EGYSZERŰ ALGORITMUS VÉGES ÁLLAPOTÚ MARKOV-LÁNC ERGODIKUS OSZTÁLYAINAK MEGHATÁROZÁSÁRA

Irta: Tankó József

Az alábbiakban ismertetünk egy egyszerű algoritmust véges állapotú homogén Markov-lánc ergodikus osztályainak meghatározására és igazoljuk az algoritmus helyességét. Az algoritmus kevés állapot esetén egyszerű grafikus formában is végrehajtható. Nagyobb állapotszám esetén a megadott ALGOL vagy FORTRAN program lehetővé teszi az algoritmus számológéppel történő végrehajtását.

Az algoritmus eredményét egy jelölő vektorral ábrázolhatjuk, amelyből kiolvasható, hogy mely állapotok tartoznak ugyanabba az ergodikus osztályba és mely állapotok lényegtelenek. Ennek alapján a Markov-lánc állapotai könnyen átszámozhatók úgy is, hogy az ergodikus osztályok tagjai egymásutáni sorszámokat kapjanak és a legnagyobb sorszámúak legyenek a lényegtelen állapotok. Ilymódon elérhető a Markov-lánc egylépéses átmenetmátrixának szokásos kvázi-diagonális szupermátrixszá való átrendezése.

Az algoritmus alkalmas irányított gráf erősen összefüggő* zárt (amelyből nem vezet ki nyíl) komponenseinek megkeresésére is, ha a csúcsoknak a Markov-lánc állapotait, irányított éleinek pedig az átmenetmátrix pozitív elemeit (a hiányzó éleknek 0 elemeket) feleltetünk meg.

1. AZ ALGORITMUS ÉS IGAZOLÁSA

Ebben a részben ismertetjük és igazoljuk a grafikus algoritmust, majd egy példán illusztráljuk azt. Előzőleg azonban néhány definíciót adunk.

1.1. DEFINICIÓK ÉS ELŐKÉSZITÉS

Legyen $\{X_t\}$ egy n állapotú *homogén Markov-lánc* $P=\{p_{ij},\ i,j=1,2,\dots,n\}$ egylépéses átmenetvalószínűségekkel. Az állapotok számozási sorrendje tetszőleges és a P mátrix $p_{ij} \geqslant 0$ eleme annak valószínűségét adja meg, hogy $X_{t+1} = j$ legyen, feltéve, hogy $X_t = i$ volt. P egy u.n. sztochasztikus mátrix, ahol $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i = 1,2,\dots,n$ (bár az algoritmusban ez nincs kihasználva!). A szemléltetés céljából a Markov-láncot ábrázolhatjuk egy irányított gráf formájában is, amelynél a csúcsok a Markov-lánc állapotainak felelnek meg, a szereplő nyilak pedig a $p_{ij} > 0$ pozitív egylépéses átmenetvalószínűségeket reprezentálják.

* Az erősen összefüggő (és zárt) komponensek meghatározására ismeretesek egyéb algoritmusok is, de az itt ismertetett algoritmus számológépi végrehajtása jóval egyszerűbb. (1. pl. B. Roy: Algèbre moderne et théorie des graphes, Dunod, Paris, Paris, 1969.)

Egy véges állapotú Markov-lánc *lényeges állapotainak* nevezzük azokat az állapotokat, amelyekbe a lánc végtelen sok lépésszám esetén pozitív valószínűséggel visszatér. A többi állapotokat *lényegtelen* vagy *átmeneti állapotoknak* nevezzük.

A lényeges állapotok azon osztályát, amelynek tagjai egymásból véges lépésben pozitív valószínűséggel elérhetők, a Markov-lánc egy *ergodikus osztályának* nevezzük.

Vagyis i és j állapot ugyanabba az ergodikus osztályba tartozik, ha van véges n_1, n_2, n_3 és n_4 egész szám, hogy $p_{ii}^{(n_1)} > 0$, $p_{jj}^{(n_2)} > 0$, $p_{ij}^{(n_3)} > 0$ és $p_{ji}^{(n_4)} > 0$, ahol $p_{ij}^{(n)}$ annak valószínűsége, hogy a Markov-lánc n lépésben i állapotból j állapotba jusson.

Az algoritmus egyszerűbb leírása és igazolása céljából vezessünk be néhány fogalmat.

Két állapot ill. a gráf két csúcsa közül *nagyobb*nak nevezzük azt, amelynek a sorszáma nagyobb.

Egy ergodikus osztály jelölőjének nevezzük a hozzá tartozó legnagyobb állapot sorszámát.

Két ergodikus osztály közül *nagyobb*nak nevezzük azt, amelynek a jelölője nagyobb.

Az irányított gráfban egy csúcshoz tartozó "bokor" *ág*ainak nevezzük azokat a csúcsokat, amelyekbe a szóbanforgó csúcsból vezetnek nyilak, *gyöker*ének azokat a csúcsokat, amelyekből a szóbanforgó csúcsba vezetnek nyilak.

Nevezzük szimbolikus *átmenetmátrixnak* azt az n x n -es mátrixot, amelyben valamilyen jellel (pl. x-szel) meg vannak jelölve azok az (i,j) mezők, amelyekhez $p_{ij} > 0$ átmenetvalószínűség tartozik.

1. Megjegyzés: A szimbólikus átmenetmátrix (i,i) mezőjének a gráf i csúcsa felel meg. Az (i,j) mező megjelölésének az i-ből a j csúcsba vezető nyíl felel meg. A mátrix i sorában álló jelek a gráf i csúcsához tartozó bokor ágainak, az i oszlopában álló jelek pedig a gráf i csúcsához tartozó bokor gyökerének felelnek meg.

1.2. AZ ALGORITMUS

Az algoritmus abból áll, hogy a szimbolikus átmenetmátrix főátlómezőin növekvő sorrendben végighaladva elvégezzük az alább következő Eljárást, majd az 1.3. pontban ismertetésre kerülő Tétel szerint meghatározzuk az ergodikus osztályokat.

Eljárás: A szimbolikus átmenetmátrixban a főátló-mező sorában lévő megjelölt mezőknek (ha van ilyen) megfelelő oszlopokban megjelöljük azokat a mezőket (ha még nem voltak megjelölve), amelyek a főátló-mezőnek megfelelő oszlop főátló alatti részén megjelölt mezők sorában vannak. Az utólagos rekonstruálhatóság céljából esetleg más, pl. +, jelet alkalmazhatunk vagy beírjuk azt a számot, amelyik lépésnél a megjelölés történik; l. 1.4. pont).

Ez az eljárás a gráfban ábrázolva azt jelenti, hogy a gráf-csúcshoz tartozó bokor gyökerének nagyobb csúcsait összekötjük a bokor ágaival az utóbbiak felé mutató nyilakkal. (Az utólagos rekonstruálhatóság céljából a nyilakat esetleg másképp, pl. vékonyabb vonallal jelölhetjük, sőt kótázhatjuk azzal a számmal, ahányadik lépésnél keletkeztek; l. 1.4. pont).

Definició: A fenti módon nyert mátrixot *teljes* mátrixnak, a nyert gráfot teljes gráfnak nevezzük. A Markov-lánc egy i állapotából a j állapotot *megjelölten elérhető*nek nevezzük, ha (i,j) mátrix-mező a teljes mátrixba megjelölt, ill. i csúcsból j-be a teljes gráfban vezet nyíl.

2. **Megjegyzések:** A teljes mátrix megjelölt mezői és a teljes gráf nyilai kölcsönösen megfelelnek egymásnak.

Az Eljárásból következik, hogy minden megjelölt átmenet lehetséges átmenet a Markovláncban.

A teljes mátrixban, ill. gráfban nem jelenik meg minden lehetséges átmenet megjelölt átmenetként. Hogy melyek jelennek meg, az függ az állapotok számozási sorrendjétől.

Definició: Azokat az állapotokat, amelyeknek megfelelő sorok a teljes mátrixban a főátlótól jobbra üresek, ill. a megfelelő gráf-csúcsból a teljes gráfban nem vezet nyíl nagyobb csúcsba, *vizsgálandó állapotok*nak nevezzük. A Markov-lánc legnagyobb állapota mindig vizsgálandó állapot.

Definició: Nevezzük a Markov-lánc *jelölővektorának* azt az n-komponensű vektort, amelynek k-adik komponense 0, ha a lánc k állapota átmeneti állapot, ill. azon ergodikus osztály jelölője, amelybe a k állapot tartozik.

1.2. TÉTEL

Tétel: A./ Egy vizsgálandó állapotra a következő két állítás valamelyike igaz:

1./ A vizsgálandó állapot sorszáma egy ergodikus osztály jelölője és az ergodikus osztályt a belőle megjelölten elérhető állapotok alkotják akkor, ha a belőle megjelölten elérhető állapotok egyike sem tartozik kisebb ergodikus osztályhoz.

2./ A vizsgálandó állapot átmeneti (lényegtelen) akkor, ha a belőle megjelölten elérhető állapotok valamelyike kisebb ergodikus osztályhoz tartozik.

B./ Minden ergodikus osztály jelölője vizsgálandó állapot.

Bizonyítás: Először az A állítást bizonyítjuk be.

A 2. Megjegyzésekből és az ergodikus osztály jelölőjének definiciójából következik, hogy a tételben szereplő 2. esetben, amikor létezik megjelölt átmenet egy kisebb ergodikus osztályba, a vizsgálandó állapot csak átmeneti állapot lehet.

A továbbiakban ezért alkalmazzuk a következő

Feltevést: a vizsgálandó állapotból megjelölten elérhető állapotok egyike sem tartozik kisebb ergodikus osztályhoz.

A tétel bizonyításához tételezzük még fel, hogy a vizsgálandó állapotokon gondolatban növekvő sorrendben megyünk végig és úgy bizonyítunk. Ekkor az első vizsgálandó állapotra a Feltevés biztosan teljesül.

Előrebocsájtjuk még az ismétlések elkerülése végett a következő megjegyzést:

3. Megjegyzés: Az Eljárásból következik, hogy annak k-adik lépésétől kezdve már nem kerülhet megjelölés a k-adik és az azt megelőző mátrix-sorokba. Ha egy (ν_1, ν_2) mező az Eljárás ν-edik lépésében került megjelölésre, akkor a ν-edik lépést megelőzően mind (ν_1, ν) mind (ν, ν_2) mezőknek megjelölteknek kellett lenniök és $\nu_2 > \nu$ lehet csak. Ezekután két lemmát kell bizonyítani:

1. Lemma: A vizsgálandó állapotból elérhető összes állapot megjelölten elérhető.

2. Lemma: Ha a Feltevés igaz, akkor a vizsgálandó állapot elérhető mindazon állapotokból, amelyek belőle megjelölten elérhetők.

Az 1. és 2. lemmákból következik, hogy a Feltevés mellett a vizsgálandó állapot és a neki megfelelő mátrix-sorban megjelölt mezőkhöz tartozó állapotok egy olyan osztályt alkotnak, amelyből nem lehet kijutni, de az osztályon belül minden állapot minden másikból elérhető. Ez éppen egy ergodikus osztály definiciójával ekvivalens. Nyilvánvaló, hogy a vizsgálandó állapot éppen ennek az ergodikus osztálynak a jelölője lesz.

1. Lemma bizonyítása: Legyen m a vizsgálandó állapot és m' egy belőle elérhető állapot. Be kell bizonyítani, hogy a teljes mátrixban (m, m') mező megjelölt mező. Ha a teljes mátrix m sorában (m,m) az egyetlen megjelölt mező, akkor a szimbólikus átmenetmátrixban is ez volt az egyetlen megjelölt mező, tehát m-ből csak önmaga érhető el. Igy m a Markov-lánc elnyelő állapota és nincs mit bizonyítani. Hogy legyen olyan m-től különböző m' állapot, amely m-ből elérhető, legalább egy (m,m)-től különböző (m, m_1) megjelölt mezőnek kell lennie a szimbólikus átmenetmátrix, és így a teljes mátrix, m sorában. A továbbiakban zárjuk ki azt az esetet, amikor m elnyelő állapot.

Mivel m' állapot az m-ből elérhető, van olyan $k \geqslant 1$ és

(★) $$m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k$$

különböző állapotokból álló állapot-sorozat a Markov-láncban, ahol $m_0 = m$, $m_k = m'$, és a sorozat minden tagja megjelölten elérhető az előzőből, vagyis (m_{i-1}, m_i), $i = 1, \dots, k$, mezők megjelöltek. Nyilván $m_1 < m$ lehet csak, mivel m vizsgálandó állapot. Ha a (★) sorozat olyan, hogy $k = 1$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $k > 1$. Ha a (★) sorozat minden m_i, $i > 0$, tagja megjelölten elérhető m-ből, akkor szintén nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel most, hogy a (★) sorozatban van olyan m_i, $i > 1$, állapot, amely m-ből nem megjelölten elérhető, de $m_1, m_2, \dots, m_{i-1}$ mindegyike megjelölten elérhető m-ből. E feltevés ellentmondásra fog vezetni, ami kizárja, hogy m_k az m-ből nem megjelölten elérhető.

Tekintsük az

$$m, m_{i-1}, m_i.$$

állapot-sorozatot, ahol (m, m_{i-1}) és (m_{i-1}, m_i) megjelölt mezők (m, m_i) azonban nem. Mivel m vizsgálandó állapot, $m_{i-1} < m$ lehet csak. Tekintsük most az Eljárás m_{i-1}(-edik) lépését.

Ha (m, m_{i-1}) mező az m_{i-1} lépést megelőzően már megjelölt lett volna, akkor az m_{i-1} lépésben (m, m_i) is megjelölésre került volna, ami ellentmond m_i-re vonatkozó feltevésünknek. Az m_{i-1} lépésig bezárólag tehát (m, m_{i-1}) mező még nem lett megjelölve. Ekkor kellett lennie egy ν_1, $m_{i-1} < \nu_1 < m$, lépésnek az Eljárásban, amikor (m, m_{i-1}) megjelölésre került. A 3. Megjegyzés szerint ekkor az Eljárás ν_1 lépését megelőzően (ν_1, m_{i-1}) mezőnek már megjelöltnek kellett lennie.

Ha (ν_1, m_{i-1}) mező az m_{i-1} lépést megelőzően már megjelölt lett volna, akkor megjelölésre került volna (ν_1, m_i) mező is majd azt követően a ν_1 lépésben (m, m_i) mező is, ami ellentmond m_i-re vonatkozó feltevésünknek. Ezért kellett lennie egy ν_2, $m_{i-1} < \nu_2 < \nu_1$, lépésnek az Eljárásban, amikor (ν_1, m_{i-1}) megjelölésre került. A 3. Megjegyzés szerint ekkor az Eljárás ν_2 lépést megelőzően (ν_2, m_{i-1}) mezőnek már megjelöltnek kellett lennie.

A gondolatmenetet folytatva véges lépésben eljutunk egy olyan $m > \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_k > m_{i-1}$ sorozathoz, ahol ν_k már olyan közel van m_{i-1}-hez $(\nu_k = m_{i-1} + 1)$, hogy nem lehet olyan ν_{k+1} lépés, amelyben (ν_k, m_{i-1}) megjelölésre kerülne és $m_{i-1} < \nu_{k+1} < \nu_k$ lenne.

Ellentmondásra jutottunk tehát m_i-re vonatkozó feltevésünkkel. Ebből következik, hogy m' az m-ből valóban megjelölten elérhető.

Ezzel az 1. Lemma bizonyítva van.

2. Lemma bizonyítása: Legyen m' állapot az m vizsgálandó állapotból megjelölten elérhető (legalább egy ilyen m' állapot okvetlen létezik), azaz (m,m') megjelölt mező. Ekkor nyilván $m' \leqslant m$. Ha $m' = m$, akkor nincs mit bizonyítani. Legyen tehát $m' < m$ (ha ilyen m' létezik).

Tegyük fel először, hogy nincs olyan m'', $m'' > m'$, állapot, amely m'-ből megjelölten elérhető. Ekkor m' is vizsgálandó állapot. Ha m' egy ergodikus osztály jelölője lenne, akkor ellentmondásra jutnánk a Feltevéssel. Tehát m' legfeljebb még átmeneti állapot lehet. Ekkor van olyan m^*, amelybe m'-ből el lehet jutni és m^* egy kisebb ergodikus osztály tagja. Az 1. lemma szerint ekkor azonban (m, m^*) is megjelölt mező, ami ismét ellentmond a Feltevésnek.

Tehát biztosan kell lennie m'-hez egy olyan m'', $m'' > m'$, állapotnak, amely m'-ből megjelölten elérhető. Igy méginkább van olyan m^*, $m^* > m'$, állapot, amely m'-ből elérhető. Legyen m_1 a legnagyobb ilyen állapot. Ekkor nyilván m_1 vizsgálandó állapot lesz, mert ellenkező esetben m_1-en keresztül m'-ből m_1-nél nagyobb állapotba lehetne jutni. Másrészt az 1. Lemma szerint (m, m_1) mező is megjelölt, hiszen m-ből m_1-be az m'-en keresztül el lehet jutni. Ekkor azonban $m_1 \leqslant m$. $m_1 < m$ lehetetlen, mert, ha m_1 akár egy kisebb ergodikus osztály jelölője lenne, akár átmeneti állapot, ellentmondásra jutnánk a Feltevéssel. Igy tehát csak $m_1 = m$ eset lehetséges. Ezzel a 2. Lemma bizonyítása kész.

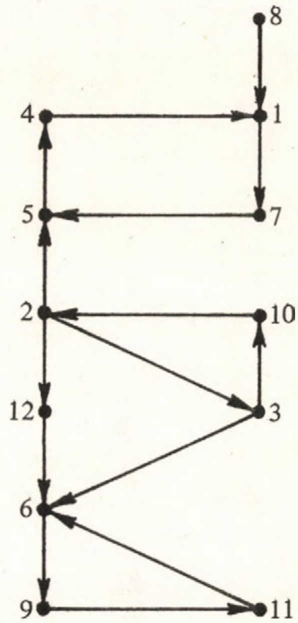
B. állítás bizonyítása: Ha egy ergodikus osztály jelölőjének megfelelő állapot nem lenne vizsgálandó állapot, az azt jelentené, hogy a jelölőből nagyobb állapotba is el lehetne jutni megjelölten, tehát vagy e nagyobb állapot is az ergodikus osztályhoz tartozna, ami ellentmond a jelölő definíciójának, vagy a jelölő átmeneti állapotnak felelne meg, ami lehetetlen.

A tétel szerint ergodikus osztályba nem tartozó állapotok (akár vizsgálandók, akár nem) így nyilvánvalóan csak átmeneti állapotok lehetnek, hiszen a tétel biztosítja az összes ergodikus osztály kiválasztását és a Markov-lánc véges állapotú.

1.4. ILLUSZTRATIV PÉLDA

Legyen adva egy n = 12 állapotú Markov-lánc, amelyhez az 1. ábrán látható szimbolikus átmenetmátrix és irányított gráf tartozik.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1							X					
2			X		X							X
3						X				X		
4	X											
5				X								
6									X			
7					X							
8	X											
9											X	
10		X										
11						X						
12						X						

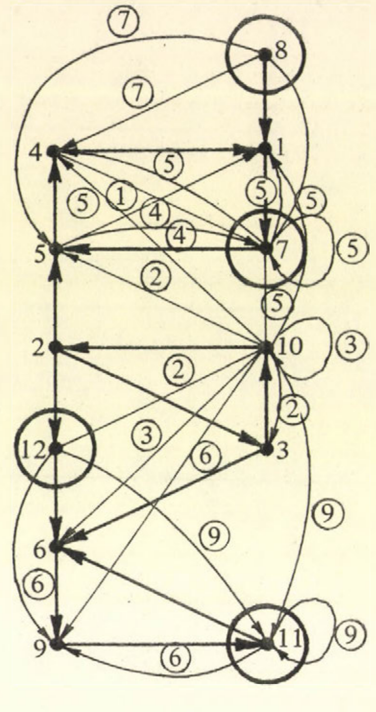


1. ábra

Az Eljárás végrehajtása után a 2. ábrán bemutatott teljes mátrixot és gráfot nyerjük. A mátrixban az újonnan megjelölt mezőket azzal a sorszámmal jelöltük meg, amelyik lépésben a megjelölés megtörtént. A gráf új nyilait ugyanazekkel a sorszámokkal kótáztuk. A vizsgálandó állapotoknak megfelelő mátrix-sorok főátlótól jobbra eső részeit sraffozással jeleztük, a gráfnál pedig bekarikáztuk a vizsgálandó állapotoknak megfelelő csúcsokat. A teljes mátrixba berajzolt vonalak az eljárás kézi végrehajtása közben alkalmazhatók a tévedési lehetőség csökkentése céljából.

A vizsgálandó állapotok ezek szerint a 7, 8, 11 és 12. Az első vizsgálandó állapot a 7, ez biztosan egy ergodikus osztály jelölője, mégpedig a tétel szerint az első ergodikus osztály állapotai (1, 4, 5, 7). A következő vizsgálandó állapot a 8, amelyből megjelölt átmenetek vannak az előző, kisebb ergodikus osztályba, ezért a 8 állapot átmeneti. A 11 vizsgálandó állapotból megjelölt átmenet lehetséges a (6, 9, 11) állapotokba, amelyek egyike sem eleme az (1, 4, 5, 7) ergodikus osztálynak, ezért a (6, 9, 11) ismét egy ergodikus osztályt alkot, amelynek je-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1							X						7
2			X		X							X	0
3						X				X			0
4	X						1						7
5	4			X			4						7
6									X				11
7	5			5	X		5						7
8	X			7	7		1						0
9											X		11
10	5	X	2	5	2	3	5		6	3	9	2	0
11						X			6		9		11
12						X			6		9		0



2. ábra

lölője 11. Az utolsó állapot mindig vizsgálandó. Jelen esetben 12-ből megjelölt átmenetek vannak a (6, 9, 11) ergodikus osztályba, így 12 állapot átmeneti. Az eddig nem szereplő összes többi állapot is átmeneti, így az átmeneti állapotok osztálya a (2, 3, 8, 10, 12) állapotokból áll.

A teljes mátrix mellett a fenti ábrán minden sorban feltüntettük annak az ergodikus osztálynak a jelölőjét, amelybe az állapot tartozik, ill. 0-át írtunk az átmeneti állapotoknál. Ez alkotja a Markov-lánc jelölővektorát, amely tehát:

$$(7, 0, 0, 7, 7, 11, 7, 0, 11, 0, 11, 0)$$

2. A GÉPI ELJÁRÁS ÉS PROGRAMJA

A gépi eljárásnál a tényleges egylépéses átmenetmátrixból indulunk ki. Az algoritmus csupán annyiban tér el az előző részben leírt "kézi" algoritmustól, hogy mátrix-mezők megjelölése helyett a mező-tartalmak hozzáadását végezzük. A megjelölt mező most olyan mezőt fog jelenteni, amelyben pozitív mennyiség áll, a nem megjelölt mező pedig olyat, amelyben zérus áll.

2.1. A GÉPI ALGORITMUS

A gépi algoritmus abból áll, hogy az állapotokon végighaladva meghatározzuk a teljes mátrixot az alábbi Eljárással, majd meghatározzuk a jelölővektort.

Eljárás: Az állapotnak megfelelő mátrix-sor pozitív elemeinek megfelelő oszlopok sor alatti részeihez hozzáadjuk az állapotnak megfelelő oszlop sor alatti részét.

A *jelölővektort* az előző részben szereplő tétel alapján határozzuk meg azzal a megjegyzéssel, hogy vizsgálandó állapot alatt most olyan állapotot értünk, amelynek megfelelő mátrix-sor főátlótól jobbra eső része csupa zérus.

A jelölővektor meghatározásának menete a következő: Először a vektor minden komponensét 0-vá tesszük. Utána az állapotokon növekvő sorrendben haladunk végig. Ha egy állapot vizsgálandó, az állapot sorszámát adjuk értékként mindazon komponenseknek, amelyeknek megfelelő állapotokba van megjelölt átmenet a vizsgálandó állapotból, mindaddig, amíg – esetleg – olyan komponenshez nem érkezünk, amelynek értéke már nem volt 0. Az utóbbi esetben visszaváltoztatjuk 0-vá az összes olyan komponenst, amelynek értéke a vizsgálandó állapot sorszámával egyenlő.

Az algoritmus eredményét egyértelműen jellemzi a jelölővektor.

Jelölje a programokban N a Markov-lánc állapotainak számát, P az egylépéses átmenetmátrixot és M a jelölővektort. Ezek lesznek az eljárás ill. szubrutin paraméterei.

2.2. AZ ALGOL-PROGRAM

A programot eljárás formában írjuk le:

```
procedure ERGOD (P,M,N,);
  value N; integer N; integer array M; real array P;
  comment THIS IS AN ALGORITHM TO PROVIDE THE ERGODIC CLASSES OF A
          HOMOGENEOUS FINITE-STATE MARKOV-CHAIN CHARACTERISED BY
          THE TRANSITION MATRIX P[N,N];
  begin integer I,J,K;
          for I:=1 step 1 until N do M[I]:=0;
          for I:=1 step 1 until N do
          for J:=1 step 1 until N do
          if P[I,J] > 0 then for K:=I+1 step 1 until N do
          P[K,J]:=P[K,J]+P[K,I];
          for I:=1 step 1 until N do begin
```

```
        for J:=I+1 step 1 until N do
        if P[I,J] > 0 then go to LINE;
        for J:=1 step 1 until I do
        if P[I,J] > 0 ∧ M[J] > 0 then begin
        for K:=1 step 1 until J do
        if M[K]=I then M[K]:=0;
        go to LINE end else
        if P[I,J] > 0 then M[J]:= I;
LINE:   end I; end ERGOD
```

2.3 A FORTRAN-PROGRAM

A programot szubrutin formában írjuk le:

```
      SUBRUTINE ERGOD (P,M,N)
      INTEGER N,M(N)
      REAL P(N,N)
C     THIS IS AN ALGORITHM TO PROVIDE THE ERGODIC CLASSES OF A
C     HOMOGENEOUS FINITE-STATE MARKOV-CHAIN CHARACTERISED BY
C     THE TRANSITION MATRIX P(N,N)
      DO 20 I=1,N
   20 M(I)=0
      N1=N-1
      DO 21 I=1,N1
      I1=I+1
      DO 22 J=1,N
      IF (P(I,J).EQ.O.) GO TO 22
      DO 23 K=I1,N
   23 P(K,J)=P(K,J)+P(K,I)
   22 CONTINUE
   21 CONTINUE
      DO 24 I=1,N
      J1=I+1
      DO 25 J=J1,N
      IF(P(I,J).GT.O.) GO TO 24
   25 CONTINUE
      DO 26 J=1,I
      IF(PI.J).EQ.O.) GO TO 26
      IF(M(J).NE.O) GO TO 27
      M(J)=I
```

```
      GO TO 26
27    DO 28 K=1,J
28    IF(M(K).EQ.I) M(K)=0
      GO TO 24
26    CONTINUE
24    CONTINUE
      RETURN
      END
```

A programokat az MTA Számítástechnikai Központjának CDC 3300-as számológépén próbáltuk ki.

Summary

A simple algorithm to define the ergodic classes of a finite state Markov chain

We describe a simple algorithm to define the ergodic classes of a finite state homogeneous Markov chain given with its transition matrix. We outline the alorithm in a manually executable form and prove the same, thereafter follow the ALGOL and FORTRAN programs of the algorithm. The programs were tried on the CDC 3300 computer of the Computing Centre of the Hungarian Academy of Sciences.

Резюме

Простой алгоритм для определения эргодических классов цепи Маркова конечного состояния

Статья знакомит с простым алгоритмом для определения эргодических классов однородной цепи Маркова конечного состояния, заданной переходной матрицей.

Алгоритм задан в форме, дающей возможность обработки его вручную, с доказательством. Даются программы алгоритма в АЛГОЛе и ФОРТРАНе. Программы были проверены на машине CDC–3300 в Вычислительном центре ВАН.