

Dr. KOLLÁR LAJOS  
a műszaki tudományok doktora

## HIDAK ÉS MAGASHÁZAK BELEBEGÉSI PROBLÉMÁI

### 1. Bevezetés

A repülőgép-szárnyakkal kapcsolatban már régóta ismerik a belebegés (flutter) jelenségét [1], [10]. A mérnöképítésben azonban csak a Tacoma-híd 1940-ben bekövetkezett összeomlása óta foglalkoznak vele részletesebben. Mivel a műszaki fejlődés egyre karcsúbb szerkezetek megépítését teszi lehetővé, a belebegés jelenségének fontossága évről évre növekszik.

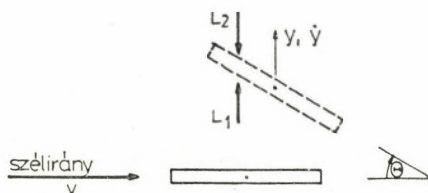
A következőkben össze kívánjuk foglalni a belebegés jelenségéről és a vele kapcsolatos számításokról szóló fontosabb tudnivalókat, elsősorban a közérthető tárgyalásmódra törekedve, majd ebből a tervezés számára néhány következtetést vonunk le.

### 2. A belebegés jelensége

A belebegés olyan rezgés, amely állandó sebességű szél hatására jön létre („öngerjesztett” rezgés). Mibenlétét a legegyszerűbben egy kétszabadságfokú, merev síklapon világhatjuk meg.

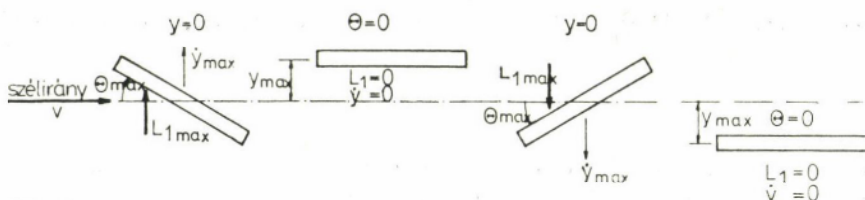
Legyen a síklap a szélirányra merőleges  $y$  eltolódással, valamint a  $\theta$  elfordulással szemben rugókkal megtámasztva (1. ábra). Ha a szélirányra merőlegesen  $\dot{y}$  sebességgel kimozdítjuk, s ezzel együtt  $\theta$  szöggel el is fordítjuk, akkor egyrészt egy  $L_1$  „felhajtóerő” fog rá hatni, amely — közelítően — a  $\theta$  elfordulási szöggel arányos és a torlónyomástól, azaz a szélesebbég négyzetétől függ. Másrészt az eltolódó mozgás  $\dot{y}$  sebessége miatt a szél relatív beesési szöge  $-\dot{y}/v$  szöggel megváltozik, azaz egy látszólagos,  $-\dot{y}/v$  nagyságú ellenkező irányú elferdülés lép fel, amely az előbb elmondottak értelmében egy ellenkező értelmű  $L_2$  erőt ébreszt. Ez az  $L_2$  erő ugyan szintén  $v^2$ -tel lenne arányos, de az őt megszabó elfordulási szög  $-\dot{y}/v$  lévén, a szorzatukban  $v$  már csak az első hatványon szerepel.

Fellép ezenkívül egy, az  $L$  erők külpontosságából származó nyomaték, valamint az eltolódást és az elcsavarodást akadályozó két rugóerő.



1. ábra

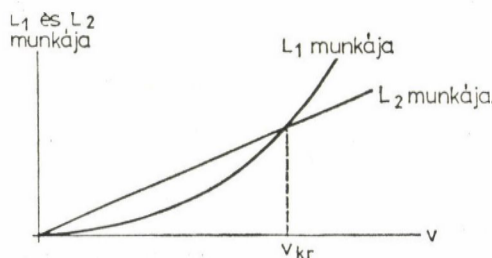
Ha már most kiszámítjuk a rezgés egy periódusa alatt végzett munkákat [21], akkor e nyomaték és a rugóerők munkája zérusra adódik. Az  $L_2$  erő mindig akadályozza a mozgást, munkája tehát mindenképpen negatív lesz, és  $v$ -vel arányos. Az  $L_1$  erő  $v^2$ -tel arányos munkája azonban pozitív lesz (elősegíti a rezgést) abban az esetben, ha a csavarási rezgés  $\varepsilon$  fázisszöggel megelőzi a hajlítási rezgést. Erre azért van lehetőség, mert az  $L_1$  erő nagysága a  $\theta$  elcsa-



2. ábra

varodási szöggel együtt változik, az út viszont, amelyen a munkát végzi, a (hajlítási rezgésből származó)  $y$  eltolódással egyenlő, a kettő pedig nincs szükségszerűen fázisban. A legnagyobb pozitív munkát  $\varepsilon = \pi/2$ -nél kapjuk [21]. A 2. ábrán felrajzoltuk az  $L_1$  erőt a rezgés négy jellegzetes helyzetében  $\varepsilon = \pi/2$  fáziseltolódásnál. Láthatjuk, hogy  $L_1$  mindig pozitív munkát végez, tehát mindenütt elősegíti a rezgést.

Felrakva már most grafikonba egy adott pozitív  $\varepsilon$  fázisszög esetén az  $L_1$  felhajtóerő  $v^2$ -tel arányos munkájának és az  $L_2$  „fékezőerő”  $v$ -vel arányos munkájának abszolút értékét (3. ábra), láthatjuk, hogy egy bizonyos  $v_{kr}$



3. ábra

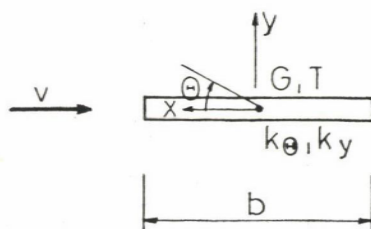
kritikus szélességen felül  $L_1$ -nek a rezgést elősegítő (pozitív) munkája nagyobb lesz  $L_2$ -nek a rezgést fékező (negatív) munkájánál, ekkor tehát a szerkezet egyre nagyobb rezgéseket végez, amíg össze nem törik.

A csillapítás szerepe e belebegési rezgésben igen kicsi: alig növeli meg  $v_{kr}$  nagyságát.

### 3. A síklap belebegésének számítása az elemi (kvázi-stacionárius) elmélet szerint

A belebegés matematikai tárgyalását nagyon leegyszerűsíti, ha az áramlás-tani erőket az álló síklapon mért erőkkkel vesszük egyenlőnek, de az elfordulási szögbe a korábban mondottak értelmében bele vesszük a mozgás folytán jelent-

kező  $-y/v$  látszólagos elfordulási szöget is [7]. Először tehát ezen feltevés alapján végezzük el a számítást, amely a jelenség valamennyi lényeges részét megmutatja. A számszerű eredményekhez a 4. pontban bonyolultabb feltevéseket fogunk alapul venni.



4. ábra

A csillapítást elhanyagoljuk.

A síklapot  $G$  tömegsúlypontjában támasztjuk meg  $y$  irányú eltolódás ellen  $k_y$ ,  $\Theta$  elfordulás ellen  $k_\Theta$  rugóállandójú rugókkal (4. ábra). Így a megtámasztórendszer „rugalmas középpontja” (ami megfelel a statikában használt  $T$  nyírasközéppontnak) egybeesik a tömegsúlyponttal.

A síklapnak (a papír síkjára merőleges) szélességét egységnyire vesszük; tömegét  $m$ -mel,  $G$ -re vett poláris tömeg-inercianyomatékát  $m_{pG}$ -vel jelöljük.

A súlypont elmozdulására és a súlypont körüli elfordulásra az alábbi két mozgásegyenletet írhatjuk fel:

$$m\ddot{y} = -k_y \cdot y + L, \quad (1a)$$

$$m_{pG}\ddot{\Theta} = -k_\Theta \cdot \Theta + M, \quad (1b)$$

ahol  $L$  a felhajtóerők eredője („lift”),  $M$  pedig ugyanennek a súlypontra vett nyomatéka. Az elemi elmélet szerint [7] az állásszög kis értékeinél mind a kettő lineárisan arányos az állásszöggel:

$$L = \beta_L \frac{\rho v^2}{2} b \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} \right), \quad (2a)$$

$$M = \beta_M \frac{\rho v^2}{2} b^2 \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} \right). \quad (2b)$$

A továbbiakban mindig el fogjuk hanyagolni azt a körülményt, hogy az  $L$  erő — az  $\dot{y}/v$  látszólagos állásszög-megváltozás miatt — nem pontosan merőleges a szélirányra.

Síklap esetében [11] a  $\beta_L$  arányossági tényező értéke

$$\beta_L = 2\pi, \quad (3a)$$

az  $L$  erők eredője pedig a szél felőli negyedpontban hat, így

$$\beta_M = \frac{\pi}{2}, \quad (3b)$$

és végül

$$\varrho = 0,125 [\text{kp m}^{-4} \text{sec}^2] \quad (4)$$

a levegő sűrűsége.

Behelyettesítve (2a, b)-t (1a, b)-be és még a rövidség kedvéért bevezetve a

$$\gamma_L = \beta_L \frac{\varrho b}{2} \quad (5a)$$

és a

$$\gamma_M = \beta_M \frac{\varrho b^2}{2} \quad (5b)$$

jelöléseket, az alábbi homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$m\ddot{y} + k_y y + \gamma_L v \dot{y} - \gamma_L v^2 \Theta = 0, \quad (6a)$$

$$m_{pG} \ddot{\Theta} + k_\Theta \Theta + \gamma_M v \dot{\Theta} - \gamma_M v^2 \Theta = 0. \quad (6b)$$

Felvéve az ismeretlen függvényekre a szokásos

$$y = y_0 e^{st} \quad (7a)$$

$$\Theta = \Theta_0 e^{st} \quad (7b)$$

kifejezéseket,  $e^{st}$ -vel egyszerűsítve az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk az  $y_0$  és  $\Theta_0$  amplitúdókra:

$$(ms^2 + \gamma_L vs + k_y) y_0 - (\gamma_L v^2) \Theta_0 = 0, \quad (8a)$$

$$(\gamma_M vs) y_0 + (m_{pG} s^2 + k_\Theta - \gamma_M v^2) \Theta_0 = 0. \quad (8b)$$

A triviálistól különböző megoldás létezésének feltétele, hogy az egyenletrendszer determinánsa zérussal legyen egyenlő. Ez az alábbi negyedfokú egyenletet szolgáltatja s-re:

$$A_4 s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0, \quad (9)$$

ahol az együtthatók ( $m \cdot m_{pG}$ -vel való végigosztás után):

$$A_4 = 1, \quad (10a)$$

$$A_3 = \frac{\gamma_L}{m} v, \quad (10b)$$

$$A_2 = \omega_{\Theta G}^2 + \omega_y^2 - \frac{\gamma_M}{m_{pG}} v^2, \quad (10c)$$

$$A_1 = \omega_{\Theta G}^2 \frac{\gamma_L}{m} v, \quad (10d)$$

$$A_0 = \omega_{\Theta G}^2 \omega_y^2 - \omega_y^2 \frac{\gamma_M}{m_{pG}} v^2. \quad (10e)$$

Itt még bevezettük az

$$\omega_{\Theta}^2 = \frac{k_{\Theta}}{m_{pG}} \quad (11a)$$

és

$$\omega_y^2 = \frac{k_y}{m} \quad (11b)$$

jelöléseket, vagyis a síklap csavarási és eltolódási saját-körfrekvenciáinak négyzetét.

Bennünket most elsősorban nem a belebegési frekvenciát megszabó  $s$  mennyiség érdekel, hanem az, hogy stabilis-e a rezgés vagy instabil, azaz: az egyszer megindított rezgés lecsillapodik-e, vagy egyre növekszenek-e az amplitúdói. Erre vonatkozóan a Routh – Hurwitz-kritériumokat használhatjuk fel [7], [9], [27], amelyek szerint esetünkben a rezgés akkor és csakis akkor stabilis, ha valamennyi  $A_i$  együttható pozitív, és ezenkívül az ún. Routh-féle diszkrimináns

$$A^* = A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_4 - A_3^2 A_0 \quad (12)$$

is pozitív.

Ha e mennyiségek közül csak az egyik is zérus, a rezgés állandó amplitúdójú lesz, ha pedig csak az egyik is negatív, a rezgés instabillá válik. Minket ez az utóbbi eset érdekel. Vizsgáljuk tehát sorban az együtthatókat, majd pedig a (12) kifejezést.

$A_4$  nem lehet negatív.

$A_3$  és  $A_1$  csak abban az esetben lehetne negatív, ha  $\gamma_L$  negatív lenne, ami áramlástanilag instabil szelvény (pl. a szélirányra merőlegesen álló síklap) esetében következik be. Ez a „táncolás” (galloping) jelensége, amivel most nem kívánunk foglalkozni, l. [15]-ben.

$A_0$  akkor lehet negatív, ha

$$v^2 > \frac{\omega_{\Theta}^2 m_{pG}}{\gamma_M}, \quad (13)$$

vagyis, megszorozva mindkét oldalt egy tetszőleges  $\Theta$  szöggel és  $\gamma_M$ -mel, valamint figyelembe véve (5b)-t és (11b)-t:

$$v^2 \beta_M \frac{\rho b^2}{2} \Theta > k_{\Theta} \Theta,$$

azaz:

$$M_{szél} > M_{rug,ell}, \quad (14)$$

tehát ha a szélnek egy tetszőleges elcsavarodásnál fellépő (statikus) csavarónyomatéka nagyobb a rugó által kifejtett ellenálló nyomatéknál. Ez tehát egy statikus jellegű instabilitást jelent, amit a szerkezet csavarási merevségének kellő nagyságúra való felvételével mindenképpen el kell kerülnünk. A (13) képlet megszabta  $v$ -t az áramlástanban „divergencia-sebességnek” hívják.

Az  $A_2$  együttható akkor negatív, ha

$$v^2 > m_{pG} \frac{\omega_{\Theta}^2 + \omega_y^2}{\gamma_M}. \quad (15)$$

Ez már a belebegés egyik kritikus sebessége. A másikat a (12) kifejezés szolgáltatja, ha

$$A^* < 0. \quad (16)$$

Behelyettesítve ide az együtthatók (10a–e) kifejezéseit, egyszerűsítések és összevonások után az alábbi egyszerű összefüggés adódik:

$$v^4(\omega_\theta^2 - \omega_y^2) > 0. \quad (17)$$

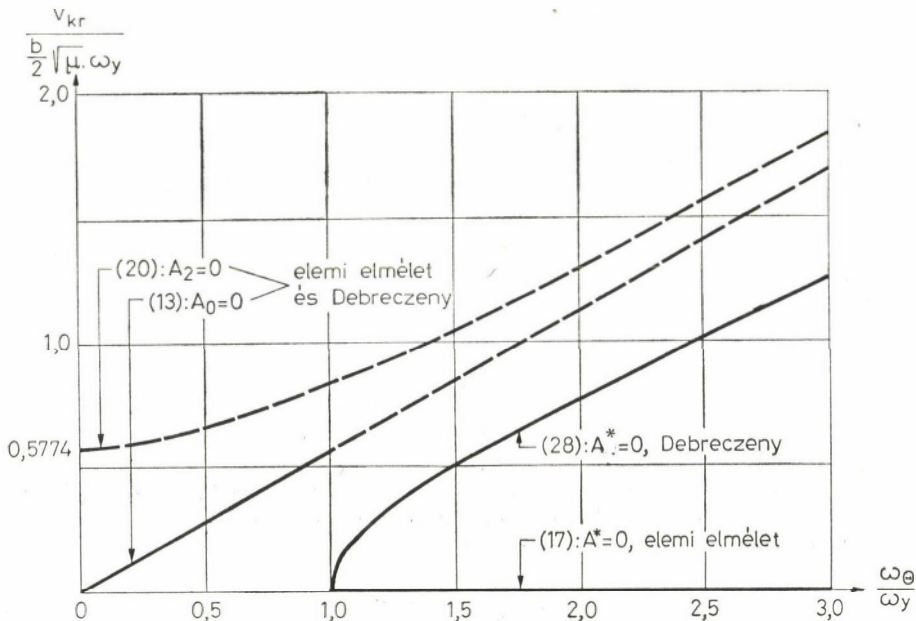
Eszerint tehát — feltéve, hogy a szélesebbég nagyobb  $O$ -nál — a szélesebbég nagyságától függetlenül instabil a rezgés, ha a szerkezet csavarási sajátfrekvenciája nagyobb a hajlításinál. Amint a 4. pontban látni fogjuk, ez az eredmény az elemi elmélet fogyatékoságai miatt adódott. Azt azonban a bemutatott egyszerű levezetés is megmutatta, hogy két belebegési kritikus sebesség létezik, amelyeket az  $A_2$  együttható és az  $A^*$  kifejezés negatívvá válása szolgáltat. A kettő közül nyilván a kisebbik a mértékadó. E két belebegési kritikus sebességet a divergencia-sebességgel együtt vastag vonallal tüntettük fel az 5. ábrán  $\omega_\theta/\omega_y$  függvényében. Az ábrázoláshoz bevezettük az

$$\frac{m}{\pi \rho b^2} = \frac{m}{m_{\text{levegőhenger}}} = \mu \quad (18a)$$

4

rövidített jelölést, azaz a síklemez és az öt körülvevő „együttlrezgő” levegőhenger tömegének viszonyát. Ennek és (5b)-nek segítségével, valamint figyelembe véve, hogy síklap esetében

$$m_{pG} = m \frac{b^2}{12}, \quad (18b)$$



5. ábra

a (13) kifejezést a

$$\frac{v_{kr}}{\frac{b}{2} \sqrt{\mu} \omega_y} = 0,5774 \frac{\omega_\omega}{\omega_y} \quad (19)$$

alakba, a (15) kifejezést pedig a

$$\frac{v_{kr}}{\frac{b}{2} \sqrt{\mu} \omega_y} = 0,5774 \sqrt{\frac{\omega_\omega^2}{\omega_y^2} + 1} \quad (20)$$

alakba írhatjuk át. A későbbiekkel való összehasonlítás céljából az 5. ábrán ezeket a mennyiségeket ábrázoltuk.

Láthatjuk, hogy már az elemi elmélet megmutatja a belebegési jelenség valamennyi fontos részét: a két kritikus belebegési sebesség [(17) és (20)] közül mindig a (17) a kisebb, de ez csak az  $\omega_\omega > \omega_y$  tartományban van értelmezve. Az  $\omega_\omega < \omega_y$  tartományban pedig a (19) divergencia-sebesség és a (20) belebegési sebesség közül a kisebbik a mértékadó. Az eddig vizsgált esetben, amikor a nyírasközéppont egybeesett a tömegsúlyponttal, a divergencia-sebesség mindig kisebb a (20) belebegési sebességnél. Később azonban látni fogjuk, hogy a tömegsúlypontból kieső nyírasközéppont esetében — legalábbis az egyik irányú szélre — a (20) belebegési sebesség is lehet kisebb (19)-nél.

#### 4. A belebegési elmélet javítása az áramlástani erők pontosabb figyelembevételével

##### 4.1. A szögsebességtől függő tag figyelembevétele (Debreczeny eljárása)

A síklap mozgása következtében megváltoznak a nyugalmi helyzetben fellépő áramlástani erők, tehát L és M kifejezését az  $\dot{y}$ , ill.  $\dot{\Theta}$  (szög-)sebességtől, valamint az  $\ddot{y}$ , ill.  $\ddot{\Theta}$  (szög-)gyorsulástól függő tagokkal kell kiegészíteni. Ezek közül a legnagyobb szerepe a szögsebességtől függő tagnak van [4], amelyet a következőképpen szemléltethetünk:

Eddig (2a, b)-ben csak a síklapnak a súlypont  $\dot{y}$  sebességéből származó, „átlagos”,  $-\dot{y}/v$  nagyságú látszólagos állásszögváltozását vettük figyelembe. A síklap egyes pontjai azonban a  $\dot{\Theta}$  szögsebességéből a lap szélessége mentén lineárisan változó,  $\dot{\Theta}x$  nagyságú  $y$  irányú sebességre is szert tesznek (4. ábra), amelyből minden pontban  $-\dot{\Theta}x/v$  látszólagos állásszögváltozás származik. Ha durva közelítésként feltételezzük, hogy ebből minden pontban egy  $\beta_p$  arányossági tényezővel kifejezhető

$$p dx = \beta_p \frac{\rho v^2}{2} \left( -\frac{\dot{\Theta} x}{v} \right) dx \quad (21)$$

nagyságú erő ébred, akkor ezek a súlypontra az alábbi nyomatékot fejtik ki:

$$M_{\text{kiegészítő}} = \int_{-b/2}^{+b/2} p x dx = -\frac{\beta_p}{6} \frac{\rho v^2}{2} b^2 \cdot \frac{b}{2} \frac{\dot{\Theta}}{v} \quad (22)$$

Ez dimenziók szempontjából helyes eredmény. A valóságban azonban  $\beta_p$  nem állandó a síklap szélessége mentén. Ezt  $\beta_p$  megfelelő megválasztásával korrigálhatjuk: (22) a helyes kiegészítő nyomatékot szolgáltatja abban az esetben, ha

$$\beta_p = 6\beta_M, \quad (23)$$

vö. [4]-gyel.

Így, figyelembe véve (5b)-t is:

$$M_{\text{kiegészítő}} = -\beta_M \frac{\rho v^2}{2} b^2 \frac{b}{2} \frac{\Theta}{v} = -\gamma_M \frac{b}{2} v \Theta. \quad (24)$$

Áramlástanai oldalról eme kiegészítő nyomaték felléptét úgy szokták indokolni, hogy a síklap állásszögének megváltozásakor örvény válik le a lap szélárnyékban levő végéről, s eme örvény „ellentettje” forgatónyomatékként hat a lapra [28].

(24)-et betéve az (1b) egyenletbe és hasonlóképpen eljárva, mint a 3. pontban, a (9) karakterisztikus egyenlet együtthatói a következő alakot öltik:

$$A_4 = 1, \quad (25a)$$

$$A_3 = \left( \frac{\gamma_L}{m} + \frac{\gamma_M b}{2m_{pG}} \right) v, \quad (25b)$$

$$A_2 = \omega_\Theta^2 + \omega_y^2 - \frac{\gamma_M}{m_{pG}} \left( 1 - \frac{\gamma_L b}{2m} \right) v^2, \quad (25c)$$

$$A_1 = \left( \omega_\Theta^2 \frac{\gamma_L}{m} + \omega_y^2 \frac{\gamma_M b}{2m_{pG}} \right) v, \quad (25d)$$

$$A_0 = \omega_\Theta^2 \omega_y^2 - \omega_y^2 \frac{\gamma_M}{m_{pG}} v^2. \quad (25e)$$

Mivel a (25c)-ben szereplő zárójel második tagja (5a), (3a) és (18a) figyelembevételével a

$$\frac{\gamma_L b}{2m} = \frac{\beta_L}{\pi} \frac{\pi \rho b^2}{4m} = \frac{2}{\mu} \quad (26)$$

alakba írható, láthatjuk, hogy ez a kifejezés — a tömegarány a nevezőben szerepelvén — elhanyagolható az egység mellett.

Ezek után az  $A_0 = 0$ , ill. az  $A_2 = 0$  feltétel most is a (19) divergencia-, ill. a (20) kritikus sebességet szolgáltatja, a (16) feltételből pedig (12) felhasználásával és elvégezve a lehetséges összevonásokat, az alábbi összefüggést kapjuk:

$$v^2 > \frac{\omega_\Theta^2 - \omega_y^2}{\frac{2\gamma_L}{bm} + \frac{\gamma_M}{m_p}}. \quad (27)$$

Ez a kritikus sebesség — (17)-hez hasonlóan — tehát csak akkor valós, ha  $\omega_\Theta^2 > \omega_y^2$ . Átalakítjuk (27)-et (5a, b), (18a) és (18b) felhasználásával, és így (20)-



hoz hasonlóan a következő kifejezéshez jutunk:

$$\frac{v_{kr}}{\frac{b}{2} \sqrt{\mu} \omega_y} = 0,4472 \sqrt{\frac{\omega_\theta^2}{\omega_y^2} - 1}. \quad (28)$$

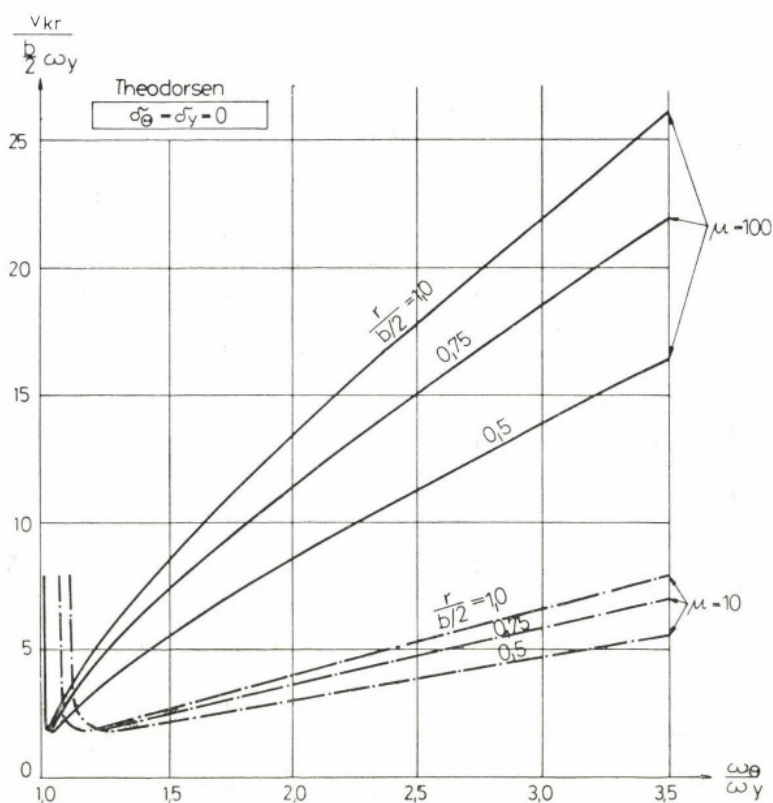
Ezt az 5. ábrán vékony vonallal ábrázoltuk.

A (27) kifejezésnek megfelelő kritikus sebességet hídszerkezetekre tudomásunk szerint először Debreczeny vezette le [4]. (A korábbi dolgozatokban, pl. [22]-ben, ez mint „empirikus képlet” szerepelt.)

A  $\dot{\theta}$ -tól függő tag figyelembevétele tehát csak annyiban változtatott az elemi (kvázi-stacionárius) elmélet leírta helyzetén, hogy az  $\omega_\theta > \omega_y$  tartományban 0-nál nagyobbra adódik a belebegési kritikus szélesség.

#### 4.2. Theodorsen pontos elmélete

Az áramlástani erőket a legpontosabban Theodorsen vette figyelembe [2], [7], [14]. Ezzel azonban rendkívül bonyolulttá válik a számítás, s a feladat sem lesz többé lineáris. Síklapra Klöppel és Thiele [14] numerikusan oldották meg Theodorsen egyenleteit, mégpedig a csillapítást is figyelembe véve. A kritikus



6. ábra

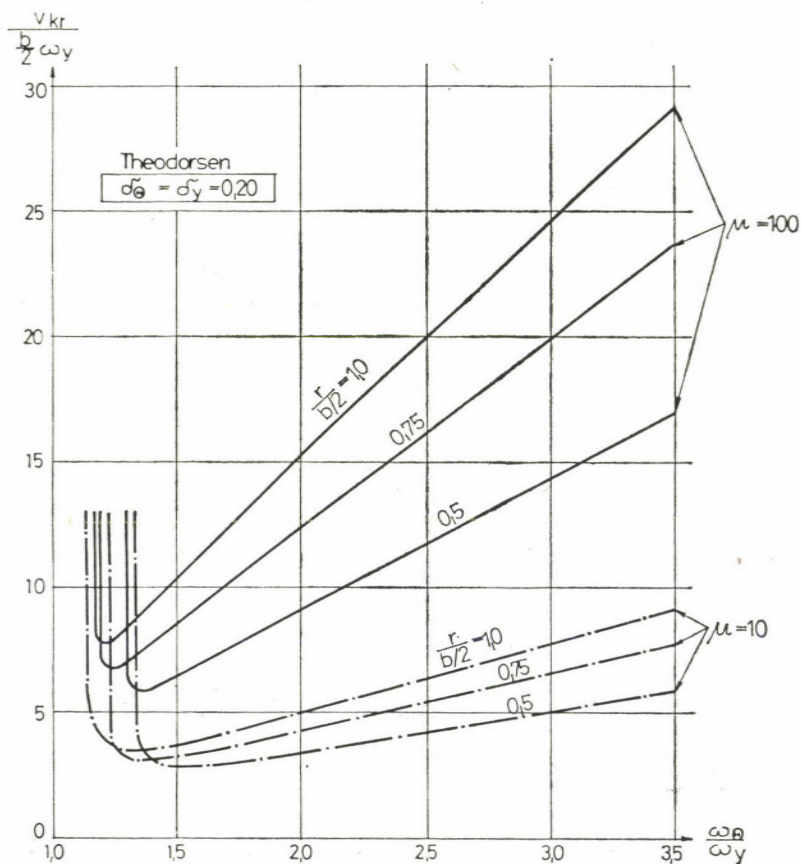
sebességet ugyancsak az  $\omega_{\Theta}/\omega_y$  sajátfrekvencia-arány függvényében ábrázolták, de már nem egy görbét kaptak, mint mi az 5. ábrán, hanem görbesereget, mivel egyrészt a kritikus sebesség csak közelítően arányos a  $\mu$  tömeg-arány négyzetgyökével, másrészt pedig a síklap  $m_{pG}$  poláris tömeg-inercianyomatékát — a hídkeresztmetszetekhez való jobb felhasználás céljából — nem  $mb^2/12$ -nek vették, hanem önálló paraméternek, és az

$$r = \sqrt{\frac{m_{pG}}{m}} \quad (29a)$$

„tehetetlenségi sugárral”, ill. ennek a fél szélességhez ( $b/2$ -hez) viszonyított arányával jellemezték. Az  $m_{pG} = mb^2/12$ -nek megfelelő „tehetetlenségi arány”:

$$\frac{r}{b/2} = 0,577. \quad (29b)$$

A 6. és 7. ábrán Klöppel és Thiele görbéi közül feltüntettük a  $\mu = 100$  és a  $\mu = 10$  tömeg-arányhoz tartozó,  $\frac{r}{b/2} = 0,5, 0,75$  és  $1,0$ -nak megfelelő 3–3 görbét.

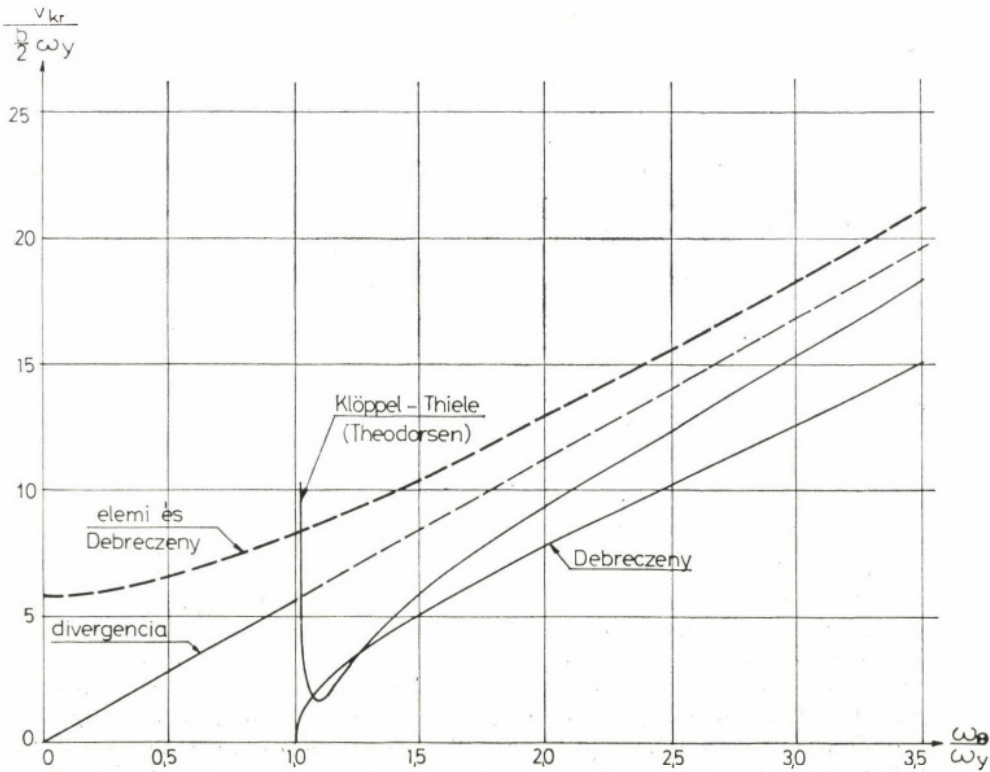


7. ábra

A 6. ábra görbéi a csillapítás nélküli esetre vonatkoznak, a 7. ábrái pedig a  $\delta_\theta = \delta_y = 0,20$  logaritmikus dekrementumú csillapításnak felelnek meg. (Meggjegyezzük, hogy Klöppel és Thiele eredeti cikkükben  $b$ -vel a fél szélességet jelölték, ezért szerepel náluk a  $b/2$ -ünk helyett  $b$ .) A 4.1. pontban kapott eredmények értelmében mind a 6., mind a 7. ábra két görbecsoportja között jó közelítéssel  $\sqrt{\mu}$  szerint interpolálhatunk, sőt extrapolálhatunk is.

Amint a 6. és 7. ábrákból is látszik, Klöppel és Thiele csak az  $\omega_\theta/\omega_y > 1$  tartományra számították ki a kritikus sebességet. Ennek olyan oka is van, hogy — egyes különleges elrendezéseket (pl. a 13. ábrán vázolt középső kábel-síkú hárfahidakat) kivéve — gyakorlatilag alig lehet olyan hagyományos hídkeresztmetszetet tervezni, amelynél a fenti egyenlőtlenség megfordulna. (A magyarázat lényegében abból áll, hogy a főtartók többnyire a keresztmetszet két szélé közelében helyezkednek el, s így  $I_\omega$ -juk aránylag nagy lesz.) A fő ok azonban az, hogy az  $\omega_\theta < \omega_y$  tartományban a divergencia-sebesség mindig kisebb a belebegési kritikus sebességnél (legalábbis az egyszerűen szimmetrikus hídkeresztmetszetek esetében), s ezért ebben a tartományban nem kell a belebegéstől tartani. Ha azonban a nyírasközéppont a szél irányában kiesik a tömegsúlypontból, akkor megváltozhat a helyzet, l. a 7.1. pontban.

A csillapítás hatása elsősorban az  $\omega_\theta \approx \omega_y$  tájékon számottevő, ahol  $v_{kr}$  amúgy is a legkisebb.



8. ábra

### 4.3. Összehasonlítások

Az eddig ismertetett három elmélet összehasonlítása céljából a 8. ábrába felrajzoltuk a  $\mu = 100$ -hoz és  $\frac{r}{b/2} = 0,577$ -hez tartozó, csillapítás nélküli esetre vonatkozó (interpolálással nyert) Klöppel–Thiele-féle görbét, valamint az ugyanezre az esetre az elemi (kvázi-stacionárius) és a Debreczeny-féle eljárással kapott görbéket.

Az ábrából jól látszik, hogy az  $\omega_\theta/\omega_y > 1$  tartományban — az  $\omega_\theta/\omega_y = 1$  pont közvetlen környezetét kivéve — a Debreczeny-féle eljárás elég jól megközelíti a Klöppel–Thiele-féle pontos  $v_{kr}$  görbét. Debreczeny eljárásának nagy előnye, hogy analitikusan kezelhető, s így értékes kvalitatív következtetéseket vonhatunk le belőle (pl. azt, hogy  $v_{kr}$  négyzetgyökösen függ  $\mu$ -tól).

Az  $\omega_\theta/\omega_y < 1$  tartományban az elemi és a Debreczeny-féle elmélet — a (26) képlettel megadott mennyiség elhanyagolásától eltekintve — azonos eredményt ad. Ennek lényege: ezen a szakaszon a divergencia-sebesség mindig kisebb a belebegési sebességnél, így elegendő az előbbire méretezni. (Később látni fogjuk, hogy a tömegsúlypontból kieső nyírásközéppont esetében ez nem minden esetben igaz.)

### 4.4. Egyéb elméletek

Az eddig ismertetett három, különböző pontosságú elmélet arra is alkalmas, hogy a többi elméletet besorolva közéjük, pontosságukról tájékozódást szerezzünk. Így pl. Ziller [28] az áramlástanai erőket Debreczenynél pontosabban, de a Theodorsen-elméletnél pontatlanabban veszi figyelembe, így pontossága is a kettő között lesz. Steinmannak a belebegés elkerülésére felállított kritériumait [23], [24] nehéz kapcsolatba hozni a többi elmélettel, mert másképp vannak felépítve, de Ziller idézett dolgozatából kitűnik, hogy Steinmann elméletét Ziller néhány tagjának elhanyagolásával és némi közelítésekkel lehet megkapni. Így Steinmann kritériumait közelítőeknek, de használhatóaknak nevezhetjük. Kétségtelen azonban, hogy Steinmann nem általános formában írja fel ezeket a kritériumokat, hanem erősen a hidakhoz, sőt a függőhidakhoz kötődve.

### 5. Az elmélet javítása a statikai modell pontosításával

Az eddigiek során a következő — statikai jellegű — közelítésekkel éltünk:

- a szerkezetnek egységnyi szakaszát vizsgáltuk merev testként,
- elhanyagoltuk a csillapítás hatását (Klöppel–Thiele görbéit kivéve),
- a keresztmetszetet igen keskeny derékszögű négyzögnek vettük.

Ha tehát az eddig bemutatott eredményeket általánosan használhatóvá akarjuk tenni, fel kell oldanunk ezeket a megszorításokat.

— A szerkezet *egységnyi hosszúságú szakaszának* rezgéstani viselkedése akkor írja le helyesen a teljes tartót, ha csavarási és eltolódási saját(kör)frekvenciája megegyezik a tartó legkisebb csavarási és (a szélirányra merőleges) hajlítási saját(kör)frekvenciájával [21], [13], [14]. A hídszerkezetek tárgyalása során (a 6. pontban) még visszatérünk arra, hogy milyen szempontok szerint kell meghatározni, ill. kiválasztani a híd megfelelő rezgésszámait.

— A csillapítás hatását figyelembe tudjuk venni Klöppel és Thiele görbéinek segítségével (6., 7. ábrák). Debreczeny elméletébe is bele lehetne venni a csillapítást, de Klöppel–Thiele görbéiből az tűnik ki, hogy a valóságos szerkezetek  $\delta \approx 0,05 \approx 0,10$  nagyságú csillapításának — az  $\omega_\theta/\omega_y = 1$  pont közvetlen környezetét kivéve — nincs számottevő befolyása a kritikus szélsébségre.

— A keresztmetszetnek a keskeny derékszögű négyszögtől való eltéréséről Klöppel és Thiele [14] nagyszámú szélsatorna-méréssel kimutatták, hogy gyakorlatilag minden keresztmetszet alakhoz megadható az  $\omega_\theta/\omega_y$  sajátfrekvencia-arány függvényében egy (1,0-nál kisebb) „alaki szorzótényező”, amelylyel a keskeny négyszögre vonatkozó  $v_{kr}$ -t megszorozva igen jó közelítéssel megkapjuk az illető keresztmetszet kritikus szélsébségét. Erre a 6.2. pontban térünk vissza.

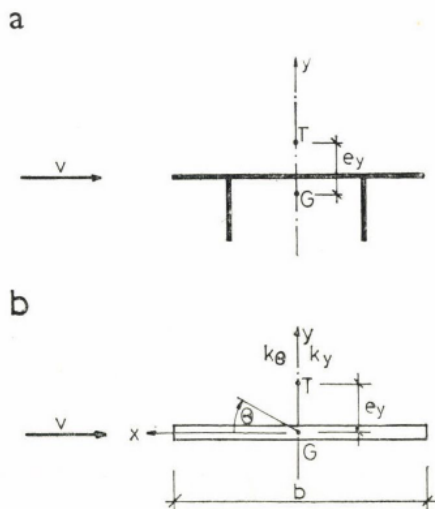
## 6. A hidakkal kapcsolatos kérdések

### 6.1. A nyírasközéppont szélirányra merőleges külpontosságának hatása

A gyakran előforduló egyszerűen szimmetrikus hídkeresztmetszeteket a mi szempontunkból az jellemzi, hogy  $T$  nyírasközéppontjuk a szélirányra merőlegesen  $e_y$  távolságra van a  $G$  tömegsúlyponttól (9a. ábra). Felmerül a kérdés: nem okoz-e minőségi különbséget a 4. ábra síklapjához képest ez a külpontosság, illetve: hogyan kell értelmeznünk  $\omega_\theta$ -t (és ezen belül  $m_p$ -t), hogy érvényesek maradjanak az eddigi összefüggések?

E kérdés eldöntéséhez elegendő a vizsgálatot az elemi (kvázi-stacionárius) elmélettel elvégezni, mivel ez is megmutatja, ha van minőségi különbség.

Vizsgálatunkhoz a 9b. ábrán vázolt modellt vesszük alapul, azaz olyan síklapot, amelynek rugalmas (nyírás-) középpontja külpontosan helyezkedik el. A mozgásegyenletet ismét a  $G$  tömegsúlypont eltolódására és a  $G$  körüli elfordulásra írjuk fel, de most bele vesszük az  $x$  irányú eltolódás egyenletét is, mivel  $T$  külpontossága miatt ez összekapcsolódik a többi mozgással.



9. ábra

A rugók  $T$ -ben működnek,  $k$ -kat tehát  $T$  eltolódásaival kell megszoroznunk amelyeket  $G$ -nek  $x$  és  $y$  eltolódásával a következőképpen fejezhetünk ki:

$$x_T = x - e_y \Theta, \quad (30a)$$

$$y_T = y. \quad (30b)$$

Így a három mozgásegyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$m\ddot{x} = -k_x(x - e_y \Theta) - D, \quad (30c)$$

$$m\ddot{y} = -k_y y + L, \quad (30d)$$

$$m_{pG} \ddot{\Theta} = -k_\Theta \Theta + k_x(x - e_y \Theta) e_y + M. \quad (30e)$$

A jelölések magyarázatát l. az (1a, b) egyenleteknél. A (30c)-ben szereplő  $k_x$  az  $x$  irányú rugóállandó,  $D$  pedig a szél irányában ható ellenállás („drag”), amely (2a, b)-hez hasonlóan a

$$D = \beta_D \frac{\rho v^2}{2} b \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} \right) \quad (31)$$

alakba írható. Síklap esetében (ha eltekintünk a síklap véges vastagsága okozta ellenállástól, amely az állásszög egészen kis értékeinél jelentkezik):

$$\beta_D = 1, 0, \quad (32)$$

mivel  $b \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} \right)$  a síklapnak a szélirányra merőleges vetülete [16].

Nagymértékben egyszerűsíti a levezetést, ha a  $k_x$  rugóállandót végtelen nagyra vehetjük. Ekkor

$$x_T = x = e_y \Theta = 0, \quad (33)$$

ami miatt a  $k_x(x - e_y \Theta)$  kifejezés  $\infty \cdot 0$  alakúvá, azaz határozatlanná válik. Ezért (30a) segítségével kiküszöböljük (30e)-ből, figyelembevételével, hogy (33) folytán  $\ddot{x} = e_y \ddot{\Theta}$ :

$$(m_{pG} + m e_y^2) \ddot{\Theta} = -k_\Theta \Theta - D e_y + M. \quad (34)$$

Ez tulajdonképpen a  $T$  körüli forgómozgás egyenlete, mivel

$$m_{pG} + m e_y^2 = m_{pT} \quad (35)$$

a  $T$  nyírasközéppontra vett poláris tömeg-inercianyomaték.

Bevezetjük még az alábbi jelöléseket:

$$\omega_{\Theta T}^2 = \frac{k_\Theta}{m_{pT}} \quad (36)$$

a  $T$  körüli elcsavarodó rezgés saját-körfrekvenciájának négyzete, és

$$\gamma_D = \beta_D \frac{\rho b}{2}. \quad (37)$$

Ezek után (30d)-t és (34)-et ugyanúgy oldjuk meg, mint (6a, b)-t. A (9) karakterisztikus egyenlet együtthatói az alábbiak lesznek:

$$A_4 = 1, \quad (38a)$$

$$A_3 = \frac{\gamma_L}{m} v, \quad (38b)$$

$$A_2 = \omega_{\theta T}^2 + \omega_y^2 - \left( \frac{\gamma_M}{m_{pT}} - e_y \frac{\gamma_D}{m_{yT}} \right) v^2, \quad (38c)$$

$$A_1 = \omega_{\theta T}^2 \frac{\gamma_L}{m} v, \quad (38d)$$

$$A_0 = \omega_{\theta T}^2 \omega_y^2 - \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_M}{m_{pT}} - e_y \frac{\gamma_D}{m_{pT}} \right) v^2. \quad (38e)$$

Az  $A_0 < 0$  feltételből most is a statikus instabilitást okozó divergencia-sebességet kapjuk meg:

$$v^2 > m_{pT} \frac{\omega_{\theta T}^2}{\gamma_M - e_y \gamma_D}, \quad (39a)$$

a belebegésre pedig az  $A_2 < 0$  feltétel a

$$v^2 > m_{pT} \frac{\omega_{\theta T}^2 + \omega_y^2}{\gamma_M - e_y \gamma_D} \quad (39b)$$

kritikus sebességet szolgáltatja. Láthatjuk, hogy a (39a) divergencia-sebesség ebben az esetben is mindig kisebb a (39b) belebegési sebességnél.

A (16) feltételből most is a (17) egyenlőtlenséggel analóg

$$v^4 (\omega_{\theta T}^2 - \omega_y^2) > 0 \quad (40)$$

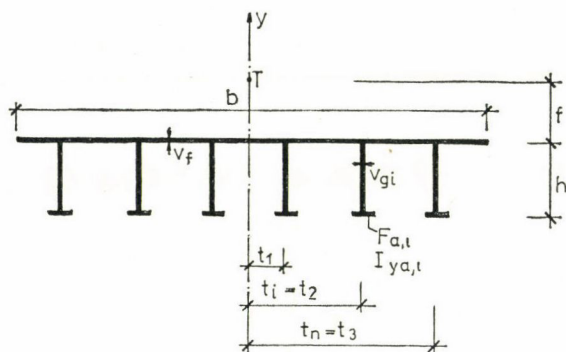
kifejezés adódik.

Az eredmények tehát lényegében megegyeznek a 3. pontban kapottakkal: az  $\omega_{\theta T} < \omega_y$  tartományban a divergencia-sebesség a mértékadó, az  $\omega_{\theta T} > \omega_y$  tartományban pedig a belebegési sebesség, amely az áramlástanai erők pontosabb figyelembevételével természetesen most is 0-nál nagyobbra adódna. A tömegsúlyponttal egybeeső nyírasközéppont esetével szemben az a különbség, hogy egyrészt  $\omega_{\theta}$ -hoz az  $m_p$  poláris tömeg-inercianyomatékot a nyírasközéppontra kell vennünk, másrészt pedig a külpontosság miatt az ellenállást tartalmazó  $\gamma_D$  tényező is szerephez jut.

Az áramlástanai erők pontosabb figyelembevételével (pl. Debreczeny eljárásával) azért nem végeztük el a vizsgálatot, mert a Klöppel és Thiele [14] cikkében szereplő „alaki szorzótényezők” (6.3. pont) amúgy is minden hatást figyelembe vesznek.

## 6.2. Az egyszerűen szimmetrikus, többfőtartós hídkeresztmetszetek nyírasközéppontja és öblösödési merevsége

Az alábbiakban megadjuk a többfőtartós, alul nyitott hídkeresztmetszetek nyírasközépponti távolságának valamint  $I_0$  öblösödési merevségének meghatározására szolgáló képleteket, amelyekre a csavarási saját-körfrekvencia számításához lehet szükségünk. A levezetéseket a [3]-ban foglaltak alapján végeztük el.



10. ábra

A  $T$  nyírasközéppontnak a hídkeresztmetszet felső övlemezétől mért távolságát tudjuk egyszerűen megadni (a 10. ábrán  $f$ -fel jelölve):

$$f = h \frac{2}{I_y} \sum_{i=1}^n t_i^2 \left( \frac{F_{gi}}{2} + F_{ai} \right). \quad (41)$$

E képletben:

$I_y$  a teljes keresztmetszet inercianyomatéka az  $y$  tengelyre,

$n$  a keresztmetszet jobb felén található főtartók száma,

$F_{gi}$  az  $i$ -edik gerinc  $v_{gi}h$  felülete,

$F_{ai}$  az  $i$ -edik alsó öv felülete.

(Rácsos főtartók esetében  $F_{gi} = 0$ .)

Az  $I_\omega$  öblösödési (torzulási) merevség pedig a következőképpen számítható:

$$I_\omega = f^2 I_{yf} + 2 \sum_{i=1}^n F_{gi} \left[ \frac{h^2}{3} + f(f-h) \right] t_i^2 + \\ + 2 \sum_{i=1}^n [I_{ya,i} \cdot (f+h)^2 + F_{ai}(f-h)^2 \cdot t_i^2]. \quad (42)$$

A jelölések:

$I_{yf}$  a felső övlemez inercianyomatéka az  $y$  tengelyre,

$I_{ya,i}$  az  $i$ -edik alsó öv inercianyomatéka az  $y$ -nal párhuzamos saját súlyponti tengelyére.

A (41)–(42) képletek érvényességéhez az szükséges, hogy az alsó övek síkjában ne legyen szélrács, mert akkor a keresztmetszet nem tekinthető többé nyitottnak, hanem zárttá válik, és nyírasközéppontja a felső és az alsó övekből álló két vízszintes síkú tartó keresztmetszete  $y$  tengelyre vett inercianyomatékának „eredője” magasságába esik, öblösödési merevsége pedig többnyire elhanyagolható a  $GI_t$  csavarási merevség mellett.



### 6.3. A különböző hídkeresztmetszetek alakí szorzótényezői

Amint az 5. pontban már említettük, Klöppel és Thiele [14] a gyakorlatban alkalmazott számos hídkeresztmetszetre diagramokban megadja azt az  $\eta$ , „alaki szorzótényezőt”, amellyel a 6., ill. 7. ábrából leolvasható kritikus szélebséget meg kell szorozni, hogy az illető keresztmetszetre megkapjuk a helyes ered-

A keresztmetszet alakja		$\eta$ tájékoztató értéke	
		$\omega_{\theta}/\omega_y = 1$	$\omega_{\theta}/\omega_y = 2$
szekrény		$\frac{h}{b} = 0,10 : 0,7$	0,4
		$\frac{h}{b} = 0,30 : 0,4$	0,2
		$\frac{h}{b} = 0,10 : 0,9$	0,8
		$\frac{h}{b} = 0,30 : 0,7$	0,35
x-re (nagyjából) szimmetrikus szekrény		0,6	
rácsos gerincű		0,7	0,6
gerinclemezés		$\frac{h}{b} = 0,05 : 0,6$	0,3
		$\frac{h}{b} = 0,20 : 0,2$	0,1

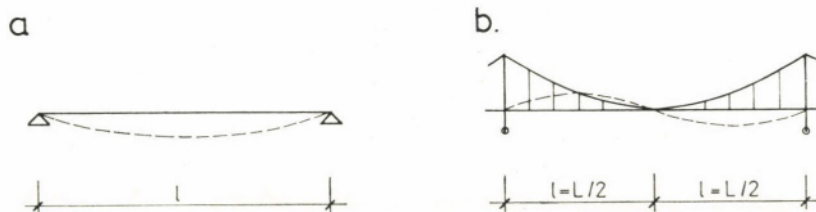
11. ábra

ményt. Ezt az  $\eta$ -t a korábban mondottak miatt csak  $\omega_{\theta}/\omega_y > 1$  frekvenciarányra adják meg, általában  $\omega_{\theta}/\omega_y = 2$ -ig. A görbék növekvő  $\omega_{\theta}/\omega_y$ -nal csökkennek. Tájékoztatásul a 11. ábrán megadjuk az egyes keresztmetszet-típusokra jellemző „átlagos”  $\eta$ -értékeket. Pontosabb adatok [14]-ben találhatóak.

Debreczeny ezeket az  $\eta$ -értékeket átszámította az általa keskeny derékszögű négyszögre levezetett, (28)-nak megfelelő kritikus sebességhez [5]. Ezenkívül sok új adatot közöl csőhidakra.

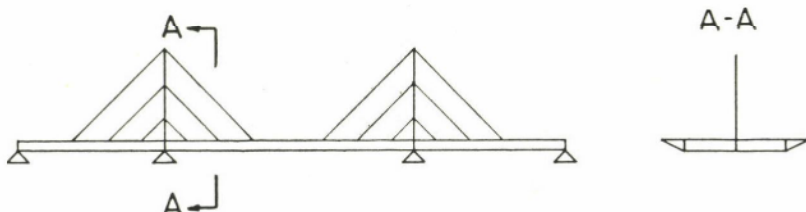
### 6.4. Megjegyzések a hidak sajátfrekvenciáinak kiszámításához

A gerendahidak csavarási és függőleges hajlítási sajátfrekvenciáit nyilván a teljes támaszközre kiterjedő félhullámmal kell meghatározni (12a. ábra), mivel így kapjuk a legkisebb frekvenciákat. Más a helyzet azonban a függőhidaknál.



12. ábra

Ha csak függőleges függesztőrudakat alkalmazunk, akkor ezek nagymértékben meggátolják a 12a. ábrának megfelelő deformációt (lengésalakot), de egyáltalán nem, vagy alig akadályozzák a 12b. ábrán vázolt antimetrikus alakváltozást: ezeknél csupán a merevítőtartó merevségei jutnak szerephez. Ebből az következik, hogy eme híd típusnál általában a támaszköz felére kiterjedő félhullámhosszal számított sajátfrekvenciák lesznek a legkisebbek és ezeket kell alapul vennünk a rezgéstani méretezéshez.



13. ábra

Külön megfontolást igényelnek a ferde kábelsíkú [4], [6], valamint a berácsozott kábelsíkú hidak [18].

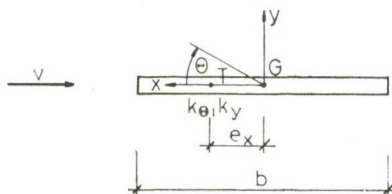
Végül megemlítjük, hogy a középső kábelsíkú hárfahidak (13. ábra) hajlítási sajátrezgésszáma igen magas (mivel a hárfatartó, ellentétben a függőhidakkal, parciális teherre is merevít), elcsavarodással szemben azonban aránylag kicsi a merevségük, mert a keresztmetszet közepe körüli elcsavarodásukat a kábelsík nem akadályozza. Ily módon azonban a 8. ábra  $\omega_\theta < \omega_y$  szakaszára kerülnek, ahol a divergencia-sebesség a mértékadó. Erre a statikai jellegű elcsavarodási instabilitásra mindenképpen méreteznünk kell a hidat, de így módon automatikusan elkerüljük a belebegési veszélyt.

## 7. A magasházakkal kapcsolatos kérdések

### 7.1. A nyírasközéppont szélirányú külpontosságának hatása

A magasházak keresztmetszete általában derékszögű négyszög alakú. Így elsősorban nem a keresztmetszet alakja okoz problémát (mint a hidaknál), hanem az a tény, hogy a merevítő mag nyírasközéppontja a szél irányában  $e_x$  mérettel kieshet a tömegsúlypontból (14. ábra).

Erre az esetre tudomásunk szerint nincs pontos megoldás, így a 4.1. pont szerint, Debreczeny eljárásával fogjuk megvizsgálni, hogy felhasználásra is alkalmas eredményt kapjunk.



14. ábra

A nyírasközéppont  $y$  irányú eltolódása a következőképpen függ össze a tömegsúlypontéval:

$$y_T = y + e_x \Theta. \quad (43)$$

A súlypontra most (1a, b), (2a, b), (5a, b) és (24) figyelembevételével az alábbiak szerint kell felírunk a mozgásegyenleteket:

$$m\ddot{y} = -k_y (y + e_x \Theta) + \gamma_L v^2 \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} \right), \quad (44a)$$

$$m_{pG} \ddot{\Theta} = -k_\Theta \Theta - k_y (y + e_y \Theta) e_x + \gamma_M v^2 \left( \Theta - \frac{\dot{y}}{v} - \frac{b}{2} \frac{\dot{\Theta}}{v} \right). \quad (44b)$$

A (7a, b) megoldásfüggvényeket behelyettesítve, a (9) karakterisztikus egyenlet együtthatói a következő alakot öltik:

$$A_4 = \frac{m_{pG}}{m_{pT}}, \quad (45a)$$

$$A_3 = \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{m_{pG}}{m_{pT}} + \frac{\gamma_M b}{2m_{pT}} \right) v, \quad (45b)$$

$$A_2 = \omega_{\Theta T}^2 + \omega_y^2 - \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \left( 1 - \frac{\gamma_L b}{2m} \right) v^2, \quad (45c)$$

$$A_1 = \left\{ \omega_{\Theta T}^2 \frac{\gamma_L}{m} + \omega_y^2 \left[ \frac{\gamma_L}{m} \frac{e_x^2 m}{m_{pT}} + \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \left( \frac{b}{2} - e_x \right) \right] \right\} v, \quad (45d)$$

$$A_0 = \omega_{\Theta T}^2 \omega_y^2 - \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_M}{m_{pT}} - \frac{\gamma_L}{m} e_x \frac{m}{m_{pT}} \right) v^2. \quad (45e)$$

Itt felhasználtuk (11b)-t, valamint bevezettük az

$$m_{pT} = m_{pG} + e_x^2 m \quad (46)$$

és az

$$\omega_{\Theta T}^2 = \frac{k_\Theta}{m_{pT}} \quad (47)$$

jelöléseket.

A (45c) utolsó zárójelében szereplő második tag a (25c)-vel kapcsolatban mondottak miatt most is elhanyagolható az egység mellett.

A divergencia-sebességre az  $A_0 < 0$  feltételből

$$v^2 > m_{pT} \frac{\omega_{\Theta T}^2}{\gamma_M - e_x \gamma_L}, \quad (48)$$

a belebegési szélesebességre pedig az  $A_2 < 0$  feltételből

$$v^2 > m_{pT} \frac{\omega_{\Theta T}^2 + \omega_y^2}{\gamma_M} \quad (49)$$

adódik. Mind a két egyenlőtlenség megegyezik az elemi elmélettel [a szögsebességtől függő (24) tag elhanyagolásával] kapható eredményekkel [7].

A (48) és (49) képletek összehasonlítása azt mutatja, hogy a divergencia-sebesség most már nem minden esetben kisebb a (49) belebegési sebességnél. Az (5) és (3) képletekből az adódik, hogy  $\gamma_L = 4\gamma_M/b$ , és így a (49) belebegési sebesség kisebb lesz a divergencia-sebességnél, ha

$$\frac{e_x}{b} > \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{\omega_{\Theta T}^2}{\omega_y^2}}, \quad (50)$$

ami azt kívánja meg, hogy  $\omega_{\Theta T}/\omega_y = 0$  esetében  $e_x/b > 1/4$ ,  $\omega_{\Theta T} = \omega_y$  esetében pedig  $e_x/b > 1/8$  legyen. Ezek pedig reális értékek lehetnek.

A másik belebegési sebességre a (16) kritériumból most azt kapjuk hogy

$$v^2 > \frac{Sz}{N}, \quad (51a)$$

ahol

$$Sz = \left[ \omega_{\Theta T}^2 \frac{\gamma_L}{m} + \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} - \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \frac{e_x}{b} \right) \right] (\omega_{\Theta T}^2 + \omega_y^2) \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} \right) - \quad (51b)$$

$$- \left[ \omega_{\Theta T}^2 \frac{\gamma_L}{m} + \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} - \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \frac{e_x}{b} \right) \right]^2 \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

$$- \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} \right)^2 \cdot \omega_{\Theta T}^2 \omega_y^2,$$

$$N = \left[ \omega_{\Theta T}^2 \frac{\gamma_L}{m} + \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} - \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \frac{e_x}{b} \right) \right] \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} \right) + \quad (51c)$$

$$+ \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\gamma_M}{2m_{pT}} \right)^2 \cdot \omega_y^2 \left( \frac{\gamma_L}{m} \frac{b}{e_x} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} - \frac{\gamma_M}{m_{pT}} \right).$$

Az (51b, c) képletekben még az alábbi rövidített jelölést alkalmaztuk:

$$\varepsilon = \frac{e_x^2 m}{m_{pG}}, \quad (52)$$

azaz:  $\varepsilon$  arányos  $e_x^2/b^2$ -tel.

Az (51) képletcsoport  $e_x \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) esetében természetesen átmegy a központosan elhelyezkedő merevítőmag esetére érvényes (27) kifejezésbe.

A képletcsoport bonyolultsága miatt számszerűen értékeltük az  $e_x$  külponthosszág hatását, mégpedig a következő adatok alapulvételével:

$$m_{pG} \approx m \frac{b^2}{12}, \quad (53)$$

és emiatt:

$$\varepsilon = 12 \frac{e_x^2}{b^2}. \quad (54)$$

Az épület egységnyi magasságra jutó tömege (200 kp/m<sup>3</sup> léghöbmétersúlyt és 1:5 alaprajzi oldalarányt felvéve):

$$m = \frac{200 \text{ kp m}^{-3}}{9,81 \text{ m sec}^{-2}} b \frac{b}{5} = 4,08 b^2. \quad (55a)$$

A (3), (4) és (5) képletek alapján:

$$\frac{\gamma_L}{m} = \frac{0,09632}{b}, \quad (55b)$$

$$\frac{\gamma_M}{m_{pT}} = \frac{0,2887}{b^2(1 + \varepsilon)}. \quad (55c)$$

Az  $y$  irányú hajlítási saját-körfrekvenciához feltételeztük, hogy az épület összterhe a rugalmas kritikus összteher 1/4-e. Mivel [26] szerint

$$N_{kr,rug.} = \frac{7,84 E I_y}{H^2}, \quad (56a)$$

ezért

$$N = 9,81 m H = \frac{N_{kr,rug.}}{4} = 1,96 \frac{E I_y}{H^2}. \quad (56b)$$

A 7.3. pont értelmében a nyomóerővel terhelt konzol saját-körfrekvenciája [7], [20]:

$$\omega_y = 3,52 \sqrt{\frac{E I_y}{m H^4} \left(1 - \frac{N}{N_{kr}}\right)}. \quad (57)$$

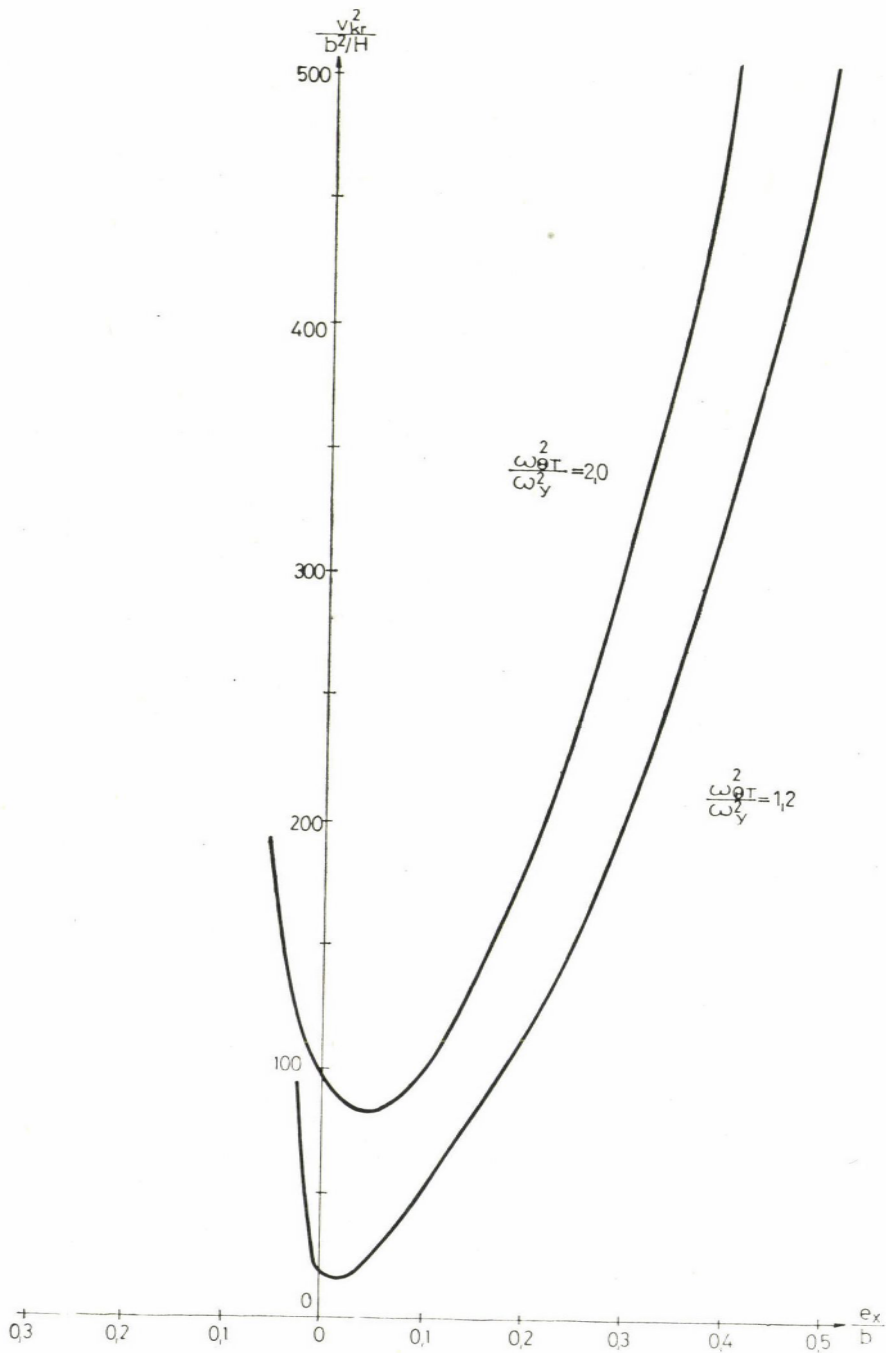
Behelyettesítve ide (56b)-ből  $\frac{E I_y}{m H^3}$ -t és  $N/N_{kr}$ -t:

$$\omega_y^2 = 3,52^2 \left[ \frac{9,81}{1,96 H} (1 - 0,25) \right] = \frac{46,51}{H}. \quad (58)$$

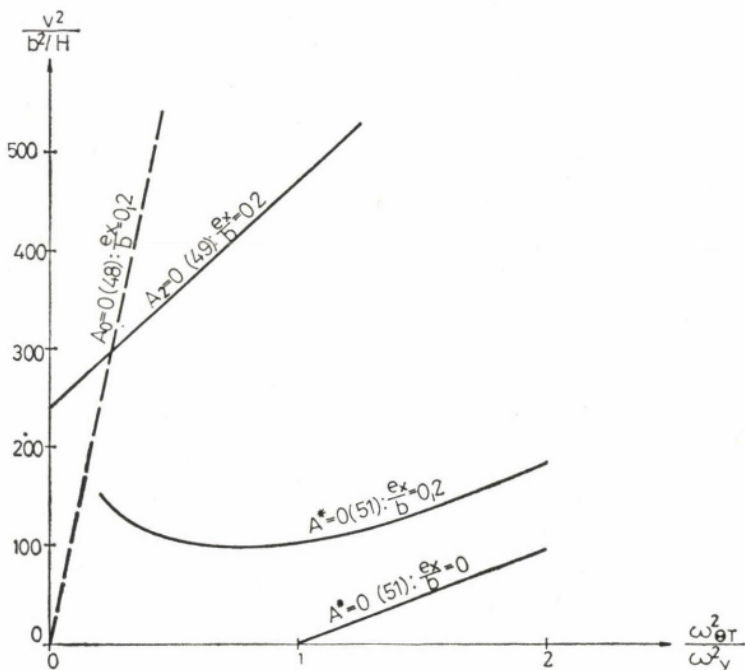
A számítások eredményeiből a 15. és 16. ábra görbéit mutatjuk be. Ezekben a  $v_{kr}^2/(b^2/H)$  mennyiséget ábráztunk, mégpedig a 15. ábrán az  $e_x/b$  viszonyított külpontosság függvényében a csavarási és a hajlítási saját-körfrekvencia négyzetének kétféle arányára, a 16. ábrán pedig az  $e_x/b = 0,2$  mértékű külpontosság esetére a két saját-körfrekvencia négyzete arányának függvényében. Feltüntetjük a (48), ill. (49) képlettel megszabott divergencia-, ill. belebegési szélsőbesség négyzetét is (a divergencia-sebességet szaggatott vonallal).

A 15. ábrából kitűnik, hogy

- a kritikus szélsőbesség pozitív  $e_x$  esetében először kismértékben csökken (a jelen számpéldában mintegy 10%-kal), majd növekszik,
- negatív  $e_x$  minden esetben rohamosan növeli  $v_{kr}$ -t,



15. ábra



16. ábra

a 16. ábrából pedig az látszik, hogy

- a felső belebegési sebesség (49) most az  $\omega_{\theta T} < \omega_y$  tartomány nagy részében kisebb lesz a (48) divergencia-sebességnél, de az épületre az ellenkező irányból is fújhat a szél, így  $+e_x$ -en kívül  $-e_x$ -re is meg kell vizsgálnunk. Ekkor pedig mindenképpen a (48) adta divergencia-sebesség lesz kisebb a (49) szerinti felső belebegési sebességnél. Ez utóbbi tehát sohasem mértékadó. Ezenkívül
- az alsó ( $A^* = 0$ -ból kapható)  $v_{kr}$ -görbe, amely  $e_x = 0$  esetében csak az  $\omega_{\theta T} > \omega_y$  tartományban adott valós értékeket (vö. a 8. ábrával), pozitív  $e_x$  esetében eltolódik az  $\omega_{\theta T} < \omega_y$  tartományba, és kisebb  $v_{kr}$ -t szolgáltat, mint az erre a tartományra egyébként érvényes,  $A_2 = 0$ -ból kapható (49) felső belebegési, ill.  $A_0 = 0$ -ból adódó (48) divergencia-sebesség.

### 7.2. A merevítőfalak összegezt merevségeinek számítása

A magasházakat legtöbbször nem egyetlen mag merevíti, hanem több mag, ill. falszakasz. Ezeknek a hajlítási és csavarási merevségei mindig összegezhetőek, és így egyetlen „fiktív mag” merevségi jellemzőivel számolhatunk. Az összegezés pontos módját Szmodits [25] mutatta be. Mi most egy közelítő módszert ismertetünk, amely szemléletes, és alkalmas a végeredmények megbecslésére is, feltéve, hogy az egyes fal-elemek saját centrifugálnyomatéka elhanyagolhatóan kicsi.

Mindig olyan statikai modellt veszünk alapul, amelyben több, egymástól független falszakaszt csupán a (teljesen hajlékonynak tekintett) földemek fognak össze.

A merevségek összegezésének szabályai az alábbiak:

$$I_x = \Sigma I_{xi}, \quad (59a)$$

$$I_y = \Sigma I_{yi}, \quad (59b)$$

$$I_t = \Sigma I_{ti}, \quad (59c)$$

azaz: az összegezett  $I_x$ ,  $I_y$  hajlítási és  $I_t$  csavarási merevségeket a rész-elemek megfelelő merevségeinek egyszerű összegezésével kapjuk meg. Az (59a–c) összefüggések pontosak.

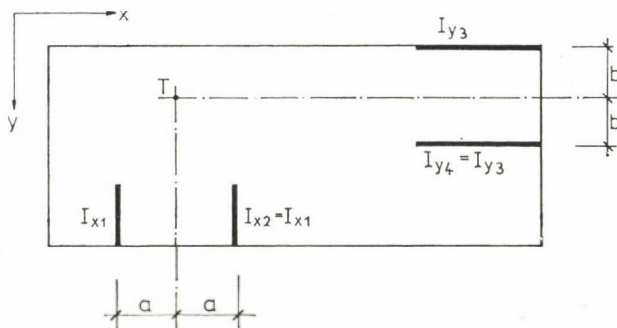
Az összegezett  $I_\omega$  öblösödési (torzulási) merevséghez először közelítően meghatározzuk a fal-elemek közös  $T$  nyírasközéppontját. Ennek  $x$  (ill.  $y$ ) irányú helyzetét úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk a fal-elemek saját súlyponti  $x$  (ill.  $y$ ) irányú tengelyére vonatkozó  $I_{xi}$  (ill.  $I_{yi}$ ) inercianyomatékai súlypontjának  $x$  (ill.  $y$ ) irányú koordinátáját (vö a 17. ábrával). A  $T$ -re vonatkozó összegezett öblösödési merevséget pedig közelítően az alábbi képlet szolgáltatja:

$$I_\omega = \Sigma I_{\omega i} + I_y [I_{xi}] + I_x [I_{yi}], \quad (60)$$

azaz: összegezzük az egyes fal-elemek saját  $I_{\omega i}$  öblösödési merevségét, s hozzáadjuk ehhez az egyes fal-elemek saját  $I_{xi}$  (ill.  $I_{yi}$ ) merevségeinek a  $T$ -n átmenő,  $y$ -nal (ill.  $x$ -szel) párhuzamos tengelyre vett inercianyomatékát, amelyet  $I_y[I_{xi}]$ -vel, ill.  $I_x[I_{yi}]$ -vel jelöltünk. Ez pl. a 17. ábra esetében a következő eredményt adja ( $I_{\omega i} = 0$  lévén):

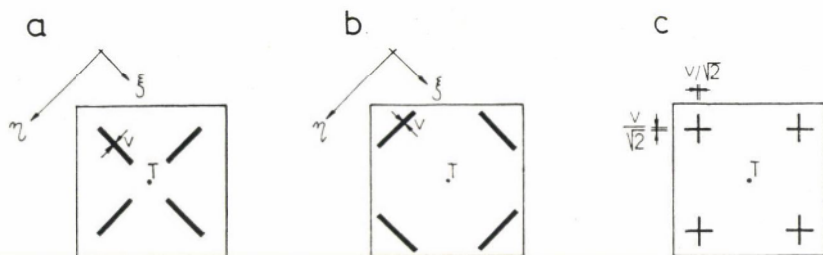
$$I_\omega = 2I_{x1}a^2 + 2I_{y3}b^2. \quad (61)$$

A közelítés, mint említettük, abból áll, hogy sem  $T$  helyének, sem  $I_\omega$  nagyságának meghatározásában nem vesszük figyelembe az egyes fal-elemek saját súlyponti  $xy$  tengelykeresztjére vonatkozó centrifugálnyomatékát. A 17. ábra esetében ezek 0-k,  $T$  helye és a (61) szolgáltatta összegezett öblösödési merevség tehát pontos. A 18a, b. ábrákon azonban bemutatunk két szélsőséges esetet, amikor az egyes fal-elemeknek tekintélyes centrifugálnyomatékuk van, s ez meghamisítja az (60) eredményt.



17. ábra





18. ábra

A 18a. ábrán vázolt négy fal-elem mindegyike átmegy a  $T$  nyírasközépponton, ennek folytán a pontos  $I_{\omega}$  zérus. A 18b. ábra fal-elemei viszont tekintélyes öblösödési merevséget adnak  $T$ -re. (Ha az  $xy$  koordinátarendszer helyett a  $45^{\circ}$ -kal elfordított  $\xi\eta$  rendszerben íránk fel a (60) képletet, meg is kapnánk ezt a pontos eredményt, mivel a fal-elemeknek a  $\xi\eta$  rendszerben zérus a centrifugálnyomatékuk.) Az  $xy$  rendszerben azonban a (60) képlettel tulajdonképpen a 18c. ábrán vázolt fal-elemek  $I_{\omega}$ -ját számítjuk ki  $T$ -re, ezzel szemben a pontos eredmény a 18a. ábra esetében 0, a 18b. ábráéban pedig a közelítő eredmény kétszerese.

Közelítő (60) képletünkkel tehát mind a biztonság javára, mind a kárára tévedhetünk, ha az egyes fal-elemeknek nem elhanyagolhatóan kicsi a saját centrifugálnyomatékuk. Ilyenkor a [25]-ben leírt pontos számítást kell használnunk.

### 7.3. Kiegészítő megjegyzések

A magasházaknak alul befogott konzolként számított hajlítási vagy csavarási  $\omega_0$  saját-körfrekvenciáját csökkenti az önsúlyból származó nyomóerő. Ez a csökkentett körfrekvencia jó közelítéssel a következőképpen számítható [27], [20]:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{N}{N_{kr}}}, \quad (62)$$

ahol  $N_{kr}$  az illető (hajlítási vagy csavarási) rezgésfajtának megfelelő rugalmas kritikus nyomóerő,  $N$  pedig a ténylegesen ható nyomóerő. Ez a közelítés annál jobb, minél közelebb áll a rezgésalak a kihajlási alakhoz.

Az  $\omega_0$  körfrekvencia (és az  $N_{kr}$  nyomóerő) számításához figyelembe kell vennünk, hogy a szerkezet alul általában nincs teljesen mereven befogva a talajba.

A belebegéshez a szélnek az építmény keresztmetszetének hosszabbik oldalával párhuzamosan kell fújnia. Ez hidak esetében többé-kevésbé automatikusan teljesül: a hídkeresztmetszet hosszabbik oldala a tereppel (vagy vízfelszínnel) párhuzamos lévén csupán az szükséges, hogy a szél nagyjából merőlegesen fújjon a hídra. Magasházaknál azonban a szélnek gyakorlatilag pontosan a hosszabb oldallal párhuzamosan kell fújnia, ami sokkal erősebb megkötést jelent a szélirányra. Így a magasházak belebegése már csak ezért is sokkal ritkábban várható, mint a hidaké.

Ha a magasházra ható szél a rövidebb oldalával fúj párhuzamosan, akkor nem a belebegés, hanem a „táncolás” (galloping) jelensége következhet be [7].

[15], [12]. Ugyanez történik akkor is, ha a ház négyzetalaprajzú és a szél valamelyik oldalával párhuzamosan fúj. Ezzel azonban most nem kívánunk részletesebben foglalkozni.

## 8. Összefoglaló értékelés

### 8.1. A hidak belebegésének számszerű vizsgálata

A gyakorlati felhasználás megkönnyítése céljából megvizsgáljuk, hogy az áramlástanai szempontból legkedvezőtlenebb paraméterekkel megtervezett hidak milyen támaszközök tartományában lebeghetnek be.

Csak akkor következhet be belebegés, ha a kritikus sebesség kisebb a reálisan előforduló állandó szélesebségnél, ami max. 40 m/sec-ra tehető. Olyan hidat kell tehát konstruálnunk, amelynél  $v_{kr}$  a lehető legkisebb.

A 6–7. ábrákból az tűnik ki, hogy a kritikus szélesebség az  $\omega_{\theta}/\omega_y \approx 1,15$  aránynál minimális, nagysága pedig az acélszerkezeteknek megfelelő  $\delta = 0,05$  értékű csillapítási dekrementum és  $r = 0,577 \frac{b}{2}$  tehetetlenségi sugár (29b) mellett (a két ábra görbéi között interpolálva):

$$v_{kr}^{s\text{klap}} \approx 2,5 \omega_y \frac{b}{2}. \quad (63)$$

Tételezzük fel, hogy ki tudjuk elégíteni a fenti  $\omega_{\theta}/\omega_y$ -arányt. A híd/levegő-tömegarányt  $\mu = 50$ -re választottuk, mert kb. ez felel meg a végeredményül kapott gerendahídnak. (A függőhíd-példához is megtartottuk ugyanezt a  $\mu$ -t.)

A híd legkisebb szélességét — közúti hidat alapul véve —  $b = 8,00$  m-ben rögzítjük. Most még  $\omega_y$ -t kell minimummá tennünk.

*Kéttámaszú gerendahíd* esetében a hajlítási saját-körfrekvencia nagysága:

$$\omega_y = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{m}}. \quad (64)$$

Az  $EI_y$  merevség tehát a lehető legkisebb legyen. Az  $m$  fajlagos tömeget nem kell maximalizálnunk, mert ennek hatása a  $\mu$  tömegarányon keresztül (nagy részt) kompenzálódik, s ezenkívül  $m$ -et csak  $EI_y$  növekedése árán tudnánk növelni.

Válasszunk egy olyan elméleti hídkeresztmetszetet, amely azonos  $v$  vastagságú alsó és felső övből áll. A két öv súlyának 50%-ára tehetjük a rácozást (ill. gerinclemezt), s ezenkívül 150 kp/m<sup>2</sup> burkolatot és 400 kp/m<sup>2</sup> hasznos terhet vegyünk alapul.

Mivel a keresztmetszet egységnyi szélességének inercianyomatéka ( $h$  magasság mellett)

$$I_y = \frac{vh^2}{2}, \quad (65)$$

önsúlya pedig  $v$ -vel arányos, ezért az inercianyomaték/önsúly-arány annál kisebb, minél alacsonyabb a híd. Tekintetbe kell azonban vennünk, hogy a le-

hajlás-korlátozás miatt  $h = l/20$ -nál alacsonyabb hidat gyakorlatilag nem alkalmazhatunk, így ezt az arányt tartjuk meg.

A szilárdságilag még megfelelő hídkeresztmetszet egységnyi szélességére felírhatjuk, hogy

$$\frac{(g+p)l^2}{8} = vh\sigma_{eng} \quad (66)$$

ahol a nagyszilárdságú acél  $\sigma_{eng} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ -jét fogjuk használni a Közúti Hídszabályzatnak megfelelően. Mindent kp- és cm- egységben helyettesítünk be. Az állandó teher nagysága:

$$g = 2v \gamma_a 1,5 + 0,015, \quad (67)$$

ahol  $\gamma_a = 7,85 \cdot 10^{-3}$ . Így a szükséges vastagság a következőképpen függ a támaszköztől:

$$v = \frac{0,055}{\frac{960}{l} - 0,02355} \quad (68)$$

Ezt (65)-be, azt pedig (64)-be helyettesítve, és figyelembe véve, hogy  $m = g/981$ , a hajlítási saját-körfrekvenciára (64)-ből az adódik, hogy

$$\omega_y = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{981 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot I_y}{g}}, \quad (69)$$

a kritikus szélességet pedig (63) szolgáltatja. A számértékek 50 és 100 m támaszköz esetére a következőképpen alakulnak:

$l$	=	50	100	m
$v$	=	0,326	0,76	cm
$I_y/g$	=	449 238	2 887 713	$\text{cm}^5 \cdot \text{kp}^{-1}$
$\omega_y$	=	12,01	7,61	$\text{rad} \cdot \text{sec}^{-1}$
$v_{kr}^{\text{siklap}}$	=	120,0	76,0	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$

Az így kapott kritikus sebességeket még meg kell szorozni a 11. ábra alaki szorzótényezőinek valamelyikével. Felsőpályás gerinclemezes hídra (a 11. ábra 0,6 és 0,2 értéke között interpolálva)  $\eta \approx 0,3$ -at, rácsosra  $\eta \approx 0,7$ -et vehetünk. Így az alábbiakat kapjuk:

$l$	=	50	100	m
$v_{kr}^{\text{gerincl.}}$	=	36,0	22,8	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$
$v_{kr}^{\text{rácsos}}$	=	84,0	53,2	$\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$

Ezek az adatok azt mutatják, hogy a gerinclemezes hidak bizonyos, szélsőségesen kedvezőtlen arányok mellett belebegtethetnek, a rácsosak nem.

A *függőhidak* (12b. ábra) a mi szempontunkból abban különböznek a gerenda-hidaktól, hogy merevítőtartójuk a totális teherből nem szenved hajlítást, csupán a fél támaszközre ható  $p/2$  mozgó teherből. Ezt  $p/2$  totális és  $\pm p/2$  anti-metrikus teherre bonthatjuk fel, s az utóbbit a merevítőtartó  $l = L/2$  támasz-

közü kéttámaszú tartóként viseli. Így a (66) egyenlet helyett a

$$\frac{\frac{p}{2} l^2}{8} = v h \sigma_{\text{eng}} \quad (70)$$

feltételből kell kiindulnunk. A számítás menete egyébként azonos lesz a gerendahíddal. A következő eredményeket kapjuk:

$L$	$= 100$	$200$	$400$	$m$
$l$	$= 50$	$100$	$200$	$m$
$\omega_y$	$= 6,11$	$3,95$	$2,42$	$\text{rad} \cdot \text{sec}^{-1}$
$v_{\text{kr}}^{\text{sfklap}}$	$= 61,1$	$39,5$	$24,2$	$m \cdot \text{sec}^{-1}$

Az alsópályás gerinclemezes keresztmetszetre a felsópályásnak megfelelően az  $\eta = 0,3$ , a rácsosra az  $\eta = 0,7$  szorzótényezőt alkalmazva:

$L$	$= 100$	$200$	$400$	$m$
$v_{\text{kr}}^{\text{gerincl.}}$	$= 18,3$	$11,8$	$7,3$	$m \cdot \text{sec}^{-1}$
$v_{\text{kr}}^{\text{rácsos}}$	$= 42,8$	$27,6$	$16,9$	$m \cdot \text{sec}^{-1}$

Ezek a szám adatok világosan mutatják, hogy a függőhidak belebegése igencsak reális probléma.

### 8.2. A magasházak belebegésének számszerű vizsgálata

A kérdést most úgy tesszük fel: igen kedvezőtlen körülmények összejárásában esetén előfordulhat-e, hogy egy magasház belebeg?

Alapul veszünk egy központosan elhelyezett maggal bíró, 1:5 oldalarányú téglalap alaprajzú épületet, amelyre a 11. ábra  $\eta = 0,8$ -as alaki szorzótényezőjét tekintjük érvényesnek („ $x$ -re szimmetrikus szekrény”).

Az (acélszerkezetű) merevítő mag hajlítási merevségét most két követelmény szabja meg. Az egyik az, hogy az egész épület súlyára vonatkoztatott (rugalmas) kihajlási biztonság

$$N_{\text{kr}}/N = 4 \quad (71)$$

legyen. (Feltételezzük, hogy az épület terhének nagy részét külön oszlopok hordják, a magra ebből csak elenyészően kis rész jut.)

A másik követelmény: az épület szélesebb oldalára ható mértékadó szélnyomásból a magban keletkező szélsőszál-feszültség ne haladja meg a nagyszilárdságú acélra érvényes  $\sigma_{\text{eng}} = 2400 \text{ kp/cm}^2$ -t. Mivel részletes vizsgálataink szerint ez utóbbi igényli a nagyobb  $I_y$  mag-inercianyomatékokot, ebből fogunk kiindulni.

A mag szélességét a lehető legnagyobbra ( $b/5$ -re) felvéve e szélsőszál-feszültség így írható fel (mindent Mp-ben és m-ben kifejezve):

$$\sigma_{\text{eng}} = \frac{\psi M_{\text{szél}}}{E I_y} E \frac{b}{10}. \quad (72a)$$

$$\text{Itt } M_{szél} = c p_t b \frac{H^2}{2} = 1,2 \cdot 0,130 \cdot b \frac{H^2}{2},$$

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{kr}}} \text{ pedig a nyomaték-növelő tényező [26].}$$

(72a)-ból, a (71)-nek megfelelő  $\psi = \frac{1}{0,75}$ -tel:

$$E I_y = 9,10 b^2 H^2. \quad (72b)$$

A négyszeres kihajlási biztonság feltétele [8] szerint, (56a, b) figyelembevételével így írható:

$$N_{kr} = \frac{7,84 E I_y}{H^2} = 4 N = 4 \cdot 9,81 m H. \quad (73)$$

Ebből az egy folyóméter magasságra jutó legnagyobb megengedhető tömeg nagysága, (72b)-t is felhasználva:

$$m = 1,82 \frac{b^2}{H}. \quad (74)$$

Ez az alábbi  $w$  légműmér-súlyt jelenti:

$$w = \frac{9,81 m}{0,2 b^2} = \frac{89,27}{H}. \quad (75)$$

$w$ ,  $\mu$  (18a) és  $\omega_y$  (57) számértékét néhány konkrét magasságra az alábbiakban adjuk meg:

$H$	50	100	200	m
$w$	1,79	0,89	0,45	$\text{Mp} \cdot \text{m}^{-3}$
$\mu$	370	185	92,5	—
$\omega_y$	0,96	0,68	0,48	$\text{rad} \cdot \text{sec}^{-1}$

Láthatjuk, hogy a (75)-nek megfelelő légműmér-súlyhoz  $\mu = 50$ -nél nagyobb tömeg-arányok tartoznak. A 7. ábra szerint 50-nél nagyobb  $\mu$  esetén  $v_{kr}$  a minimum-hely környezetében is  $\sqrt{\mu}$ -vel arányosan változik, a 6. ábra szerint viszont  $v_{kr}$  a minimum-hely környezetében gyakorlatilag nem függ  $\mu$ -tól, hanem mindig  $1,8 \omega_y b/2$  értékű. Mivel  $\mu = 50$ -hez (és  $r = 0,577 b/2$ -hez) a 7. ábrában  $v_{kr} \approx 4,6 \omega_y b/2$  tartozik, ennél nagyobb  $\mu$ -kre a következők szerint interpolálhatunk a 6. és 7. ábra között,  $\delta = 0,05$ -nek megfelelően:

$$v_{kr}^{siklap} \approx \omega_y \frac{b}{2} \left[ 1,8 + \left( \sqrt{\frac{\mu}{50}} 4,6 - 1,8 \right) \frac{1}{4} \right] = \omega_y \frac{b}{2} \left( 1,35 + 1,15 \sqrt{\frac{\mu}{50}} \right). \quad (76a)$$

(Amint a hidaknál, úgy itt is feltételezzük, hogy meg tudjuk valósítani a legkedvezőtlenebb  $\omega_{\theta}/\omega_y \approx 1,15$ -ös frekvencia-arányt. Ehhez olyan mag szükséges, amelynek  $GI_t$  csavarási merevsége elhanyagolható az  $EI_{\theta}$  öblösödési merevsége mellett, mert csak így kaphatjuk meg az elcsavarodó kihajlással szemben is a 4-szeres biztonságot [17].)

Behelyettesítjük (76a)-ba (18a)-t, (57)-et, (72b)-t és (71)-et. (Ily módon kiesik az  $N/N_{kr}$  arány, amiről úgy győződhetünk meg, hogy képletszerűen benne hagyjuk a kifejezésekben.) A kritikus sebességre így az alábbi kifejezést kapjuk:

$$v_{kr}^{siklap} = 6,21 \frac{b^2}{H \sqrt{m}} + 75,47 \frac{b}{H}. \quad (76b)$$

Akkor kapjuk tehát a legkisebb  $v_{kr}$ -t, ha kihasználjuk a megengedhető legnagyobb tömeget (74) szerint. Ezzel:

$$v_{kr}^{siklap} = (4,60 \sqrt{H} + 75,47) \frac{b}{H}, \quad (77a)$$

ill. az  $\eta = 0,8$ -as alaki szorzótényezővel:

$$v_{kr}^{magasház} = (3,68 \sqrt{H} + 60,38) \frac{b}{H}. \quad (77b)$$

A  $b/H$  arányt úgy kell felvennünk, hogy az épület felső végének elmozdulása a széles oldalára merőlegesen ható szélre ne legyen túlságosan nagy.

A felső pont  $f$  elmozdulása:

$$f = \frac{c p_t H^4 \psi}{8 E I_y} = \frac{1,2 \cdot 0,130 \cdot b H^4}{8 \cdot 9,10 b^2 H^2 0,75} = 0,00286 \frac{H^2}{b}. \quad (78)$$

Nézzünk most két esetet: a magasság 1/10-ének, ill. 1/20-ának megfelelő épületszélességet:

$$0,2 b/H = 1/10, \quad \text{ill. } 1/20,$$

Ekkor:  $b/H = 1/2, \quad \text{ill. } 1/4,$

és (78)-ból:  $f/H = 1/175, \quad \text{ill. } 1/87,5.$

A számértékek néhány épületmagasság esetére a következőképpen alakulnak:

	H = 50	100	200	m
b/H = 1/2	b = 25	50	100	m
	$v_{kr}^{magasház} = 43,2$	48,6	56,2	m. sec <sup>-1</sup>
	f = 0,29	0,57	1,14	m
b/H = 1/4	b = 12,5	25	50	m
	$v_{kr}^{magasház} = 21,6$	24,3	28,1	m. sec <sup>-1</sup>
	f = 0,57	1,14	2,29	m

Az  $f/H$  viszonyított elmozdulás csak a  $b/H = 1/2$  körüli karcsúságú épületek esetében marad a kívánatos  $H/200$  érték közelében. Ezeknek a kritikus sebessége viszont nagyobb a még esetleg előforduló 40 m/sec-nál. Csak ennél karcsúbb épületek lebeghetnének be, de ezeknek a statikus deformációja túlságosan nagy. Így az alakváltozás-korlátozási kritérium megtartása kiküszöböli a belebegési

veszélyt. Azt azonban nem állíthatjuk, hogy a magasházak soha, semmiféle körülmények között nem lebeghetnek be.

Megjegyezzük még, hogy a magasházak merevítőmagját a ferde szélből származó

$$M_{cs} \approx 0,1 p_1 b^2 H \quad (79)$$

nagyságú csavarónyomatéokra is méretezni kell [16].

Az eddig elmondottak központosan elhelyezett merevítőmag esetére vonatkoztak. *Külponatosan elhelyezett mag* esetében a jelenség még nincs ennyire tisztázva (vö. a 7.1. ponttal). A (49) szerinti kritikus sebességről (16. ábra) [16]-ban megmutattuk, hogy mindig nagyobb az előforduló szélsébségnél, de az (51) szerinti kritikus sebesség alapján még nem készült részletes vizsgálat. Így a külponatos maggal bíró magasház esete még további kutatást igényel.

### 8.3. A belebegés számításmódjainak áttekintése. Tisztázandó problémák

Az *elemi* (kvázi-stacionárius) *elmélet* nagy előnye, hogy csak álló keresztmetszen mért adatokat használ fel. Ezeket egyszerű mérésekkel megállapíthatjuk, sőt az irodalomban számos keresztmetszetre megtalálhatjuk a felhajtóerő ( $L$ ), ellenállás ( $D$ ) és nyomaték ( $M$ ) görbéit az állásszög függvényében [5], [24], [28]. Ezzel szemben az elemi elmélet csak a „magasabb” belebegési kritikus sebességet adja meg [az 5. ábrán a (20) szerinti, a 16. ábrán a (49) szerinti sebességet], így nem alkalmas a belebegési probléma tisztázására. Jól használható azonban a „táncolási” jelenség vizsgálatához [19], [12].

*Debreczeny eljárásának* nagy előnye, hogy jó közelítéssel megadja az „alacsonyabb” belebegési kritikus sebességet is [vö. a 8. ábrával és a 16. ábra (51) szerinti görbéivel], de még eléggé egyszerű ahhoz, hogy analitikusan kezelhessük. Viszont egy olyan mennyiségre van hozzá szükség, amelyet nem lehet álló keresztmetszeten végzett méréssel meghatározni: a  $\dot{\theta}$  szögsebességtől függő nyomaték-részre. E tag nagysága síklapra ismeretes. Más keresztmetszetekre vagy mozgó keresztmetszeten végzett méréssel, vagy esetleg bonyolult számítással [1] lehet meghatározni. Elképzelhető azonban, hogy más keresztmetszetek belebegésére [14]-hez hasonlóan „alaki szorzótényezőket” állapítsanak meg kísérlettel, s ez esetben elegendő lenne síklapra ismernünk az elméleti megoldást. Ilyen szorzótényezőkre volna szükség a magasház-keresztmetszetekhez, különös tekintettel a tömegsúlypontból kieső nyírasközéppont esetére.

Debreczeny eljárása síklapra a tömegsúlyponttal egybeeső nyírasközéppont esetében csupán az  $\omega_\theta \approx \omega_y$  frekvencia-arány környezetében nem eléggé pontos, bár — a biztonság javára — kisebb kritikus sebességet szolgáltat a pontosnál (vö. a 8. ábrával). Külponatos nyírasközéppont esetére ezért célszerű lenne az  $\omega_\theta \approx \omega_y$ , ill.  $\omega_\theta < \omega_y$  tartományban a pontos (Theodorsen-féle) elmélettel is számításokat végezni.

A *Theodorsen-elmélet* bonyolultsága miatt nem valószínű, hogy a síklaptól eltérő, bonyolultabb keresztmetszetekre elméleti megoldás szülessék. Sokkal járhatóbb a Klöppel és Thiele által követett út [14]: a síklapra kiszámított elméleti görbék és a különböző keresztmetszetekhez kísérlettel megállapított „alaki szorzótényezők” rendszere. Valószínű azonban, hogy a súlypontból kieső nyírasközépponttal bíró keresztmetszetek esetére külön ki kell számítani a hasonló jellegzetességgel bíró síklap elméleti görbéit, s csak ezekhez lehet „alaki szorzótényezőket” rendelni.

#### 8.4. A belebegési veszély elkerülése

Az eddig elmondottakból könnyen leszűrhetjük, hogy mit kell tennünk a belebegés elkerülésére.

A kritikus sebesség a következő tényezőktől függ:

- a keresztmetszet szélességétől ( $b$ ),
- a szerkezet folyómétersúlyától (amely a  $\mu$  tömeg/levegőtömeg-arányban szerepel),
- a szélirányra merőleges hajlítási saját(kör)frekvenciától ( $\omega_y$ ),
- a csavarási és a hajlítási saját(kör)frekvenciák arányától ( $\omega_\theta/\omega_y$ ),
- a nyírasközéppont és a tömegsúlypont relatív helyzetétől,
- végül kismértékben a csillapítástól is ( $\delta$ ).

A csillapítást általában nem tudjuk megváltoztatni, sőt többnyire a keresztmetszet szélességét és a szerkezet súlyát is megszabják a funkcionális és egyéb tervezési szempontok. Így elsősorban a hajlítási és a csavarási sajátfrekvencia nagyságát tudjuk szabályozni, mégpedig a tömegsúlyponttal egybeeső nyírasközéppont esetében a 8. ábrát figyelembe véve vagy úgy, hogy  $\omega_\theta \ll \omega_y$ , vagy pedig hogy  $\omega_\theta \gg \omega_y$  legyen. Az  $\omega_\theta \approx \omega_y$  eset adja általában a legkisebb  $v_{kr}$ -t, bár több keresztmetszet alaki szorzótényezője más  $\omega_\theta/\omega_y$ -arányokat is veszélyessé tehet. Persze,  $\omega_y$  megfelelően nagyra való megválasztásával az  $\omega_\theta \approx \omega_y$  esetben is kiküszöbölhetjük a belebegési veszélyt.

A tömegsúlypontból kieső nyírasközéppont esetét célszerű elkerülnünk. Ha pedig ez nem lehetséges, akkor a 7.1. pontban ismertetett számításmóddal kapható  $v_{kr}$  kellően nagy biztonsággal legyen nagyobb a még előforduló, 40 m/sec-ra tehető állandó szélesebségnél, a levezetés alapjául szolgáló Debreczeny-féle eljárásban rejló elhanyagolások miatt.

#### Irodalom

- [1] BISPLINGHOFF, R. L.—ASHLEY, H.—HALFMAN, R. L.: Aeroelasticity. Addison—Wesley Publ., Cambridge, Mass. 1955.
- [2] BLEICH, F.: Dynamic Instability of Truss-stiffened Suspension Bridges under Wind Action. Proc. ASCE, Vol. 74 (1948), October, 1269—1314.
- [3] CSELLÁR Ö.—HALÁSZ O.—RÉTI V.: Vékonyfalú acélszerkezetek. Budapest, Műszaki Könyvkiadó 1965.
- [4] DEBRECZENY E.: Ferde kábelsíkú, függőhíd rendszerű, merevítőtartós, acélszerkezetű csőhidak sajátlengésszámának meghatározása és aerodinamikai vizsgálata. Kandidátusi értekezés. Budapest, 1965.
- [5] DEBRECZENY E.: Függőhíd rendszerű, zárt szelvényű merevítőtartós, acélszerkezetű csőhidak aerodinamikai vizsgálata. Műszaki Tudomány 42 (1970), 257—277.
- [6] DEBRECZENY E.: Ferde kábelsíkú függőhíd függőleges sajátrezgésszámának meghatározása. Mélyépítéstudományi Szemle 15. (1965), 390—396.
- [7] DEN HARTOG, J. P.: Mechanical Vibrations. 4th Ed. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [8] DULÁCSKA E.: Vasbeton faltartók tervezési kérdései. Mélyépítéstudományi Szemle 16 (1966), 10. sz. 466—475.
- [9] FRANK, PH.—MISES, R. VON.: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei, I—II. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [10] FUNG, Y. C.: An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. Wiley, New York, 1955.
- [11] GRUBER J.—BLAHÓ M.: Folyadékok mechanikája. 7. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest. 1971.
- [12] JANKÓ L.: Kétszabadságfokú merev testek „táncolási” rezgését megindító legkisebb szélesebség meghatározása. Műszaki Tudomány (Megjelenés alatt).



- [13] KLÖPPEL, K.—WEBER, G.: Teilmodellversuche zur Beurteilung des aerodynamischen Verhaltens von Brücken. *Der Stahlbau* 32 (1963), 65—79, 113—121.
- [14] KLÖPPEL, K.—THIELE, F.: Modellversuche im Windkanal zur Bemessung von Brücken gegen die Gefahr winderregter Schwingungen. *Der Stahlbau* 36 (1967), 353—365.
- [15] KOLLÁR L.: Magas építmények rezgései a szél hatására. Mérnöktovábbképző Intézet, Budapest 1970.
- [16] KOLLÁR L.: Magas szerkezetek belebegési veszélye. *Mélyépítéstudományi Szemle* 26. (1976), 377—381.
- [17] KOLLÁR L.: Épületek merevítése elcsavarodó kihajlás ellen. *Magyar Építőipar* 1977. 3. sz. 150—154.
- [18] MÜLLENHOF: Der Entwurf von Brücken mit Rücksicht auf den Winddruck. *Die Bautechnik* 26 (1949), 57, 188, 282, 348, 380; és: 27 (1950), 164, 308.
- [19] NOVAK, M.: Aerodynamic Instability of Prismatic Bodies. *Proceedings of the Conference on Tower-shaped Structures*, The Hague, 1969. (Institute TNO, Delft.)
- [20] PALOTÁS L.: Mérnöki Kézikönyv III. kötet, Tartószerkezetek dinamikája c. fejezet. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1959.
- [21] RÁCZ E.—VARGA L.—VARGA L.: Repülőgépek szerkezete és rugalmassága. Tankönyvkiadó, Budapest, 1962.
- [22] SELBERG, A.: Oscillation and Aerodynamic Stability of Suspension Bridges. *Acta Polytechn. Scand. Ci* 13 (308/1961), Trondheim 1961.
- [23] STEINMANN, D. B.: Aerodynamische Theorie der Brückenschwingungen. *Der Bauingenieur* 26 (1951), 333—336. Diskussion: 364—365.
- [24] STEINMANN, D. B.: Suspension Bridges. *The Aerodynamic Problem and Its Solution*. Publ. IABSE 14 (1954).
- [25] SZMODITS K.: Útmutató panelépületek statikai tervezéséhez. Építéstudományi Intézet, Budapest, 1975.
- [26] TIMOSHENKO, S.—GERE, J.: *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [27] TIMOSHENKO, S.—YOUNG, D. H.: *Vibration Problems in Engineering*. 3rd Ed. D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, 1955.
- [28] ZILLER, F.: Über die Flatterschwingungen von Hängebrücken. *VDI Zeitschrift* Bd. 99. Nr. 10. (1957) 405—444.