2	.125E+2	.128E+2	.131E+2	.132E+2
.133E+2	.137E+2	.138E+2	.139E+2	.139E+2	.142E+2	.144E+2	.147E+2	.150E+2	.152E+2
.152E+2	.153E+2	.154E+2	.155E+2	.156E+2	.158E+2	.161E+2	.165E+2	.166E+2	.169E+2
.172E+2	.174E+2	.174E+2	.176E+2	.180E+2	.186E+2	.188E+2	.191E+2	.198E+2	.198E+2
.200E+2	.204E+2	.204E+2	.204E+2	.212E+2	.213E+2	.214E+2	.223E+2	.224E+2	.241E+2
.241E+2	.244E+2	.247E+2	.248E+2	.262E+2	.278E+2	.285E+2	.318E+2	.326E+2	.386E+2

$\tilde{\lambda}_3$ empirikus eloszlása

.241E+1	.344E+1	.460E+1	.502E+1	.530E+1	.554E+1	.580E+1	.629E+1	.671E+1	.679E+1
.756E+1	.825E+1	.839E+1	.853E+1	.863E+1	.940E+1	.119E+2	.128E+2	.135E+2	.142E+2
.155E+2	.157E+2	.169E+2	.171E+2	.176E+2	.187E+2	.206E+2	.229E+2	.232E+2	.252E+2
.256E+2	.268E+2	.268E+2	.269E+2	.271E+2	.272E+2	.285E+2	.287E+2	.287E+2	.299E+2
.308E+2	.316E+2	.330E+2	.408E+2	.457E+2	.479E+2	.499E+2	.501E+2	.517E+2	.525E+2
.553E+2	.603E+2	.609E+2	.687E+2	.698E+2	.723E+2	.731E+2	.742E+2	.746E+2	.803E+2
.805E+2	.823E+2	.101E+3	.101E+3	.103E+3	.118E+3	.139E+3	.151E+3	.159E+3	.197E+3
.201E+3	.238E+3	.239E+3	.253E+3	.254E+3	.262E+3	.325E+3	.340E+3	.428E+3	.431E+3
.501E+3	.547E+3	.549E+3	.605E+3	.877E+3	.996E+3	.109E+4	.112E+4	.137E+4	.152E+4
.161E+4	.184E+4	.194E+4	.212E+4	.237E+4	.305E+4	.406E+4	.980E+4	.264E+5	.251E+6

I.9. táblázat ($\lambda = 0.1$, $T = 800$)

$\hat{\lambda}_1$ empirikus eloszlása

-.189E+1	-.138E+1	-.119E+1	-.685E+0	-.661E+0	-.565E+0	-.503E+0	-.404E+0	-.381E+0	-.379E+0
-.373E+0	-.335E+0	-.309E+0	-.305E+0	-.272E+0	-.249E+0	-.223E+0	-.222E+0	-.257E+0	-.201E+0
-.190E+0	-.186E+0	-.182E+0	-.174E+0	-.172E+0	-.149E+0	-.126E+0	-.122E+0	-.948E-1	-.729E-1
-.546E-1	-.533E-1	-.379E-1	-.363E-1	-.130E-1	-.424E-2	.315E-1	.368E-1	.500E-1	.559E-1
.613E-1	.849E-1	.969E-1	.116E+0	.121E+0	.128E+0	.202E+0	.245E+0	.247E+0	.268E+0
.297E+0	.301E+0	.309E+0	.319E+0	.323E+0	.329E+0	.355E+0	.369E+0	.392E+0	.393E+0
.401E+0	.416E+0	.431E+0	.445E+0	.458E+0	.477E+0	.485E+0	.497E+0	.555E+0	.593E+0
.649E+0	.767E+0	.806E+0	.821E+0	.936E+0	.100E+1	.106E+1	.111E+1	.115E+1	.117E+1
.119E+1	.126E+1	.129E+1	.132E+1	.135E+1	.173E+1	.177E+1	.178E+1	.211E+1	.302E+1
.305E+1	.393E+1	.408E+1	.498E+1	.589E+1	.596E+1	.724E+1	.725E+1	.108E+2	.251E+2

$\hat{\lambda}_5$ empirikus eloszlása

.424E-3	.426E-3	.441E-3	.518E-3	.592E-3	.606E-3	.660E-3	.673E-3	.693E-3	.729E-3
.823E-3	.885E-3	.891E-3	.925E-3	.969E-3	.993E-3	.101E-2	.101E-2	.109E-2	.130E-2
.145E-2	.146E-2	.147E-2	.160E-2	.176E-2	.176E-2	.176E-2	.188E-2	.191E-2	.193E-2
.195E-2	.198E-2	.198E-2	.222E-2	.233E-2	.257E-2	.268E-2	.276E-2	.277E-2	.282E-2
.286E-2	.293E-2	.315E-2	.351E-2	.361E-2	.443E-2	.455E-2	.504E-2	.508E-2	.519E-2
.570E-2	.579E-2	.585E-2	.598E-2	.631E-2	.833E-2	.833E-2	.862E-2	.881E-2	.902E-2
.936E-2	.104E-1	.109E-1	.114E-1	.132E-1	.137E-1	.141E-1	.153E-1	.155E-1	.168E-1
.174E-1	.181E-1	.206E-1	.234E-1	.236E-1	.242E-1	.251E-1	.286E-1	.289E-1	.303E-1
.342E-1	.349E-1	.363E-1	.381E-1	.392E-1	.440E-1	.488E-1	.516E-1	.612E-1	.867E-1
.113E+0	.114E+0	.123E+0	.135E+0	.146E+0	.159E+0	.194E+0	.199E+0	.380E+0	.159E+1

$\hat{\lambda}_4$ empirikus eloszlása

.169E-1	.170E-1	.176E-1	.206E-1	.236E-1	.242E-1	.262E-1	.270E-1	.277E-1	.291E-1
.331E-1	.351E-1	.354E-1	.368E-1	.386E-1	.393E-1	.404E-1	.409E-1	.433E-1	.520E-1
.578E-1	.585E-1	.590E-1	.640E-1	.700E-1	.702E-1	.709E-1	.752E-1	.765E-1	.778E-1
.781E-1	.788E-1	.791E-1	.879E-1	.925E-1	.101E+0	.106E+0	.110E+0	.111E+0	.112E+0
.113E+0	.117E+0	.125E+0	.140E+0	.144E+0	.176E+0	.179E+0	.199E+0	.203E+0	.203E+0
.225E+0	.228E+0	.232E+0	.239E+0	.247E+0	.325E+0	.332E+0	.340E+0	.349E+0	.358E+0
.380E+0	.413E+0	.438E+0	.449E+0	.526E+0	.549E+0	.552E+0	.608E+0	.639E+0	.678E+0
.688E+0	.714E+0	.820E+0	.906E+0	.927E+0	.938E+0	.102E+1	.109E+1	.114E+1	.117E+1
.137E+1	.139E+1	.141E+1	.148E+1	.148E+1	.167E+1	.185E+1	.207E+1	.233E+1	.319E+1
.406E+1	.424E+1	.482E+1	.489E+1	.500E+1	.561E+1	.632E+1	.661E+1	.109E+2	.245E+2

$\tilde{\lambda}_1$ empirikus eloszlása

.560E+0	.941E+0	.980E+0	.112E+1	.125E+1	.129E+1	.130E+1	.139E+1	.144E+1	.146E+1
.146E+1	.152E+1	.153E+1	.157E+1	.177E+1	.189E+1	.196E+1	.196E+1	.200E+1	.202E+1
.213E+1	.221E+1	.223E+1	.230E+1	.240E+1	.241E+1	.267E+1	.273E+1	.274E+1	.274E+1
.282E+1	.296E+1	.300E+1	.300E+1	.305E+1	.311E+1	.313E+1	.318E+1	.322E+1	.322E+1
.328E+1	.329E+1	.332E+1	.333E+1	.340E+1	.341E+1	.347E+1	.360E+1	.369E+1	.378E+1
.381E+1	.385E+1	.423E+1	.431E+1	.434E+1	.439E+1	.483E+1	.484E+1	.486E+1	.487E+1
.499E+1	.520E+1	.523E+1	.542E+1	.545E+1	.550E+1	.556E+1	.557E+1	.600E+1	.602E+1
.612E+1	.614E+1	.637E+1	.696E+1	.704E+1	.735E+1	.744E+1	.795E+1	.828E+1	.838E+1
.842E+1	.893E+1	.903E+1	.919E+1	.935E+1	.980E+1	.102E+2	.107E+2	.108E+2	.116E+2
.119E+2	.120E+2	.128E+2	.131E+2	.134E+2	.137E+2	.141E+2	.168E+2	.176E+2	.259E+2

$\tilde{\lambda}_3$ empirikus eloszlása

.470E+0	.527E+0	.535E+0	.602E+0	.654E+0	.682E+0	.684E+0	.752E+0	.803E+0	.855E+0
.877E+0	.956E+0	.994E+0	.103E+1	.109E+1	.110E+1	.111E+1	.147E+1	.150E+1	.153E+1
.154E+1	.162E+1	.165E+1	.169E+1	.172E+1	.193E+1	.194E+1	.195E+1	.197E+1	.206E+1
.213E+1	.216E+1	.221E+1	.223E+1	.238E+1	.252E+1	.260E+1	.291E+1	.295E+1	.300E+1
.313E+1	.323E+1	.336E+1	.338E+1	.352E+1	.357E+1	.365E+1	.374E+1	.377E+1	.409E+1
.432E+1	.466E+1	.471E+1	.508E+1	.512E+1	.561E+1	.573E+1	.580E+1	.593E+1	.631E+1
.669E+1	.734E+1	.746E+1	.781E+1	.981E+1	.106E+2	.107E+2	.143E+2	.149E+2	.157E+2
.174E+2	.175E+2	.193E+2	.197E+2	.202E+2	.219E+2	.220E+2	.224E+2	.233E+2	.238E+2
.246E+2	.264E+2	.319E+2	.425E+2	.480E+2	.557E+2	.619E+2	.720E+2	.922E+2	.118E+3
.123E+3	.138E+3	.161E+3	.328E+3	.405E+3	.541E+3	.696E+3	.951E+3	.222E+4	.523E+4

A táblázatok értékelése alapján látható, hogy a statisztikai gyakorlatban leginkább használt $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_3$ becslések nem megfelelőek és nem használhatók konfidencia intervallumok szerkesztésére. A $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_3$ becslések $\lambda \sim 0$ esetén igen nagy százalékban negatív értéket szolgáltatnak, míg $\hat{\lambda}_2$ értékei nem kerülhetnek közel 0-hoz. A becslések megbízhatatlanságára vonatkozó megjegyzés, ha a folyamat közel szinguláris, szerepel Box-Jenkins [1] könyvében (lásd 65. o.). A különböző korrelációs függvény becslésekkel Parzen [1] foglalkozott több cikkében. A szimulálási eredmények alapján látható, hogy egyenletesen jó becslések nem nyerhetők a legegyszerűbb esetben sem, így a különböző javaslatok nem vezetnek jó becslésekhez.

A $\hat{\lambda}_4$ és $\hat{\lambda}_5$ becslések jó egyezése első pillanatban meglepő csak, mivel a $\hat{\lambda}_4$ becslésből adódó $\hat{\rho}_4$ becslést az időben diszkrét idősorok elméletében nem szokás használni. A $\hat{\rho}_4$ becslés használata, amennyiben a megfelelő eloszlás kiszámítása is megtörténik, jóval elterjedtebbé kell, hogy váljon. A $\hat{\lambda}_5$ (maximum likelihood) becslés eloszlásának jó egyezése az elméletileg számított értékkel az imitálási eljárás megbízhatóságát, valamint az invariancia elv jó használhatóságát mutatja 60 – 100 megfigyelési pont esetén is. (A $T = 20$ megfigyelési pont esetén adódó ingadozások jóval nagyobbaknak mutatkoztak, mint $T = 60$, ill. $T = 100$ esetén).

Az időben folytonos eset $\hat{\lambda}_4$ becslésének jóságával és torzításával foglalkozik A.A. Novikov [1] dolgozatában.

3. §. KÉT ISMERETLEN PARAMÉTER ESETE

Ha a Gauss-Markov folyamat mindkét paramétere (m, λ) ismeretlen, a következő becsléseket használtuk:

(3.1) $$\tilde{m}_1 = \frac{1}{T+1}\sum_0^T \xi_i, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2\left[\frac{1}{T+1}\sum_0^T \xi_i^2 - \left(\frac{1}{T+1}\sum_0^T \xi_i\right)^2\right]}$$

(3.2) $\tilde{m}_2$, $\tilde{\lambda}_2$ az (1.5′) képletek alapján a diszkrét esetre vonatkozó maximum likelihood becslésekből adódnak ($\tilde{\lambda}_2 = -T \log \tilde{\rho}_2$).

(3.3) $$\tilde{m}_3 = \frac{\xi(0) + \xi(T)}{2}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \frac{2}{(\xi(T) - \xi(0))^2}.$$

A

$$\tilde{\rho}_4 = \frac{\sum_1^T (\xi_i - \tilde{m}_1)(\xi_{i-1} - \tilde{m}_1)}{\sum_1^T (\xi_i - \tilde{m}_1)^2}$$

$$\tilde{\rho}_5 = \frac{\sum_{1}^{T} (\xi_i - \tilde{m}_1)(\xi_{i-1} - \tilde{m}_1)}{\sum_{0}^{T} (\xi_i - \tilde{m}_1)^2} \cdot \frac{T+1}{T}$$

becslések vizsgálatát is elvégeztük. Mivel lényegesen új elemet nem tartalmaztak a megfelelő egy ismeretlen paramétert tartalmazó esettel szemben, az eredmények közlésétől eltekintünk.

A programban – mivel ez elegendő – mindig az $m = 0$ paraméter becslését végeztük. A II. táblázatban megadjuk az $\tilde{m}_{ik}$ $(i = 1,2,3;\ k = 1, 2, \ldots, 100)$ becslések $\tilde{M}_i = \frac{1}{100} \sum_{1}^{100} \tilde{m}_{ik}$ empirikus várható értékeinek és $\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{99} \sum_{1}^{100} (\tilde{m}_{ik} - M_i)^2}$ empirikus szórásának átlagait $(M_i = \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} \tilde{M}_i, \sigma_i = \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} \tilde{\sigma}_i$, ahol K a lefuttatott 100-as minták száma adott $(\lambda,\ T)$ értékek mellett). A több százas minta választásában s nem egy – mondjuk 1000-es – nagy minta vizsgálatában számítástechnikai megoldások játszottak közre.

Amint az eredményekből látható, az $\tilde{m}_i$ becslések $(i = 1,2,3)$ nem mutatnak lényeges eltérést a $0 < \lambda \leqslant 10$ intervallumban. Az $\tilde{m}_i$ becslések közel normális eloszlásúak $(0, 1/2\lambda)$ paraméterekkel (de nem $1/2\hat{\lambda}$ paraméterrel!).

II. táblázat

λ			M_1	σ_1	M_2	σ_2	M_3	σ_3
			(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)	(1)(1)
		20	–91.23	743.88	–91.22	743.68	–91.23	743.88
0.000001	T=	60	–44.38	730.66	–44.39	730.67	–44.39	730.66
		100	–	–	–	–	–	–
			(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)	(1)(1)(1)
		20	–12.40	239.33	–12.39	239.33	–12.36	239.33
0.00001	T=	60	12.46	194.78	12.48	194.76	12.49	194.76
		100	7.79	202.22	7.79	202.22	7.76	202.22
			(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
		20	–7.70	73.29	–7.70	73.28	–7.69	73.27
0.0001	T=	60	3.72	70.83	3.73	70.83	3.72	70.84
		100	3.11	68.93	3.10	68.33	3.09	69.93
			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
		20	0.38	22.20	0.39	22.19	0.39	22.19
0.001	T=	60	–0.51	22.55	–0.51	22.55	–0.51	22.55
		100	–0.07	22.06	–0.07	22.06	–0.08	22.06
			(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(130(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	0.31	7.46	0.31	7.45	0.32	7.44
0.01	T=	60	0.07	8.72	0.07	7.17	0.07	7.16
		100	–0.14	7.11	–0.34	7.09	–0.33	7.08
			(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)	(8)(8)(7)
		20	0.07	2.12	0.07	2.11	0.08	2.10
0.1	T=	60	0.003	2.16	0.005	2.15	0.014	2.15
		100	0.03	2.26	0.03	2.25	0.013	2.24
			(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	1.11	1.55	0.73	1.54	2.76	4.27
0.5	T=	60	1.09	1.67	0.71	1.65	2.78	3.84
		100	1.11	1.56	0.73	1.54	2.52	3.23
			(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
		20	2.85	2.86	2.85	2.86	5.30	8.27
1.0	T=	60	3.12	3.13	3.12	3.13	5.61	7.99
		100	2.98	3.11	2.98	3.11	5.13	8.41
			(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)	(5)(5)(3)
		20	0.0014	0.38	–0.002	0.36	0.009	0.35
2.0	T=	60	0.02	0.33	0.02	0.32	0.02	0.37
		100	–0.004	0.40	–0.01	0.38	–0.03	0.39
			(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)	(3)(3)(3)
		20	0.009	0.29	0.013	0.27	0.003	0.30
3.0	T=	60	0.01	0.26	0.010	0.24	0.017	0.29
		100	0.006	0.30	0.005	0.29	–0.001	0.32
			(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)	(2)(2)(1)
		20	–0.013	0.17	–0.013	0.16	–0.003	0.21
5.0	T=	60	0.010	0.15	0.013	0.16	0.014	0.23
		100	–0.001	0.20	0.003	0.19	–0.001	0.23
			(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)	(4)(4)(4)
		20	–0.003	0.09	–0.003	0.09	–0.007	0.16
10.0	T=	60	0.0003	0.09	–0.0003	0.09	0.003	0.16
		100	0.0003	0.10	0.0003	0.10	–0.006	0.17

A táblázatban az egyes $(\lambda,\ T)$ értékekhez tartozó M_i, σ_i értékek felett zárójelben megadjuk a 100-as minták (realizációk) számát is, amelyekből átlagolással adódik M_i, σ_i.

A III. táblázatokban fix λ és T értékek mellett a $\widetilde{\lambda}_{ik}$ $(i = 1,2,3;\ \ k = 1,2, \dots 100)$ becslésekből adódó $\widetilde{F}_{i,100}$ empirikus eloszlásfüggvények p kvantilisei átlagait adjuk meg.

$$\widetilde{F}_{i,100}(x) = \frac{k}{100}, \quad \text{ha} \quad \widetilde{\lambda}_{i,k} \leqslant x < \lambda_{i,k+1} \quad (i = 1,2,3;\ k = 1,2, \dots ,100)$$

és λ_p definiciója: $\widetilde{F}_{i,100}(\lambda_p) = p$.

III.1.táblázat (p = 0.01)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda}_i \leqslant z\} = 0.01.$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$			$\tilde{\lambda}_1$		$\tilde{\lambda}_2$		$\tilde{\lambda}_3$	
		20	0.48	(3)	0.24	(3)	0.20	(3)
0.000001	T=	60	0.76	(2)	0.33	(2)	0.28	(2)
		100	–		–		–	
		20	0.54	(6)	0.27	(6)	0.22	(6)
0.00001	T=	60	0.73	(6)	0.36	(6)	0.31	(6)
		100	0.63	(7)	0.32	(7)	0.30	(7)
		20	0.56	(12)	0.32	(12)	0.26	(12)
0.0001	T=	60	0.63	(11)	0.29	(11)	0.28	(11)
		100	0.60	(11)	0.30	(11)	0.30	(11)
		20	0.55	(18)	0.30	(18)	0.23	(18)
0.001	T=	60	0.63	(18)	0.33	(18)	0.26	(18)
		100	0.61	(18)	0.31	(18)	0.30	(18)
		20	0.58	(14)	0.30	(14)	0.25	(14)
0.01	T=	60	0.64	(13)	0.32	(13)	0.28	(13)
		100	0.62	(13)	0.33	(13)	0.30	(13)
		20	0.62	(8)	0.37	(7)	0.29	(8)
0.1	T=	60	0.66	(8)	0.33	(7)	0.28	(8)
		100	0.62	(7)	0.31	(7)	0.28	(7)
		20	0.53	(15)	0.37	(15)	0.32	(15)
0.5	T=	60	0.79	(14)	0.45	(14)	0.39	(14)
		100	0.69	(13)	0.45	(13)	0.39	(13)
		20	0.79	(13)	0.52	(13)	0.39	(13)
1.0	T=	60	0.92	(13)	0.56	(13)	0.44	(13)
		100	0.97	(12)	0.55	(12)	0.45	(12)
		20	1.03	(10)	0.86	(10)	0.61	(10)
2.0	T=	60	1.18	(9)	0.99	(9)	0.71	(9)
		100	1.07	(8)	0.84	(8)	0.65	(8)
		20	1.38	(13)	1.08	(13)	0.85	(13)
3.0	T=	60	1.55	(13)	1.25	(13)	0.88	(13)
		100	1.48	(13)	1.35	(13)	0.96	(13)
		20	189	(10)	1.35	(10)	0.97	(10)
4.0	T=	60	1.81	(10)	1.49	(10)	1.19	(10)
		100	1.93	(10)	1.69	(10)	1.22	(10)
		20	2.28	(12)	1.54	(11)	1.27	(12)
5.0	T=	60	2.36	(12)	2.19	(11)	1.82	(12)
		100	2.05	(11)	1.86	(11)	1.38	(11)
		20	4.41	(13)	3.59	(12)	2.91	(13)
10.0	T=	60	5.31	(13)	4.52	(12)	3.14	(13)
		100	4.40	(11)	4.61	(10)	2.93	(11)

III.2. táblázat (p = 0.05)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda}_i \leq z\} = 0.05$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
	20	0.91	0.54	0.44
0.000001	T= 60	0.99	0.69	0.60
	100	–	–	–
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
	20	0.89	0.63	0.48
0.00001	T= 60	1.15	0.71	0.59
	100	1.13	0.55	0.49
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
	20	1.01	0.65	0.58
0.0001	T= 60	1.01	0.66	0.59
	100	0.88	0.59	0.50
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
	20	0.96	0.62	0.48
0.001	T= 60	1.05	0.72	0.57
	100	1.07	0.63	0.54
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	0.98	0.64	0.50
0.01	T= 60	1.12	0.68	0.52
	100	1.05	0.61	0.51
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
	20	0.98	0.65	0.48
0.1	T= 60	1.00	0.68	0.57
	100	1.01	0.58	0.46
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	1.09	0.85	0.63
0.5	T= 60	1.28	0.89	0.68
	100	1.19	0.77	0.64
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
	20	1.27	1.02	0.71
1.0	T= 60	1.42	1.08	0.77
	100	1.33	1.01	0.79
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
	20	1.72	1.49	1.12
2.0	T= 60	1.91	1.61	1.18
	100	1.78	1.38	1.23
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
	20	2.17	2.06	1.61
3.0	T= 60	2.37	2.04	1.68
	100	2.15	2.00	1.51
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
	20	2.74	2.30	1.90
4.0	T= 60	2.91	2.54	2.08
	100	2.65	2.44	2.16
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
	20	3.43	2.83	2.46
5.0	T= 60	3.62	3.31	2.65
	100	2.97	2.89	2.26
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
	20	6.11	5.30	5.43
10.0	T= 60	6.77	6.56	5.40
	100	5.95	6.38	4.92

III.3. táblázat (p = 0.1)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda}_i \leqslant z\} = 0.1$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(3)	(3)(3)
	20	1.19	0.89	0.64
0.000001	T= 60	1.55	1.07	0.86
	100	–	–	–
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
	20	1.15	0.92	0.71
0.00001	T= 60	1.44	0.97	0.81
	100	1.42	0.87	0.69
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
	20	1.29	0.95	0.71
0.0001	T= 60	1.40	0.99	0.78
	100	1.39	0.94	0.71
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
	20	1.22	0.94	0.67
0.001	T= 60	1.45	1.19	0.81
	100	1.39	0.88	0.75
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	1.25	0.94	0.69
0.01	T= 60	1.51	1.04	0.75
	100	1.47	0.96	0.75
		(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
	20	1.25	0.91	0.61
0.1	T= 60	1.45	0.98	0.81
	100	1.38	0.99	0.85
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	1.44	1.12	0.87
0.5	T= 60	1.64	1.30	0.98
	100	1.56	1.08	0.89
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
	20	.163	1.39	1.01
1.0	T= 60	1.85	1.47	1.15
	100	1.74	1.40	1.11
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
	20	2.17	2.02	1.51
2.0	T= 60	2.36	2.14	1.69
	100	2.13	1.86	1.58
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
	20	2.70	2.36	2.27
3.0	T= 60	2.93	2.67	2.25
	100	2.83	2.55	2.20
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
	20	2.88	2.32	2.15
4.0	T= 60	3.53	3.22	2.94
	100	3.37	2.96	2.90
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
	20	4.09	3.62	3.41
5.0	T= 60	4.22	4.02	3.80
	100	3.80	3.61	3.37
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
	20	7.12	6.58	7.28
10.0	T= 60	7.78	7.69	7.67
	100	7.22	7.40	5.71

III.4. táblázat (p = 0.5)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda} \leqslant z\} = 0.5$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$			$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
			(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
		20	3.54	3.65	3.56
0.000001	T=	60	4.33	3.99	3.59
		100	–	–	–
			(6)(6)(6)	(6)(6)(6)	(6)(6)(6)
		20	3.55	3.46	3.44
0.00001	T=	60	4.27	3.87	4.82
		100	3.99	3.39	4.61
			(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
		20	3.58	3.56	3.87
0.0001	T=	60	4.25	3.51	4.18
		100	4.20	3.84	4.44
			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
		20	3.59	3.53	3.66
0.001	T=	60	4.26	3.91	5.27
		100	4.00	3.46	4.21
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	3.61	3.57	3.77
0.01	T=	60	4.19	3.66	5.29
		100	3.89	3.39	4.20
			(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
		20	3.71	3.46	3.18
0.1	T=	60	4.17	4.03	5.15
		100	4.22	3.68	4.87
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	3.89	3.71	5.28
0.5	T=	60	4.41	4.44	5.95
		100	4.17	4.12	5.08
			(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
		20	4.28	4.94	6.26
1.0	T=	60	4.84	4.87	7.83
		100	4.65	4.40	7.46
			(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
		20	4.79	5.74	8.44
2.0	T=	60	5.62	5.73	11.15
		100	5.44	5.36	9.51
			(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	5.98	6.79	13.62
3.0	T=	60	6.58	6.69	13.99
		100	6.34	6.49	10.20
			(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
		20	6.96	7.21	16.00
4.0	T=	60	7.38	7.26	23.04
		100	7.03	7.00	16.99
			(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
		20	8.02	8.53	20.25
5.0	T=	60	8.29	8.61	22.71
		100	8.22	8.23	22.20
			(13)(13)(13)	(12)(12)(12)	(13)(13)(13)
		20	12.36	13.41	46.97
10.0	T=	60	12.79	13.68	42.05
		100	12.98	13.18	33.29

III.5. táblázat (p = 0.9)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda}_i \leq z\} = 0.9$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$			$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
			(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
		20	8.87	9.86	67.08
0.000001	T=	60	10.29	10.14	147.8
		100	–	–	–
			(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
		20	9.203	10.85	94.25
0.00001	T=	60	10.34	10.46	131.72
		100	10.04	9.77	116.30
			(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
		20	9.36	11.07	123.50
0.0001	T=	60	10.47	10.76	158.07
		100	10.49	10.24	127.95
			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
		20	9.71	10.91	109.4
0.001	T=	60	10.59	10.86	144.7
		100	10.09	9.46	130.7
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	9.10	10.87	173.2
0.01	T=	60	10.74	11.58	151.3
		100	10.25	9.92	111.7
			(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
		20	8.27	9.36	96.18
0.1	T=	60	10.76	11.21	157.01
		100	10.28	10.41	179.70
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	9.12	12.47	144.2
0.5	T=	60	10.39	10.94	298.5
		100	9.61	10.37	159.3
			(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
		20	10.13	14.06	170.5
1.0	T=	60	10.97	12.70	217.4
		100	11.35	11.34	326.3
			(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
		20	10.82	12.50	296.38
2.0	T=	60	11.52	13.02	298.07
		100	11.87	12.24	425.50
			(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	12.54	16.04	362.9
3.0	T=	60	13.02	14.32	405.7
		100	13.36	14.18	409.1
			(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
		20	13.35	16.54	399.58
4.0	T=	60	14.61	15.44	522.75
		100	14.38	14.91	775.97
			(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
		20	15.95	21.02	605.3
5.0	T=	60	16.09	16.97	674.7
		100	16.43	17.36	602.4
			(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
		20	22.12	29.87	1010.9
10.0	T=	60	21.48	22.56	4887.7
		100	22.42	23.61	1330.5

III.6. táblázat ($p = 0.95$)

A táblázatban szereplő z értékre: $P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda}_i \leqslant z\} = 0.95$

λ \ $\tilde{\lambda}_i$		$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
		(3)(2)	(3)(2)	(3)(2)
	20	10.51	13.75	184.00
0.000001	T= 60	12.64	13.13	1166.6
	100	–	–	–
		(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
	20	12.34	15.62	199.85
0.00001	T= 60	12.21	11.95	650.80
	100	12.58	12.68	397.70
		(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
	20	12.05	14.77	408.1
0.0001	T= 60	12.89	13.30	518.1
	100	12.98	13.25	423.3
		(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
	20	12.18	14.74	528.4
0.001	T= 60	12.07	13.21	690.4
	100	12.36	12.82	377.5
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	11.05	15.14	522.2
0.01	T= 60	13.41	13.85	464.9
	100	12.74	12.63	529.1
		(8)(8)(7)	(7)	(8)(8)(7)
	20	10.80	12.21	321.38
0.1	T= 60	12.92	13.89	802.03
	100	14.62	14.95	709.50
		(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
	20	11.49	15.56	638.9
0.5	T= 60	12.01	13.53	527.6
	100	12.16	12.34	596,1
		(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
	20	12.81	18.67	452.3
1.0	T= 60	13.45	16.35	637.5
	100	13.47	14.33	1167.8
		(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
	20	12.77	18.32	131.3
2.0	T= 60	14.03	15.94	1946.5
	100	13.87	14.78	2039.3
		(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
	20	15.57	22.67	1583.0
3.0	T= 60	15.63	17.66	1149.8
	100	15.29	16.80	2104.8
		(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
	20	17.10	23.55	1856.9
4.0	T= 60	17.12	17.36	3808.1
	100	17.05	17.86	3481.4
		(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
	20	19.11	27.11	2125.9
5.0	T= 60	19.15	20.08	3318.1
	100	19.14	19.94	3530.5
		(13)(13)(11)	(12)(12)(10)	(13)(13)(11)
	20	26.14	39.85	4037.6
10.0	T= 60	22.84	26.52	5078.3
	100	23.18	26.74	3949.9

III.7. táblázat (az eloszlások várható értékei)

λ \ $\tilde{\lambda}_i$			$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_3$
			(3)(2)	(3)(3)	(3)(3)
		20	4.53	4.96	95.60
0.000001	T=	60	5.64	5.58	260.69
		100	–	–	–
			(6)(6)(7)	(6)(6)(7)	(6)(6)(7)
		20	4.78	5.28	203.54
0.00001	T=	60	5.24	5.07	385.40
		100	5.09	4.75	814.60
			(11)(11)(11)	(11)(11)(11)	(11)(11)(11)
		20	5.45	5.61	275742.6
0.0001	T=	60	5.35	5.21	836.2
		100	5.18	4.86	3277.8
			(18)(18)(18)	(18)(18)(18)	(18)(18)(18)
		20	4.71	5.18	1906.5
0.001	T=	60	4.83	5.22	30034.1
		100	5.05	4.70	1239.7
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	4.79	5.50	10576.2
0.01	T=	60	5.50	5.41	1452.7
		100	5.03	4.72	3198.7
			(8)(8)(7)	(7)(7)(7)	(8)(8)(7)
		20	4.51	4.71	5537.2
0.1	T=	60	5.44	5.25	4503.1
		100	5.41	5.12	5105.6
			(14)(13)(13)	(14)(13)(13)	(14)(13)(13)
		20	4.90	7.13	996.5
0.5	T=	60	5.34	5.66	20954.5
		100	5.24	4.99	833138.0
			(13)(13)(12)	(13)(13)(12)	(13)(13)(12)
		20	5.31	6.93	3835.6
1.0	T=	60	5.72	6.31	3280.1
		100	5.72	5.63	10771.6
			(10)(9)(8)	(10)(9)(8)	(10)(9)(8)
		20	5.87	7.90	1353129.3
2.0	T=	60	6.46	6.97	3147.9
		100	6.51	6.54	5729.2
			(13)(13)(13)	(13)(13)(13)	(13)(13)(13)
		20	7.14	11.05	1651.0
3.0	T=	60	7.45	7.94	945.6
		100	7.60	7.59	5588.2
			(10)(10)(10)	(10)(10)(10)	(10)(10)(10)
		20	8.12	11.05	8753.1
4.0	T=	60	8.51	8.56	16887.6
		100	4.11	4.14	2735056.6
			(12)(12)(11)	(11)(11)(11)	(12)(12)(11)
		20	9.37	14.38	34963.8
5.0	T=	60	9.46	9.78	10670.4
		100	9.46	9.56	149051.5
			(13)(13)(11)	(12)(12)(11)	(13)(13)(11)
		20	13.97	20.52	13006.2
10.0	T=	60	13.77	14.81	198922.2
		100	14.05	14.74	13966.6

Az ismert $m = 0$ esettel szemben, amikor is a maximum likelihood és az integrál közelítéséből adódó becslések ($\hat{\lambda}_5$ és $\hat{\lambda}_4$) jó közelítéssel megegyeztek, ismeretlen m esetén a $\tilde{\lambda}_1$ és $\tilde{\lambda}_2$ becslések $\lambda < 1$ esetén jól megkülönböztethetők. $\tilde{\lambda}_i$ p-kvantilisét $x_p(\tilde{\lambda}_i)$-vel jelölve igaz, hogy $p < 1/2$ esetén $x_p(\tilde{\lambda}_1) > x_p(\tilde{\lambda}_2)$, míg $p > 1/2$ esetén $x_p(\tilde{\lambda}_1) < x_p(\tilde{\lambda}_2)$. A $\tilde{\lambda}_3$ becslés alsó kvantilisei jó egyezést mutatnak a $\tilde{\lambda}_2$ alsó kvantiliseivel, míg a $p > 1/2$ esetben $x_p(\tilde{\lambda}_3) \gg x_p(\tilde{\lambda}_2)$. Mivel $x_p(\tilde{\lambda}_3)$ $\lambda \sim 0$ esetén az 1 szabadságfokú χ^2 eloszlás kvantiliseivel jól közelíthető, ahonnan a következő kis táblázatot kapjuk:

p	0.001	0.01	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.98
$x_p(\tilde{\lambda}_1)$	0.19	0.30	0.52	0.74	4.38	125.0	500.0	2000.0

A III. táblázatok eredményeivel való összehasonlításból látható, hogy a szimuláció eredményei ismét jó egyezést mutatnak az elméletileg kiszámolt értékekkel.

A III. táblázatok eredményeiből látható, hogy a $\tilde{\lambda}_i$ becslések $\lambda < 1$ esetén nemcsak, hogy nem torzítatlanok, hanem becslésre és konfidencia intervallum szerkesztésre sem használhatók.

A megfigyelésszám (T) növelésének kérdését a tapasztalatok alapján döntöttük el. Az I. 8 és I. 9 táblázatokból látható, hogy $T = 100$ megfigyelés elegendő a $\lambda \leqslant 10$ paramétertartományban.

A táblázatok alapján – amikor az lehetséges – konfidencia határokat is adhatunk mind az m, mind a λ paraméterekre. Adott $p(< 1/2)$ értékre és a $\tilde{\lambda}_i$ becslésre megkeressük azt a $(\underline{\lambda}, p)$ értékpárt, melyre $x_{p,\underline{\lambda}} = \tilde{\lambda}_i$ s ekkor $\underline{\lambda}$ lesz az alsó konfidencia határ p-szinten. A III. táblázatok eredményei alapján látható annak az elméletileg igen érdekes tételnek az igazsága (lásd pl. Arató [1]), hogy a λ paraméterre nem szerkeszthető 0-tól különböző alsó konfidencia határ.

A táblázatok eredményeiből látható, hogy a $\tilde{\lambda}_2$ maximum likelihood becslések alsó kvantilisei kisebbek a $\tilde{\lambda}_1$ alsó kvantiliseinél, s ebben az értelemben kevésbé torzított becslései λ-nak. (Az $m = 0$ esetben ilyen különbség nem volt tapasztalható).

4. §. A PROGRAM ISMERTETÉSE.

Az alábbiakban megadjuk a szimulálási eljárás FORTRAN nyelven írott programját. A program fordításakor beolvasható λ és a kezdő véletlen szám értéke.

```
      PROGRAM BECSLOE
C     BECSULT PARAMETEREK EMPIRIKUS ELOSZLASA
      REAL MU2T,MUA,MURA
      REAL MU1,MU2,MU3,LA,LAB1,LAB2,LAB3,MURO1,
     1LAMU3,LAB1A,LAB2A,LAB3A,LAB1S,LAB2S,LAB3S
      REAL MUR1S,MUR2S,MUR3S,LAMU1A,LAMU2A,
      DIMENSION LAB1(100),LAB2(100),LAB3(100),
     2MURO1(100),LAMU1(100),LAMU2(100),LAMU3(100)
C     LAB1 AFELTETELES MAXLIKELIHOODBECSLES,LAB2
C     PERZINTEGRAL, CSAK LA ISMERETLEN
C     MURO1 LA BECSLES NOVIKOV MODSZERREL
C     MURO2 LA BECSLES IDOBEN FOLYTONOS MAX.LIK
      INTEGER T
      READ 400,N0
  400 FORMAT(I5)
      DO 1 I=1,N0
      CALL RND3(ALF)
    1 CONTINUE
      READ 500,LA
  500 FORMAT(F10.8)
      CON=SQRT(4.8)
      T=100
      RO=EXP(-LA/T)
      RO2=RO*RO
      CO=SQRT((1.-RO2)/(2*LA))
      PRINT 5,T,N0,LA,RO,RO2
    5 FORMAT(1H0,3H T=,I6,3HN0=,I5,4H LA=,E14.8)
      LAB1A=0
      LAB2A=0
      LAB3A=0
      LAB1S=0
      LAB2S=0
      LAB3S=0
      MUR1A=0
      MUR2A=0
      MUR3A=0
      MUR1S=0
      MUR2S=0
      MUR3S=0
      LAMU1A=0
      LAMU2A=0
      LAMU3A=0
      LAMU1S=0
      LAMU2S=0
      LAMU3S=0
      DO 80 J=1,100
      CALL NORMVC(EPS)
      EPS=(EPS-7.5)*CON
      EPS=EPS+(EPS**3-3*EPS)*0.005
      X0=EPS/SQRT(2*LA)
      MU1=X0
      MU2=0
      MU3=0
      X1=X0
```

```
      DO 10 I=1,T
      CALL NCRMVC(EPS)
      EPS=(EPS-7.5)*CON
      EPS=EPS+(EPS**3-3*EPS)*0.005
      X2=X1*RO+EPS*CO
      MU1=MU1+X2
      MU2=MU2+X2*X2
      MU3=MU3+X2*X1
      X1=X2
10    CONTINUE
      MU2T=MU2-X2*X2
      MUA=MU1/(T+1)
      LAB1(J)=-T*ALOG(MU3/MU2)
      CALL RC2SZA(RO,MU2T,MU3,CO,R3K)
      LAB2(J)=-T*ALOG(R3K)
      LAB3(J)=0.5*T/MU2
      MU2=MU2+X0*X0
      AL=MU3/MU2
      AI2=2*MU2/(T+1)
      AI1=0.5*(1-X0*X0-X2*X2)
      MURO1(J)=0.5*(T+1)*(1+X0*X0-X2*X2)/MU2
      MURO2(J)=(AI1+SQRT(AI1*AI1+AI2))/AI2
      LAB1A=LAB1A+LAB1(J)
      LAB2A=LAB2A+LAB2(J)
      LAB3A=LAB3A+LAB3(J)
      LAB1S=LAB1S+LAB1(J)**2
      LAB2S=LAB2S+LAB2(J)**2
      LAB3S=LAB3S+LAB3(J)**2
      MUR1A=MURO1(J)+MUR1A
      MUR2A=MURO2(J)+MUR2A
      MUR3A=MURO3(J)+MUR3A
      MUR1S=MUR1S+MURO1(J)**2
      MUR2S=MUR2S+MURO2(J)**2
      MUR3S=MUR3S+MURO3(J)**2
      CALL RENDEZ(MURO1,J)
      CALL RENDEZ(MURO2,J)
      CALL RENDEZ(LAB1,J)
      CALL RENDEZ(LAB2,J)
      CALL RENDEZ(LAB3,J)
 80   CONTINUE
      LAB1A=LAB1A/100
      LAB2A=LAB2A/100
      LAB3A=LAB3A/100
      MUR1A=MUR1A/100
      MUR2A=MUR2A/100
      LAB1S=SQRT(LAB1S/99-(100/99)*LAB1A**2)
      LAB2S=SQRT(LAB2S/99-(100/99)*LAB2A**2)
      LAB3S=SQRT(LAB3S/99-(100/99)*LAB3A**2)
      MUR1S=SQRT(MUR1S/99-(100/99)*MUR1A**2)
      MUR2S=SQRT(MUR2S/99-(100/99)*MUR2A**2)
      PRINT UTASITASOK

      END
```

I r o d a l o m

[1] M. Arató: [1] (1962) Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса ДОКЛ.А.Н. 145 №1. 13-16.

[2] Arató M: [2] (1964) Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I., MTA III. Oszt. Közleményei 14, 13-34.

[3] M. Arató – A. Benczúr: [1] (1970) Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского марковского процесса. Studia Sci. Math. Hung, No 3-4, 445-456.

[4] Benczúr A.: [1] (1971) Stacionárius Gauss-Markov folyamat csillapodási paraméterének konfidencia határai, MTA. Számitástechnikai Központja Közlemények No. 6, 3-14.

[5] G. Box – G. Jenkins: [1] (1970) Time series analisys forecasting and control Holden-Day, San-Francisco.

[6] U. Grenander: [1] (1950) Stochastic processes and statistical inference, Arkiv för Math. 1, No. 3, 195-277. (magyarul MTA. III. Oszt. Közleményei 1965, No. 1-3.)

[7] A.A. Novikov: (1971) Об оценках параметров диффузных процессов. (Sajtó alatt a Studia Sci. Math. Hung.-ban).

[8] E. Parzen: [1] (1967) Time series analysis for models of signal plus white noise, Spectral analysis of time series (Edited by B. Harris), John Wiley 233-257 o.

[9] A.M. Walker: [1] (1960) Some consequences of superimposed error in time series analysis, Biometrika 47, 33-43.

Summary

Simulation resalts for the distribution of the parameter estimates of the elementary Gaussian process

The behaviour of the various estimates of the parameters $m = M\xi(t)$ and λ $(M[(\xi(t) - m) \cdot \cdot (\xi(t + \tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|})$ of the stationary Gauss-Markov process is examined in the paper by the Monte Carlo method.

On the basis of the tables, given in the paper of Arató – Benczúr [1] (see furthermore Benczúr [1]), it is possible (in the case $m = 0$) to compare, in the continuous time parameter case, the maximum likelihood estimate with the estimates (2.1) – (2.5) of § 2. The tables I.1 – I.6 give the quantiles $p = 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ of the empirical distributions in the case of $T = 20, 60, 100$ observations on time interval $[0,1]$. It is remarkable, that the quantiles of the distribution of extimates

(2.4) $$\hat{\lambda}_4 = \frac{T + 1}{2 \sum_0^T \xi_i^2} ,$$

not used in the statistical literature, agree very well with the quantiles of theoretical distribution of maximum likelihood estimate.

The quantiles of the distributions of the estimates (3.1) – (3.3) are given in the tables of § 3. Table II. gives the average and dispersion of estimates of parameter m. The various estimates of m behave identically and their dispersion is near to the theoretically given value $\frac{1}{2\lambda}$ but not to the value $\frac{1}{2\tilde{\lambda}}$.

It is impossible to construct lower confidence limits from estimates of parameter λ, because for given p there exists, independently from λ and estimate $\tilde{\lambda}$, such an x_p that

$$\sup_{\lambda>0} P_{\lambda,m}\{\tilde{\lambda} > x_p\} \geqslant p .$$

Numerically the x_p values were obatained theoretically only in case of the 3.3 estimates. The tables III. give the behaviour of the p $(p = 0{,}01, 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95)$ quantiles in the function of λ.

The empirical distribution functions were determined for samples with 100 observations. For a given pair λ, T 10-20 such empirical distribution functions were counted. The description of the program is given in § 4. In case of given parameter value and starting random number the program runs within 1-2 minutes (on a CDC 3300 computer).

Р е з ю м е

Результаты симуляции распределения оценок параметров простого процесса Гаусса

В статье рассматривается поведение разных оценок неизвестных параметров $m = M\xi(t)$ и λ (где $M[(\xi(t) - m)(\xi(t+\tau) - m)] = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$) стационарного гауссовского марковского процесса, с помощью метода Монте-Карло. На основе таблицы, данной в статье Arató – Benczúr [1] (или Benczúr [1]), возможно сравнивать результаты Монте-Карло при оценках (2.1) – (2.5) с результатами наибольшего правдоподобия непрерывного времени (при этом предполагается $m = 0$). Таблицы I.1 – I.6 дают эмпирические квантили при p = 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 0,9 0,95, если число наблюдений T равно 20, 60, 100. Надо подчеркнуть хорошее совпадение квантилей оценки

(2.4) $$\hat{\lambda}_4 = \frac{T+1}{2\sum\limits_0^T \xi_i^2}$$

которую не используют в статистике, с квантилями теоретического распределения. В таблицах параграфа 3 даются эмпирические квантили оценок (3.1) – (3.3). В таблице II. даются средние значения и дисперсии разных оценок параметра m. Разные оценки ведут себя одинаково и дисперсия оценок хорошо совпадает с теоретическими значениями $\frac{1}{2\lambda}$ (но не $\frac{1}{2\tilde{\lambda}}$).Для параметра λ по оценкам нельзя построить нижние доверительные границы, так как для любой оценки $\tilde{\lambda}$ при данном p существует независящее от λ значение x_p, что

$$\sup_{\lambda>0} P_{\lambda,m} \{\tilde{\lambda} > x_p\} \geq p .$$

Теоретическое определение значений x_p только для оценок (3.3) удалось. Таблицы III. дают эмпирические квантили оценок (3.1) – (3.3) для параметра λ при p = 0,01, 0,05, 0,1, 0,5, 0,9, 0,95. Эмпирические распределения определились для выборов с размером 100. При данных λ, T готовились 10-20 эмпирических распределений. Программа на языке FORTRAN дается в параграфе 4. При данном λ программа занимает 1-2 минуты машинного времени на машине CDC 3300.