GEOMETRIAI PROGRAMOZÁS

Klafszky Emil

BEVEZETÉS

A geometriai programozás mind elméleti érdekességénél, mind a gyakorlati felhasználás szempontjából a *matematikai programozás* rendkívül gyorsan fejlődő ága. Kialakulására döntő hatással volt egyrészt a kémiai egyensúly problémának matematikai programozásként való megfogalmazása, másrészt az a felismerés, hogy az elemi optimum számítási feladatoknál nagyon jó eszköznek bizonyuló számtani-mértani közép egyenlőtlenséget a matematikai programozási feladatra is eszközként használjuk. A geometriai programozás kifejlesztésében nagy szerepet játszott **Richard J. Duffin, Elmer L. Peterson** és **Clarence Zener** munkássága.

A dolgozatban a geometriai programozás elméletébe kívánok egy bevezetést nyújtani, s egyúttal a geometriai programozás dualitás problémakörét összefoglalni. Más felépítésmódoktól eltérően, a tárgyalásban a *Farkas*-tételre támaszkodom, s íly módon a szokásosnál egyszerűbb bizonyítás adható a dualitás-tételre. A geometriai programozás megoldó algoritmusainak tárgyalására, valamint a geometriai programozási modell alkalmazásaira itt nem térek ki, ezt egy következő dolgozatban szeretném összefoglalni. A dolgozat jelöléstechnikájában és felépítésmódjában *David Gale: "The Theory of Linear Economic Models"* c. könyvét követtem.

1. §. GEOMETRIAI EGYENLŐTLENSÉG

A geometriai programozás – mint speciális matematikai programozás – vizsgálatában fontos szerepet játszik a geometriai egyenlőtlenség. E miatt nevezik ezen speciális matematikai programozási feladatot geometriai programozásnak.

Az alábbi tételben kimondott egyenlőtlenséget nevezzük *geometriai egyenlőtlenségnek.*

A geometriai egyenlőtlenség a súlyozott számtani-mértani közép egy általánosabb alakja. Erre az általánosabb formára a teljesség miatt bizonyítást is adunk.

Tétel: *Ha* α_i, β_i $(i = 1,2,\dots,m)$ *tetszőleges nem-negativ számok, akkor*

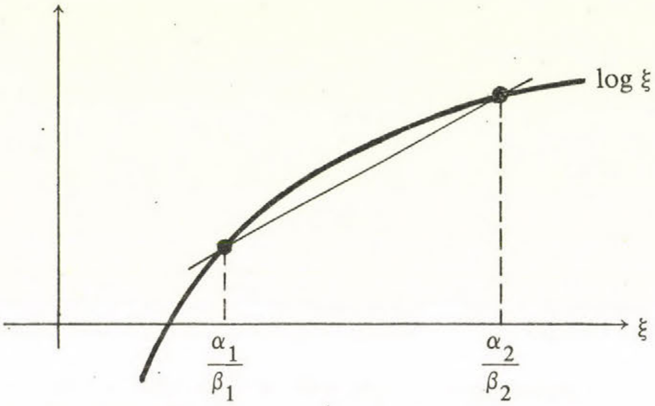
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum_{i=1}^{m}\beta_i}\right)^{\sum_{i=1}^{m}\beta_i} \geqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i}$$

ahol $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = 1$, *bármely* α, β *esetén.*

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, *minden* $i = 1,2,\ldots$
$\ldots, m$ *esetén.*

Bizonyítás: Először az $m = 2$ esetre igazoljuk. Feltehetjük, hogy $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, mert ellenkező esetben az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

A logaritmus függvény konkávitásából adódik, hogy



$$\log\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \geqslant \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\log\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\log\frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Ebből a logaritmus függvény monotonitása miatt azt kapjuk, hogy

$$\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\beta_2} \geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}.$$

azaz

$$\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{(\beta_1+\beta_2)} \geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

tehát ha

$$\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 .$$

Mindkét oldalhoz $\alpha_1\beta_1$ illetve $\alpha_2\beta_2$ értékeket hozzáadva kapjuk, hogy:

$$\alpha_1(\beta_1+\beta_2) = \beta_1(\alpha_1+\alpha_2),$$

és

$$\alpha_2(\beta_1+\beta_2) = \beta_2(\alpha_1+\alpha_2),$$

vagyis összefoglalva:

$$\alpha_i(\beta_1 + \beta_2) = \beta_i(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad (i = 1,2).$$

Tegyük fel most, hogy (m – 1)-re igaz az egyenlőtlenség, belátjuk, hogy akkor m-re is igaz.

Az indukcuós feltevés és az $m = 2$ eset felhasználásával a következőket kapjuk:

$$\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m)}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + (\beta_{m-1} + \beta_m)}\right)^{(\beta_1+\beta_2+\ldots+(\beta_{m-1}+\beta_m))} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}}\right)^{\beta_{m-2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{m-1} + \alpha_m}{\beta_{m-1} + \beta_m}\right)^{(\beta_{m-1}+\beta_m)} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\alpha_{m-2}}{\beta_{m-2}}\right)^{\beta_{m-2}} \cdot \left(\frac{\alpha_{m-1}}{\beta_{m-1}}\right)^{\beta_{m-1}} \cdot \left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{\beta_m}.$$

Az indukciós lépés, valamint az $m = 2$ eset vizsgálatából megállapíthatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha:

egyrészt az $m - 1$-es indukciós feltevésből

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m-2) \qquad \text{és} \\[2ex] (\alpha_{m-1} + \alpha_m) \sum_{i=1}^{m} \beta_i = (\beta_{m-1} + \beta_m) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,, \end{cases}$$

másrészt az $m = 2$ esetből

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_{m-1}(\beta_{m-1} + \beta_m) = \beta_{m-1}(\alpha_{m-1} + \alpha_m) \qquad \text{és} \\[2ex] \alpha_m(\beta_{m-1} + \beta_m) = \beta_m(\alpha_{m-1} + \alpha_m)\,. \end{cases}$$

Az (1) és (2) eseteket egybefoglalva; egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha_i \sum_{i=1}^{m} \beta_i = \beta_i \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \qquad \text{minden } i = 1,2,\ldots,m \text{ esetben.} \blacksquare$$

2. §. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ÉS FŐ LEMMÁJA

Legyen az $A = (a_i) = (a^{(j)}) = (\alpha_{ij})$ $m \times n$-es mátrix, valamint a $b = (\beta_j)$ n dimenziós vektor, a $c = (\gamma_i)$ pedig m dimenziós vektor. Legyen az $I = \{1,2,3,\ldots,m\}$ index halmaz az $I_1, I_2, \ldots, I_p$ diszjunkt index halmazokra particionálva. A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:.

$$
\begin{array}{c|c|c|cccc|c}
 & & & a^{(1)} & a^{(2)} & \cdots & a^{(n)} & c \\
\hline
 & 1 & & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \gamma_1 \\
 & 2 & \smash{\raise{0.8em}{I_1}} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \gamma_2 \\
I & \vdots & I_2 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & \vdots & & & & & \\
 & m & I_p & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \gamma_m \\
\hline
 & & b & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m
\end{array}
$$

Geometriai programozási feladatnak az alábbi *matematikai programozási* feladatot nevezzük:

PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $y = (\eta_j) \in R^{(n)}$ vektor, melyre

(1) $$by \quad \text{maximális}$$

feltéve, hogy

(2) $$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leqslant 1, \qquad (k = 1,2,\ldots,p).$$

DUÁL GEOMETRIAI PROGRAM: Meghatározandó azon $x = (\xi_i) \in R^{(m)}$ vektor, melyre

(3) $$xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \quad \text{minimális,}$$

feltéve, hogy

(4) $$\begin{cases} xA = b\,, \\ x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Azon $y \in R^{(n)}$ vektorok halmazát, melyek a (2) feltételt kielégítik, *primál feltételi halmaznak* nevezzük és $\mathscr{P}$ szimbólummal jelöljük. Hasonlóan a (4) feltételt kielégítő $x \in R^{(m)}$ vektorok halmazát *duál feltételi halmaznak* nevezzük és $\mathscr{D}$-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy a program (primál, vagy duál) *konzisztens,* ha a feltételi halmaza nem üres.

A geometriai programozási primál feladat elég tág matematikai programozási feladat, például az $I_1 = \{1\}, I_2 = \{2\}, \ldots, I_p = \{m\}$ speciális esetben a lineáris programozási feladatot adja. Az alábbi megjegyzésekben a geometriai programozási feladat más, szokásos megadási formáit mutatjuk meg.

1. **Megjegyzés:** Tekintsük az alábbi *matematikai programozási* feladatot:

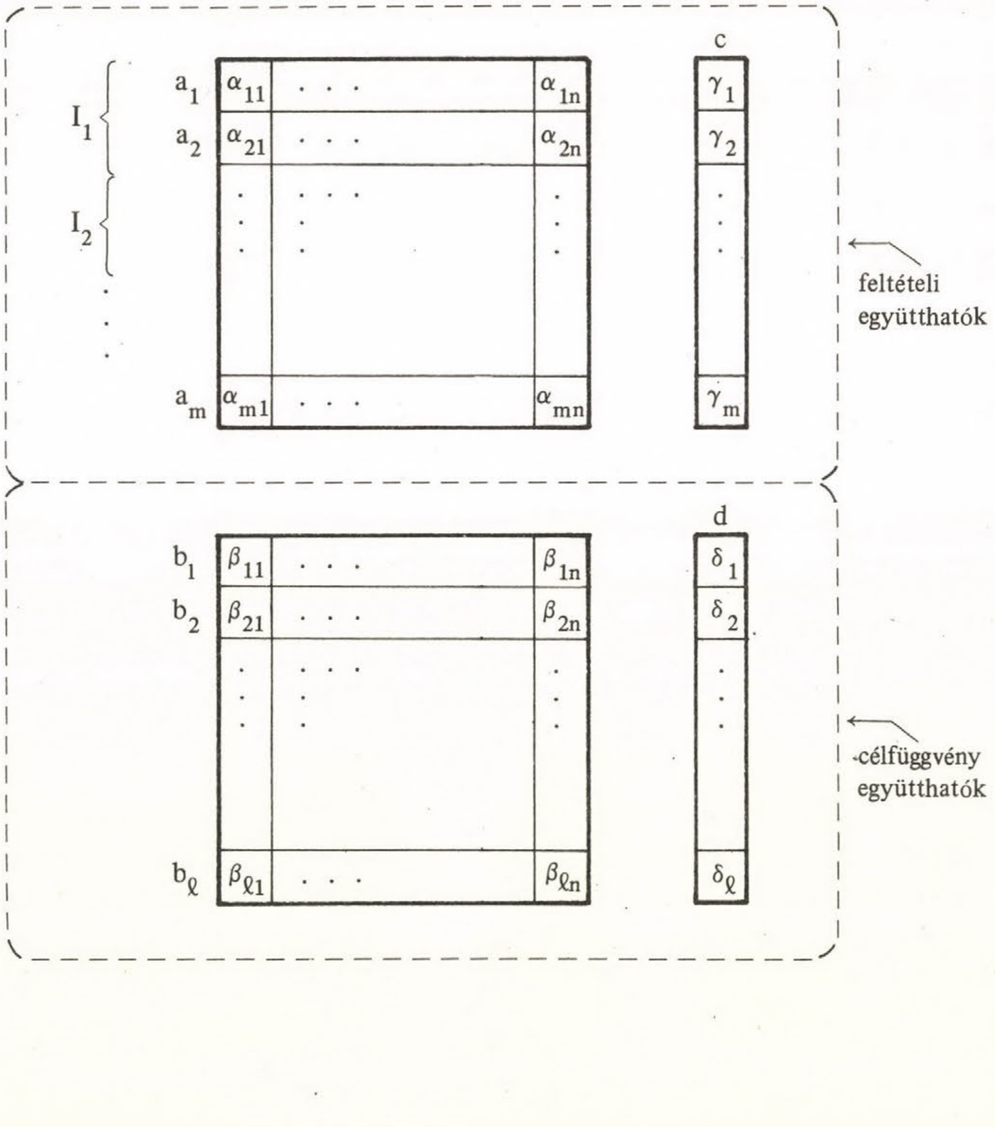
Meghatározandó azon $y \in R^{(n)}$ vektor, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{b_i y - \delta_i} \qquad \text{minimális,}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1, \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

A jelöléseket az alábbi sémán szemléltetjük:



Általában ezt a feladatot tekintik *geometriai programozásnak*. Megmutatjuk, hogy ez a feladat egyszerűen visszavezethető a fent definiált PRIMÁL GEOMETRIAI PROGRAM-ra.

A feladat nyilvánvalóan equivalens a következővel: keresendő azon $(y, \omega) \in R^{(n+1)}$ vektor, melyre

$$e^{-\omega} \quad \text{minimális}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leqslant 1, \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

és

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{b_i y - \delta_i} \leqslant e^{-\omega}.$$

De ezt írhatjuk a következőképp is:

$$(\overset{1}{\breve{0}}, 0, \ldots, \overset{n}{\breve{0}}, 1) \cdot (y, \omega) \qquad \text{maximalizálandó}$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i \in I_k} e^{(a_i, 0)(y, \omega) - \gamma_i} \leqslant 1, \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

és

$$\sum_{i=1}^{\ell} e^{(b_i, 1)(y, \omega) - \delta_i} \leqslant 1.$$

2. Megjegyzés: Az $e^{\eta_j} = \tau_j$, $e^{-\gamma_i} = \widetilde{\gamma}_i$, $e^{-\delta_i} = \widetilde{\delta}_i$ egy-egy értelmű transzformációval ($\eta_i = \ln\tau_i$, $\gamma_i = -\ln\widetilde{\gamma}_i$, $\delta_i = -\ln\widetilde{\delta}_i$) és most már a $\tau_i > 0$, $\widetilde{\gamma}_i > 0$, $\widetilde{\delta}_i > 0$ megkötéssel az 1. Megjegyzésnél adott modell a következő formát ölti:

a célfüggvény

$$\text{(5)} \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \widetilde{\delta}_i \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{\beta_{ij}},$$

a feltételi egyenlőtlenség

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i \in I_k} \widetilde{\gamma}_i \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{\alpha_{ij}} \leqslant 1, \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Az (5) és (6)-ban lévő függvényeket *pozinomnak* nevezzük. A geometriai programozás alkalmazásaiban a modell általában pozinomos formában van megfogalmazva.

A következő lemmában, a geometriai egyenlőtlenség alkalmazásával, egy alapvető összefüggést adunk a lehetséges megoldásokhoz tartozó célfüggvény értékekre. A lemma rávilágít a duálfeladat bevezetésének célszerűségére is. (Duffin-tól származik a "the main lemma of geometric programming" elnevezés).

Lemma: (a geometriai programozás fő lemmája):

Ha $y \in \mathcal{P}$ *és* $x \in \mathcal{D}$, *akkor*

$$\text{(7)} \qquad by \leqslant xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \,.$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\text{(8)} \qquad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i \,, \text{ minden } i \in I_k \text{ indexre } (k = 1, \dots, p) \,.$$

Bizonyítás: A (2) feltételi egyenlőtlenségre alkalmazva a geometriai egyenlőtlenséget a következőket kapjuk:

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} 1 &\geqslant \left(\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i}\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} \geqslant \prod_{i \in I_k} \left(\frac{e^{a_i y - \gamma_i}}{\xi_i}\right)^{\xi_i} \cdot \left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i} = \\ &= \frac{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}}{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \cdot e^{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i a_i y - \sum_{i \in I_k} \xi_i \gamma_i\right)} \,. \end{aligned}$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\text{(10)} \qquad \sum_{i \in I_k} \xi_i = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = 1$$

és

$$\text{(11)} \qquad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \,.$$

A (10) és (11)-et egybefoglalva:

$$\text{(12)} \qquad e^{a_i y - \gamma_i} \sum_{i \in I_k} \xi_i = \xi_i \,, \qquad (i \in I_k) \,.$$

A (9)-et $k = 1, \dots, p$ indexekre összeszorozva pedig a következőkhöz jutunk:

$$1 \geqslant \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}{\sum_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{\sum_{i\in I}\xi_i a_i y - \sum_{i\in I}\xi_i \gamma_i} = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{xAy - xc}$$

Az $xA = b$ teljesülése miatt pedig

$$1 \geqslant \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}} \right) \cdot e^{by - xc}$$

Ebből logaritmizálás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$by \leqslant xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}},$$

és ezzel a lemma első részét beláttuk, második része (12)-ből adódik. ∎

Következmény: Legyenek $\bar{y} \in \mathscr{P}$, $\bar{x} \in \mathscr{D}$ és $\bar{x} > 0$ olyanok, hogy (7) egyenlőséggel teljesül. Akkor tetszőleges $x \in \mathscr{D}$ esetén:

$$(13) \qquad b\bar{y} = xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \bar{\xi}_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \bar{\xi}_i\right)^{\sum_{i\in I_k}\xi_i}}.$$

Bizonyítás: Mivel $\bar{y}$, $\bar{x}$ vektorokra (8) fennáll, így azt minden i-re a ξ_i hatványra emelve és összeszorozva kapjuk (13)-at. ∎

3. §. A GEOMETRIAI PROGRAMOZÁSI FELADAT ALAPTULAJDONSÁGAI

Az alábbiakban a geometriai programozás néhány elemi tulajdonságát tárgyaljuk.

1. Lemma: *A $\mathscr{P}$ primál feltételi halmaz konvex.*

Bizonyítás: Legyen $y_1, y_2 \in \mathscr{P}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \mathscr{P}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Az exponenciális függvény konvexitása miatt

$$\lambda e^{a_i y_1} + (1-\lambda)e^{a_i y_2} \geqslant e^{\lambda a_i y_1 + (1-\lambda)a_i y_2}.$$

Megszorozva $e^{-\gamma_i}$-vel és összegezve $i \in I_k$-ra:

$$(1) \qquad \sum_{i\in I_k} (\lambda e^{a_i y_1 - \gamma_i} + (1-\lambda)e^{a_i y_2 - \gamma_i}) \geqslant \sum_{i\in I_k} e^{\lambda a_i y_1 + (1-\lambda)a_i y_2 - \gamma_i}$$

Mivel $y_1, y_2 \in \mathscr{P}$, ezért

$$(2) \qquad \sum_{i\in I_k} (\lambda e^{a_i y_1 - \gamma_i} + (1-\lambda)e^{a_i y_2 - \gamma_i}) \leqslant 1 .$$

Az (1) és (2) összevetésből

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - \gamma_i} \leqslant 1 ,$$

azaz $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \mathscr{P}$. ∎

2. Lemma: *A duál feladat*

$$\varphi(x) = xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{(\sum_{i\in I_k} \xi_i)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} , \qquad (x \geqslant 0)$$

célfüggvényére fennáll

a) $\varphi(0) = 0$,

b) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, *ha* $\lambda \geqslant 0$,

c) $\varphi(x + \bar{x}) \leqslant \varphi(x) + \varphi(\bar{x})$,

azaz pozitív-homogén konvex függvény.

Bizonyítás: Az a) rész triviális. A b) rész egyszerű számolással adódik:

$$\ln \frac{\Pi(\lambda\xi_i)^{\lambda\xi_i}}{(\Sigma(\lambda\xi_i))^{\Sigma\lambda\xi_i}} = \ln \frac{\Pi\lambda^{\lambda\xi_i} \cdot \Pi\xi_i^{\lambda\xi_i}}{(\lambda\Sigma\xi_i)^{\lambda\Sigma\xi_i}} = \ln \frac{\lambda^{\lambda\Sigma\xi_i}(\Pi\xi_i^{\xi_i})^{\lambda}}{\lambda^{\lambda\Sigma\xi_i}((\Sigma\xi_i)^{\Sigma\xi_i})^{\lambda}} = \lambda \ln \frac{\Pi\xi_i^{\xi_i}}{(\Sigma\xi_i)^{\Sigma\xi_i}} .$$

A c) rész belátásához azt kell megmutatni, hogy

$$\ln \frac{\Pi(\xi_i + \bar{\xi}_i)^{\xi_i + \bar{\xi}_i}}{(\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i))^{\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i)}} \leqslant \ln \frac{\Pi\xi_i^{\xi_i}}{(\Sigma\xi_i)^{\Sigma\xi_i}} + \ln \frac{\Pi\bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{(\Sigma\bar{\xi}_i)^{\Sigma\bar{\xi}_i}} ,$$

vagy a logaritmus függvény monotonitása miatt azt, hogy

$$(3) \qquad \frac{\Pi(\xi_i + \bar{\xi}_i)^{\xi_i + \bar{\xi}_i}}{(\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i))^{\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i)}} \leqslant \frac{\Pi\xi_i^{\xi_i} \cdot \Pi\bar{\xi}_i^{\bar{\xi}_i}}{(\Sigma\xi_i)^{\Sigma\xi_i} \cdot (\Sigma\bar{\xi}_i)^{\Sigma\bar{\xi}_i}} .$$

Alkalmazzuk a geometriai egyenlőtlenséget

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \xi_i$$

megválasztásával, ekkor azt kapjuk, hogy

$$(4) \qquad \left(\frac{\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i)}{\Sigma \xi_i}\right)^{\Sigma \xi_i} \geqslant \Pi \left(\frac{\xi_i + \bar{\xi}_i}{\xi_i}\right)^{\xi_i},$$

majd pedig az

$$\alpha_i = \xi_i + \bar{\xi}_i \quad \text{és} \quad \beta_i = \bar{\xi}_i$$

választásokkal a következőhöz jutunk:

$$(5) \qquad \left(\frac{\Sigma(\xi_i + \bar{\xi}_i)}{\Sigma \bar{\xi}_i}\right)^{\Sigma \bar{\xi}_i} \geqslant \Pi \left(\frac{\xi_i + \bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_i}\right)^{\bar{\xi}_i}.$$

A (4) és (5) összeszorzásából végül is kapjuk a (3) egyenlőtlenséget. ∎

3. Lemma: a) *Ha* $y \in \mathscr{P}$ *és valamely* $\bar{y}$ *vektorra* $A\bar{y} \leqslant 0$, *akkor tetszőleges* $\vartheta \geqslant 0$ *számra* $(y + \vartheta \bar{y}) \in \mathscr{P}$.

b) *Ha* $y \in \mathscr{P}$, *akkor* $Ay \leqslant c$.

Bizonyítás: a) Mivel $e^{a_i \bar{y}} \leqslant 1$, ezért

$$1 \geqslant \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geqslant \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} = \Sigma\, e^{a_i (y + \vartheta \bar{y}) - \gamma_i},$$

tehát $(y + \vartheta \bar{y}) \in \mathscr{P}$.

b) A feltételi egyenlőtlenségekből:

$$1 \geqslant \sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \geqslant e^{a_i y - \gamma_i}$$

és így

$$a_i y - \gamma_i \leqslant 0 \qquad \text{minden } i \in I\text{-re.} \; ∎$$

A 3. lemmából azonnal adódnak az alábbi következmények:

1. Következmény: a) Ha a $\mathscr{P}$ halmaz nem üres, akkor korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A matrix sorvektorai által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.

b) Ha a $\mathscr{P}$ nem üres halmaz korlátos, akkor $xA = 0$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása.

c) Ha $\mathscr{P}$ nem üres, korlátos halmaz és $\mathscr{D}$ nem üres halmaz, akkor $\mathscr{D}$ nem korlátos.

Bizonyítás: a) A 3. lemmából nyilvánvaló, hogy a nem üres $\mathscr{P}$ feltételi halmaz korlátosságára szükséges és elégséges feltétel az, hogy az $Ay \leq 0$ egyenlőtlenségnek ne legyen az $y \equiv \equiv 0$ triviális megoldástól különböző megoldása. Jelöljük $\mathscr{C}_A$-val, az A mátrix sorvektorai által kifeszített kúpot, akkor $\mathscr{C}_A^*$ duális kúp adja az $Ay \leq 0$ egyenlőtlenség megoldásainak összeségét. De $\mathscr{C}_A^*$ akkor és csak akkor a zérus elem, ha $\mathscr{C}_A$ az egész tér.

b) Az a) miatt $\mathscr{C}_A$ az egész tér, és így léteznek olyan $\bar{\xi}_i \geq 0$ skalárok, hogy

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i a_i .$$

Ebből pedig átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} (1 + \bar{\xi}_i) a_i = 0 ,$$

tehát a $\xi_i = 1 + \bar{\xi}_i$ megoldás kielégíti b)-t.

c) A b)-ből nyilvánvaló. ∎

A lemmából levonható további következményekhez szükségünk van az alábbi fogalomra:

Definició: $\mathscr{P}_\omega$ felsőnívóhalmaznak nevezzük a $\mathscr{P}$ halmaz azon részhalmazát, ahol $by \geq \omega$.

2. Következmény: a) A nem üres $\mathscr{P}_\omega$ halmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az A mátrix sorvektorai és a $-b$ vektor által generált kúp kiadja az egész $R^{(n)}$ teret.

b) Ha $\mathscr{P}_\omega$ korlátos, akkor az $xA = b$ egyenletnek van $x > 0$ megoldása.

Bizonyítás: A $\mathscr{P}_\omega$ felsőnívóhalmaz a

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1 , \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

$$e^{-by + \omega} \leq 1 ,$$

feltételi halmaz. Erre alkalmazzuk az 1. következményt. ∎

4. §. A PRIMÁL CÉLFÜGGVÉNY KORLÁTOSSÁGÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE

Az alábbi tétel, amely a primálfüggvény szuprémumának végességére ad szükséges és elégséges feltételt, fontos szerepet játszik a geometriai programozás dualitási tételénél.

Tétel: *A konzisztens primál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a duál feladat konzisztens.*

Bizonyítás: Ha a duál feladat konzisztens, akkor van olyan $\bar{x} \geqslant 0$, hogy

$$\bar{x}A = b\,. \tag{1}$$

A 3. lemma b) szerint bármely $y \in \mathscr{P}$ esetén

$$Ay \leqslant c\,. \tag{2}$$

Megszorozva a (2) egyenlőtlenséget $\bar{x}$-vel, és felhasználva (1)-et kapjuk, hogy:

$$\bar{x}\,Ay \leqslant \bar{x}c\,,$$

$$by \leqslant \bar{x}c \qquad \text{minden } y \in \mathscr{P} \text{ esetén,}$$

tehát by felülről korlátos.

Fordítva, ha a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása, akkor a Farkas-lemma szerint van olyan $\bar{y}$, hogy

$$A\bar{y} \leqslant 0\,,$$

$$b\bar{y} > 0\,.$$

Ha $y \in \mathscr{P}$, akkor 3. lemma a) miatt $y + \vartheta\bar{y} \in \mathscr{P}$, $(\vartheta \geqslant 0)$. De ezen lehetséges megoldásra a célfüggvény értéke:

$$b(y + \vartheta\bar{y}) = by + \vartheta b\bar{y} \to \infty, \quad \text{ha} \quad \vartheta \to \infty\,. \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a tétel egyik iránya – "ha a duál konzisztens, akkor a primál célfüggvény felülről korlátos" – a geometriai programozás fő lemmájából is nyilvánvaló.

A tételből a 3. fej. 1. a) következményének egy élesítését nyerhetjük, amely a geometriai programozás pozinomos formájában lehet érdekes.

1. Következmény: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathscr{P}$ minden koordinátájában felülről korlátos legyen az, hogy az A mátrix sorvektorai által generált kúp a pozitív ortánst tartalmazza (pozinom formában y felső korlátossága azt jelenti, hogy $t = (\tau_j)$ lehetséges vektorok halmaza korlátos).

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $y \in \mathscr{P}$ minden koordinátájában alulról korlátos legyen az, hogy az A matrix sorvektorai által generált kúp a negatív ortánst tartalmazza (pozinom formában ez azt jelenti, hogy t lehetséges vektorok halmaza zárt).

Bizonyítás: a) Az $y \in \mathscr{P}$ vektor η_j koordinátájában akkor és csak akkor korlátos felülről, ha a megoldáshalmazon az $u_j y$ célfüggvény korlátos, azaz a tétel szerint van megoldása az $xA = u_j$, $x \geqslant 0$ rendszernek. $(u_j = (0,0,\ldots,\overset{j}{1},\ldots,0))$

b) A bizonyítás analóg az a) résszel, $-u_j y$ célfüggvénnyel. $\blacksquare$

Az alábbi következmény a $\mathscr{P}$ és $\mathscr{D}$ halmazok közt ad egy kapcsolatot.

2. Következmény: a) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a nem üres $\mathscr{P}$ halmazon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag, mint célfüggvény zérustól el legyen választva az, hogy az $xA = 0$, $x \geqslant 0$ egyenletnek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

(A "zérustól való elválasztás" azt jelenti, hogy van olyan $\epsilon > 0$, hogy $e^{a_i y - \gamma_i} \geqslant \epsilon$, ha $y \in \mathscr{P}$.)

b) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely nem üres $\mathscr{P}_\omega$ nívóhalamzon az $e^{a_i y - \gamma_i}$ tag zérustól el legyen választva az, hogy az $xA - \vartheta b = 0$, $x \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$ rendszernek legyen $\xi_i > 0$ megoldása.

Bizonyítás: a) Az $e^{a_i y - \gamma_i}$ akkor és csak akkor van zérustól elválasztva, ha $-a_i y$ felülről korlátos, de a tétel szerint ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy legyen megoldása az $xA = -a_i$, $x \geqslant 0$ rendszernek, ez azonban equivalens azzal, hogy legyen $\xi_i > 0$ megoldása $xA = 0$, $x \geqslant 0$ rendszernek.

b) Az a) rész alkalmazása a $\mathscr{P}_\omega$ felsőnívóhalmazra. ∎

5. §. KANONIKUS FELADAT.

A *kanonikus geometriai programozási* feladat a geometriai programozás elméletében, a megoldó algoritmusokban és számos alkalmazásnál döntő szerepet játszik.

Definició: *Kanonikusnak* nevezzük a geometriai programozási feladatpárt, ha a duálfeladatnak van minden koordinátájában pozitív lehetséges megoldása.

Az alábbi lemma, amely a konvex függvényekre vonatkozó Farkas-tétel* egy adaptációja, alapvető a kanonikus feladat tárgyalásában.

Lemma: *Ha* $xA = 0$ *egyenletnek van* $x > 0$ *megoldása, és minden* $x \geqslant 0$ *megoldásra*

$$xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} \geqslant 0 ,$$

akkor van olyan $\bar{y}$, *hogy*

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i \bar{y} - \gamma_i} \leqslant 1 , \quad (k = 1, \ldots , p) .$$

Bizonyítás: A Farkas-tétel szerint a feltétel fennállása esetén léteznek olyan $\bar{\eta}_1, \ldots , \bar{\eta}_n$

*Lásd pl. Stoer-Witzgall [42]

számok, hogy

$$(1) \qquad xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} \geqslant \sum_{j=1}^{n} xa^{(j)}\bar{\eta}_j, \quad \text{minden } x \geqslant 0 \text{ esetén.}$$

Rögzítsünk egy k_0 indexet. Legyen ezen rögzített index mellett:

$$\xi_i^* = \begin{cases} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}, & \text{ha } i \in I_{k_0} \\ 0, & \text{ha } i \notin I_{k_0}. \end{cases}$$

A ξ_i^* értékét, az $i \notin I_{k_0}$ esetben, (1)-be helyettesítve:

$$\sum_{i\in I_{k_0}} \xi_i^* (a_i\bar{y} - \gamma_i) \leqslant \sum_{i\in I_{k_0}} \xi_i^* \ln \xi_i^* - \ln \left(\sum_{i\in I_{k_0}} \xi_i^*\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} \xi_i^*}$$

Behelyettesítve ξ_i^* értékét $i \in I_{k_0}$ esetre is:

$$\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}(a_i\bar{y} - \gamma_i) \leqslant \sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}(a_i\bar{y} - \gamma_i) - \ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}}$$

Ebből

$$\ln\left(\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}\right)^{\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i}} \leqslant 0,$$

azaz

$$\sum_{i\in I_{k_0}} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i} \leqslant 1, \qquad \text{tetszőleges } k_0\text{-ra.} \blacksquare$$

Tétel: *Ha a kanonikus geometriai programozási duálfeladat célfüggvénye alulról korlátos, akkor a primál feladat konzisztens és a célfüggvény felveszi maximumát a feltételi halmaz valamely* $\bar{y}$ *pontjában és*

$$b\bar{y} = \inf_{x\in\mathscr{D}} \left\{ xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}} \right\}.$$

Bizonyítás: Jelölje $\varphi(x)$ a duálfeladat célfüggvényét, azaz

$$\varphi(x) = xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i\in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i\in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i\in I_k} \xi_i}},$$

legyen továbbá

$$\mu = \inf_{x \in \mathscr{D}} \varphi(x) .$$

Az előző lemmát az alábbi

$$(2) \qquad xA + \xi_0(-b) = 0, \quad x \geqslant 0 , \quad \xi_0 \geqslant 0 ,$$

feltételi egyenletre és a

$$(3) \qquad \tilde{\varphi}(x, \xi_0) = xc + \sum_{k=1}^{p} \ln \frac{\prod_{i \in I_k} \xi_i^{\xi_i}}{\left(\sum_{i \in I_k} \xi_i\right)^{\sum_{i \in I_k} \xi_i}} + \xi_0(-\mu)$$

függvényre alkalmazzuk.

A lemma alkalmazható, mert a (2) egyenletnek van $x > 0$, $\xi_0 > 0$ megoldása, és a (3) függvény a (2) feltételnek eleget tevő helyen nem-negatív. Ha ugyanis negatív lenne, azaz

$$(4) \qquad \tilde{\varphi}(\bar{x}, \bar{\xi}_0) < 0 ,$$

akkor a következő két eset fordulna elő:

a) Ha $\bar{\xi}_0 = 0$. Akkor $\bar{x}A = 0$, és ha $x \in \mathscr{D}$, akkor $x + \vartheta\bar{x} \in \mathscr{D}$, bármely $\vartheta \geqslant 0$ esetén. Ezen megoldáshoz tartozó célfüggvényre, felhasználva 3.§. 2 lemmát:

$$\varphi(x + \vartheta\bar{x}) \leqslant \varphi(x) + \vartheta\varphi(\bar{x}) = \varphi(x) + \vartheta\tilde{\varphi}(\bar{x}, 0) \to -\infty ,$$

ellentétben azzal, hogy φ alulról korlátos.

b) Ha $\bar{\xi}_0 > 0$. Legyen ekkor $\xi_i = \dfrac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}$, $(i = 1, \ldots, m)$. A (2) és (3)-ből az így definiált x-re

$$xA = b ,$$

és

$$\varphi(x) < \mu ,$$

amely ellentétes μ definiciójával.

Mivel a lemma feltételei teljesülnek, ezért létezik olyan $\bar{y}$, hogy

$$(5) \qquad \sum_{i \in I_k} e^{a_i\bar{y} - \gamma_i} \leqslant 1, \quad (k = 1, \ldots, p)$$

és

$$(6) \qquad e^{-b\bar{y} + \mu} \leqslant 1 .$$

Az (5) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $\bar{y} \in \mathscr{P}$. A (6) egyenlőtlenségből pedig azt kapjuk, hogy

(7) $$\mu \leqslant b\bar{y} .$$

Összevetve ezt a geometriai programozás fő lemmájával, végül is

$$\mu = b\bar{y} ,$$

amit bizonyítani akartunk. ∎

Következmény: Ha a kanonikus geometriai programozási primál feladat konzisztens, akkor a célfüggvény felveszi maximumát a primál feltételi halmaz valamely $\bar{y}$ pontjában.

Bizonyítás: Ha a primál feladat konzisztens, akkor a főlemma szerint a duál célfüggvény korlátos, és így a tételből adódik a következmény állítása. ∎

Megjegyzés: A geometriai programozás fő lemmájából adódik, hogy a duálcélfüggvény alsó korlátosságára elégséges feltétel, hogy a primál feladat konzisztens legyen. Könnyen látható, hogy az nem szükséges feltétel. Azonban a fenti tételt figyelembevéve, a kanonikus feladatra a 4. §. tételéhez hasonló tételhez jutunk: *a kanonikus duál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor korlátos alulról, ha a primál feladat konzisztens.*

6. §. REDUKÁLT FELADAT.

Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy a $\mathscr{D}$ duál feltételi halmaz nem üres. Jelöljük I^*-al azon $i \in I$ indexek halmazát, melyre van olyan $x \geqslant 0$ lehetséges megoldása $xA = b$ feltételi halmaznak, hogy $\xi_i > 0$. A geometriai programozási feladatot *redukáljuk* úgy, hogy csak az $i \in I^*$ tagokat hagyjuk meg. A redukált feladat kanonikus feladat. Nyilvánvaló, hogy a duál feladat és a redukált duálfeladat közt teljes equivalencia van. Azaz a redukált duálfeladat egy lehetséges megoldása zérusokkal kiegészítve az eredeti lehetséges megoldása és fordítva is az eredeti egy lehetséges megoldása a redukciónak megfelelő zérus koordináták elhagyásával a redukált egy megoldása és a célfüggvények értékei megegyeznek. Látni fogjuk, hogy a primál és a redukált primál feladat közt is fennáll egy "gyengébb equivalencia", nevezetesen az, hogy ha y^* a redukált egy lehetséges megoldása, akkor van olyan y lehetséges megoldása az eredeti primálnak, melyre a két célfüggvényérték tetszőleges kicsit tér el egymástól. Mielőtt ezt tételben pontosan kimondanánk, egy lemmát bizonyítunk, amely voltaképpen a Farkas-lemmának rendszerre való általánosítása, és a Tucker-féle komplementaritási tételek egyike. A teljesség kedvéért ezt itt a Farkas-lemma felhasználásával be is bizonyítjuk.

Tekintsük az

(1) $$\begin{cases} xA = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Legyen I_+: azon i indexek halmaza, melyre van olyan $x \geqslant 0$, hogy $xA = 0$ és $\xi_i > 0$.

I_- : azon i indexek halmaza, melyre van olyan y, hogy $Ay \leqslant 0$ és $a_i y < 0$.

Lemma: *A fent definiált* I_+ *és* I_- *index halmazokra:*

a) $I_+ \cap I_- = \phi$,

b) $I_+ \cup I_- = I$.

Bizonyítás: Az (1) y-al való szorzásából adódó

$$0 = xAy = \sum_{i=1}^{m} \xi_i a_i y$$

összefüggésből a) rész nyilvánvaló.

A b) rész igazolásához tegyük fel, hogy $i_0 \notin I_+$, ez azt jelenti, hogy a

$$-a_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \xi_i a_i$$

egyenletnek nincs $x \geqslant 0$ megoldása. De akkor a Farkas-lemma szerint van olyan y, hogy

$$a_i y \leqslant 0, \quad i \neq i_0,$$

$$-a_{i_0} y > 0,$$

azaz $Ay \leqslant 0$ és $a_{i_0} y < 0$, tehát $i_0 \in I_-$. ∎

Következmény: Ha I^* az i indexek azon legbővebb halmaza, melyre $xA = b$, $x \geqslant 0$ feltételi halmaznak van $\xi_i > 0$ megoldása, akkor van olyan $\bar{y}$, hogy

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} b\bar{y} = 0, & \\ a_i \bar{y} = 0, & \text{ha } i \in I^*, \\ a_i \bar{y} < 0, & \text{ha } i \notin I^*. \end{cases}$$

Bizonyítás: A lemmából, az $xA + \xi_0(-b) = 0$ egyenletre alkalmazva, nyilvánvaló. ∎

Tétel. *Legyen a geometriai programozási feladat olyan, hogy* $\mathscr{P}$ *és* $\mathscr{D}$ *feltételi halmazok nem üresek. Jelölje* $\mathscr{P}^*$ *a redukált primál feladat feltételi halmazát, ekkor bármely* $y^* \in \mathscr{P}^*$ *és tetszőleges* $\epsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $y \in \mathscr{P}$, *hogy* $|by - by^*| \leqslant \epsilon$.

Bizonyítás: Legyen y_0 a feltevés szerint nem üres $\mathscr{P}$ halmaz egy rögzített eleme, az y^* pedig $\mathscr{P}^*$ rögzített eleme. Ha $y_0 \equiv y^*$, vagy $b \equiv 0$, akkor készen vagyunk. Egyébként válasszuk δ számot a következőképp:

$$0 < \delta \leqslant \max\left(\frac{\epsilon}{\|b\| \cdot \|y_0 - y^*\|}, 1\right).$$

Legyen

$$y = \delta y_0 + (1 - \delta)y^* + \vartheta \bar{y},$$

ahol $\bar{y}$ a következmény (2) szerint biztosított, rögzített vektor, a δ számot pedig később fogjuk alkalmasan megválasztani, úgy, hogy $y \in \mathscr{P}$ legyen. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$|by - by^*| = |b(\delta y_0 + (1 - \delta)y^* + \vartheta\bar{y} - y^*)| =$$
$$= |b(y_0 - y^*)|\delta \leqslant \delta\|b\| \cdot \|y_0 - y^*\| \leqslant \epsilon .$$

Meg kell még mutatni, hogy δ választásával elérhető, hogy $y \in \mathscr{P}$ teljesül. Vizsgáljuk a k-adik feltételt:

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} +$$
$$+ \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} .$$

Három eset lehetséges:

a) Ha $I_k \cap \bar{I}^* = \phi$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} \leqslant 1,$$

ugyanis $y_0 \in \mathscr{P}^*$ és $\mathscr{P}^*$ konvexitása miatt $(\delta y_0 + (1 - \delta)y^*) \in \mathscr{P}^*$.

b) Ha $I_k \cap I^* = \phi$, akkor

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i \in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} \cdot e^{\vartheta a_i \bar{y}} \leqslant 1,$$

ugyanis $a_i\bar{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető.

c) Ha $I_k \cap \bar{I}^* \neq \phi$ és $I_k \cap I^* \neq \phi$, akkor

$$\sum_{i\in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} = \sum_{i\in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} +$$

$$+ \sum_{i\in I_k \cap \bar{I}^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} e^{\vartheta a_i \bar{y}} \leq 1 .$$

ugyanis, mivel $I_k \cap \bar{I}^* \neq \phi$, ezért $\sum_{i\in I_k \cap I^*} e^{a_i y_0 - \gamma_i} < 1$, és $\delta > 0$ miatt

$$\sum_{i\in I_k \cap I^*} e^{a_i(\delta y_0 + (1-\delta)y^*) - \gamma_i} < 1 ,$$

Igy $a_i \bar{y} < 0$ miatt ϑ elég nagyra választásával elérhető. ∎

A tételből azonnal adódik a következő fontos állítás:

Következmény:

$$\sup_{a\in\mathscr{P}} by = \sup_{y\in\mathscr{P}^*} by .$$

Bizonyítás: Mivel $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}^*$, ezért

$$\sup_{y\in\mathscr{P}} by \leq \sup_{y\in\mathscr{P}^*} by ,$$

de egyenlőtlenség a tétel alapján nem állhat fenn. ∎

7. §. DUALITÁSI TÉTEL

Az eddigi vizsgálatokból egyszerűen nyerhető a geometriai programozás dualitási tétele.

Tétel: a) *Ha a primál- és a duálfeladat konzisztens, akkor a primál célfüggvény szuprémuma megegyezik a duál célfüggvény infinumával.*

b) *Ha a primál feladat konzisztens és véges szuprémuma van, akkor a duál is konzisztens és a primál szuprémum a duál infinummal megegyezik.*

Bizonyítás: a) A geometriai programozás fő lemmájából, a kanonikus feladat és a redukált feladat alaptételéből azonnal adódik.

b) A primál célfüggvény korlátosságának szükséges és elégséges feltételéből, valamint az a) részből adódik. ∎

Megjegyzés: Abból, hogy a duálfeladat konzisztens és véges infinuma van, nem következik még a primál feladat konzisztenciája. Azonban a redukált feladat alaptételét és annak bizonyítását, valamint a kanonikus feladat alaptételét figyelembevéve egy gyengébb, úgynevezett *szubkonzisztenciát* tudunk biztosítani:

Ha a duálfeladat konzisztens és a célfüggvényének véges μ *infinuma van, akkor tetszőleges* $\epsilon > 0$ *esetén a módosított*

$$\sum_{i \in I_k} e^{a_i y - \gamma_i} \leq 1 + \epsilon \, , \quad (k = 1, \ldots, p)$$

feladat konzisztens és

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{y \in \mathscr{P}_\epsilon} by = \mu \, .$$

A geometriai programozás dualitás tétele nemcsak elméleti szempontból jelentős, hanem a primál-duál feladatpárt megoldó iteratív eljárás esetén tájékoztatást ad az iteráció pontosságáról.

IRODALOM

A keverék kémiai egyensúly egyenletét, egy matematikai programozási feladatként, formulázta meg White – S.M. Johnson – Dantzig [44]. Ez a modell lényegében a geometriai programozási duál feladat, ahol a célfüggvény a keverék szabad energiája (Gibbs [22]).

Ezt követően Dantzig – White – S.M. Johnson [11] dolgozatukban a célfüggvényt szakaszonkénti lineáris függvénnyel közelítve egy megoldási algoritmust javasolnak a feladatra. A kémiai egyensúly duálfeladatát, a tulajdonképpeni geometriai programozási primál feladatot adja Clasen [7], s egyúttal egy numerikus megoldási algoritmust javasol a kémiai egyensúly megoldására. A geometriai programozás duál feladatát, mint a kémiai egyensúly matematikai modelljét tárgyalja Shapiro [39], Shapiro – Shapley [40, 41] s úgyszintén ez a feladat a kiinduló probléma Dantzig – Folkman – Shapiro [10] dolgozatának is.

A másik oldalról, – egyenlőtlenségek (geometriai egyenlőtlenség) felhasználása matematikai programozási feladatokban – R.C. Johnson [25], Fein [19], Zener [48], Charnes – Cooper [8] Duffin [13], Sherwood [43] munkáiban található. Ezt a gondolatot fejlesztette továbbá Zener [49, 50, 51] Duffin [12] Duffin – Peterson [16], Duffin – Zener [18].

1966-ban megjelent az addigi eredmények összefoglalása Duffin – Peterson – Zener [17] könyve. A könyv tárgyalja a geometriai programozást és dualitási problémakörét, a geometriai programozás alkalmazását, és a geometriai programozás kiterjesztését. A könyvet követően jelent meg Duffin – Peterson [15] dolgozata, amely a geometriai programozás dualitási tételére, a könyvben szereplő tárgyalásnál egyszerűbb bizonyítást ad. Duffin [14] dolgozatában újra viszszatér a dualitási tételnek egy más, a lineáris programozás dualitás-tételét felhasználó bizonyítására. Avriel – Williams [5] dolgozatában a primál-duál feltételi halmazokkal kapcsolatos vizsgálatokat végez. Ez a dolgozat adta számomra a gondolatot, hogy a dualitási tételhez, a duálfeladat irányából a Farkas-tétel felhasználásával közelítsek. Ily módon a dualitási problémakör egyszerűbben tárgyalható. A geometriai programozás számos alkalmazását mutatja be Duffin – Peterson – Zener [17] könyve. További alkalmazások találhatók Wilde [45] és Wilde – Beightler [46] munkáiban, a [17] könyvet követően újabb műszaki alkalmazásokat Avriel – Wilde [1, 3], és a gazdasági alkalmazást Gale [21] dolgozatai ismertetnek.

Az utóbbi időszak geometriai programozás kutatási eredményeit három főbb csoportba foglalhatjuk össze (a., b., c.,).

a) "Előjeles geometriai programozás" vagy "általánosított polinom programozás" vizsgálatával foglalkoznak Avriel – Williams [4], Blau – Wilde [6] és Passy – Wilde [31, 32] dolgozatai.

a) A "kiterjesztett geometriai programozás" alapgondolata az, hogy a matematikai programozásban a súlyozott számtani-mértani közép mintájára a súlyozott Hölder-egyenlőtlenséget (lásd. pl. [23]) használja. Ezzel a modellel Duffin – Peterson – Zener könyve is foglalkozik, azonban részletesebb kidolgozása Peterson – Ecker [34, 35, 36, 37, 38], Peterson [33] és Passy [30] munkáiban található.

c) A "Sztochasztikus geometriai programozás"-nak mintegy előzetese Mangasarian – Rosan [28] és Lieu [27] munkássága. A sztochasztikus geometriai programozás feladatával Avriel – Wilde [2] foglalkozik.

A matematikai programozás más területén elért eredményeket hasznosítja a geometriai programozásban Klinger – Mangasarian [26] és Pascual – Ben Israel [29].

Egy speciális geometriai programozási feladatot old meg a játékelmélet nyeregponttételével Danskin [9], és úgyszintén egy másik speciális típusút a dinamikus programozás eszközével Hisashi Mine – Katsuhisa Ohno [24].

Irodalomjegyzék

[1] M. Avriel and D.J. Wilde, Optimal Condenser Design by Geometric Programming, I & EC Process Design and Development, 6 (1967), 256-263.

[2] M. Avriel and D.J. Wilde, Stochastic Geometric Programming, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, N.J., 1967, August.

[3] M. Avriel and D.J. Wilde, Fundamentals of geometric programming, (in Applications of Mathematical Programming Techniques (E.M.L. Beale ed.), American Elsevier, New York, (1970), 295-316.

[4] M. Avriel and A. C. Williams, Complementary Geometric Programming, SIAM J. Appl. Math. Vol. 19. No. 1. (July 1970), 127-141.

[5] M. Avriel and A.C. Williams, On the Primal and Dual Constaint Sets in Geometric Programming, Journal of Math. Anal. and Appl., 32 (1970), 684-688.

[6] G.E. Blau and D.J. Wilde, Second order characterization of generalized polynomial programs, (Előadás: International Symposium on Mathematical Programming-on) Princeton, New Jersey, 1967.

[7] R.J. Clasen, The Linear-Logarithmic Programming Problem, RAND Corp. Memo RM-3707-PR, (June 1963).

[8] A. Charnes and W. Cooper, Optimizing engineering designs under inequality constraints, ONR Research Memorandum 64, Northwestern University Evanston, Illinois, 1962.

[9] J.M. Danskin, The theory of max-min with applications, SIAM J. Vol. 14 (1966), 641-664.

[10] G.B. Dantzig, J. Folkman and N. Shapiro, On the continuity of the minimum set of a continuous function, J. Math. Anal. Appl., 17 (1967), 519-548.

[11] G.B. Dantzig, S. Johnson and W. White, A Linear Programming Approach to the Chemical Equilibrium Problem, Management Sci., 5 (1958), 38-43.

[12] R.J. Duffin, Dual programs and minimum cost, Operations Res., 10 (1962), 119-123.

[13] R.J. Duffin, Cost minimalization problems treated by geometric means, Operations Res., 10 (1962), 668-675.

[14] R.J. Duffin, Linearizing Geometric Programs, SIAM Review, Vol. 12. No. 2. (April 1970).

[15] R.J. Duffin and E.L. Peterson, Duality theory for geometric programming, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), 1307-1349.

[16] R.J. Duffin and E.L. Peterson, Constrained minima treated by geometric means, Westinghouse Scientific Paper, 64-158-129-P3, (1964).

[17] R.J. Duffin, E.L. Peterson and C. Zener, Geometric Programming, John Wiley, New York, 1966.

[18] R.J. Duffin and C. Zener, Optimization of engineering problems, Westinghouse Engineer, 24 (1964), 154.

[19] A.E. Fein, A mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs, II. Proc. Nat. Acad. Sci., 47 (1961).

[20] D. Gale, Theory of linear economic models, New York, McGraw-Hill, 1960.

[21] D. Gale, A geometric duality theorem with economic applications, Rev. Economic Studies, 34 (1967), 19-24.

[22] J.W. Gibbs, On the Equilibrum of Heterogenens Substances, The Scientific Papers of I. Willard Gibbs, Vol. I., (Dover Publications, 1961). Eredetiben a fenti címen a Collected Works-ben jelent meg, Yale University Press, 1876.

[23] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[24] Hisashi Mine and Katsuhisa Ohno, Decomposition of Mathematical Programming Problems by Dynamic Programming and Its Application to Block-Diagonal Geometric Programs, Journal of Math. Anal. and Appl., 32 (1970), 370-385.

[25] R.C. Johnson, Optimum Design of Mechanical Elements, John Wiley, New York, 1961.

[26] A. Klinger and O.L. Mangasarian, Logarithmic Convexitiy and Geometric Programming, Journal of Math. Anal. and Appl., 24 (1968), 388-408.

[27] B.T. Lieu, A Study of Some Inequalities for Nonlinear Stochastic Programming, Nonlinear Programming-ban, (J. Abadie ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967.

[28] O.L. Mangasarian and J.B. Rosan, Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming problems, Operations Research, 12 (1964), 143-154.

[29] L.D. Pascual and A.B. Israel, Vector-valued Criteria in Geometric Programming, Oper. Res., 19 (1971), 98-102.

[30] U. Passy, Generalized weighted mean programming, SIAM J. Appl. Math., Vol. 20. No. 4. (June 1971), 763-778.

[31] U. Passy and D.J. Wilde, Generalized Polynomial optimization, SIAM J. Appl. Math. Vol. 15. No. 5. (September 1967).

[32] U. Passy and D.J. Wilde, A geometric Programming Algorithm for Solving Chemical Equilibram Problems, SIAM J. Appl. Math., 16 (1968), 363-373.

[33] E.L. Peterson, Symmetric duality for generalized geometric programming, SIAM J. Appl. Math., Vol. 19. No. 3. (November 1970).

[34] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric programming: A Unified Duality Theory for Quadratically Constrained Quadratic Programs and l_p-constrained l_p-approximation Problems, (Research Announcement), Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 316-321.

[35] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p-approximation I., International Symposium on Mathematical Programming, Princeton, N.J., (1967, August).

[36] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p-app -approximation II., (Canonical Programs), SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), 317-340.

[37] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p-approximation III., (Degenerate Programs), J. Math. Anal. Appls. 29 (1970), 365-383.

[38] E.L. Peterson and J.G. Ecker, Geometric Programming: Duality in Quadratic programming and l_p-approximation IV., (Computational Procedures), in preparation, to be submitted to Math. of Comp.

[39] N.Z. Shapiro, A Generalized Technique for Eliminating Species in Complex Chemical Equilibrum Calculations, RAND Corp. Memo RM-4205-PR, (Sept. 1964).

[40] N.Z. Shapiro and L.S. Shapley, Mass Action Lows and the Gibbs Free Energy Function, RAND Corp. Memo RM-3935-1-PR, (Sept. 1964).

[41] N.Z. Shapiro and L.S. Shapley, Mass Action Lows and the Gibbs Free Energy Function, J. Soc. Indust. Appl. Math., 13 (1965), 353-375.

[42] J. Stoer and Ch. Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, 1970.

[43] T.K. Sherwood, A course in Process Design, MIT Press, Cambridge, 1963.

[44] W. B. White and S.M. Johnson and G.B. Dantzig, Chemical Equilibrium in Complex Mixtures, J. Chem. Phys., 28 (1958), 751-755.

[45] D.J. Wilde, A review of Optimization Theory, Industrial and Engineering Chemistry 57 No. 8. (August 1965).

[46] D.J. Wilde and C.L. Beightler, Foundations of Optimization, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[47] W.I. Zangwill, Nonlinear Programming: A unified Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1969.

[48] C. Zener, A mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 47 (1961), 537-539.

[49] C. Zener, A further mathematical aid in optimizing engineering designs, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48 (1962), 518-522.

[50] C. Zener, Minimization of system cost in terms of subsystem cost, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 51 (1964), 162.

[51] C. Zener, An example of design for minimum total cost, counter-flow heat exchangers, IEEE Trans. Mil. Elec. MIL-8 (1964), 63.

S u m m a r y

Geometric programming

The paper deals with the problems of the duality of geometrical programming. A proof, simpler than the usual, is given for the duality theorem of geometrical programming by the use of the Farkas theorem. The approach of the problem is from the dual side of the task, which differs from the other constructions.

Р е з ю м е

Геометрическое программирование

Статья занимается проблемами двойственности геометрического программирования. В отличие от других методов построения, автор подходит к проблеме со стороны двойственной задачи, используя теорему Фаркаша. В статье дается более простое доказательство двойственности геометрического программирования.