SPECIÁLIS IDŐOPTIMUM FOLYAMAT SZINTÉZISTARTOMÁNYÁRA VONATKOZÓ BECSLÉS

Urbánszki Ferenc

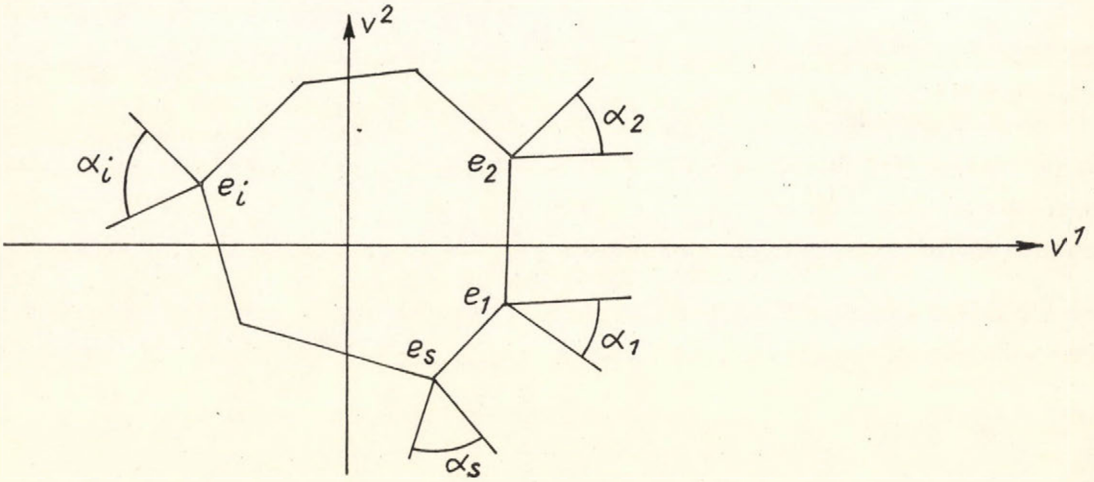
Legyen adott egy másodrendű lineáris időoptimum folyamat az

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= ax^1 - bx^2 + v^1 \\ \dot{x}^2 &= bx^2 + ax^2 + v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

differenciálegyenletrendszerrel, ahol

$$(x^1,x^2) \in R^2,$$
$$(v^1,v^2) \in V\ ,$$
$$b > 0\ .$$

A V vezérlési tartomány egy konvex sokszög, amely tartalmazza – nem csúcspontként – az origót. Legyenek a V sokszög csúcsai $e_i = (e_i^1, e_i^2)$, $i = 1,2,\ldots,s$ és az e_i csúcsban az oldalak külső normálisainak szögét pedig jelöljük α_i-vel.



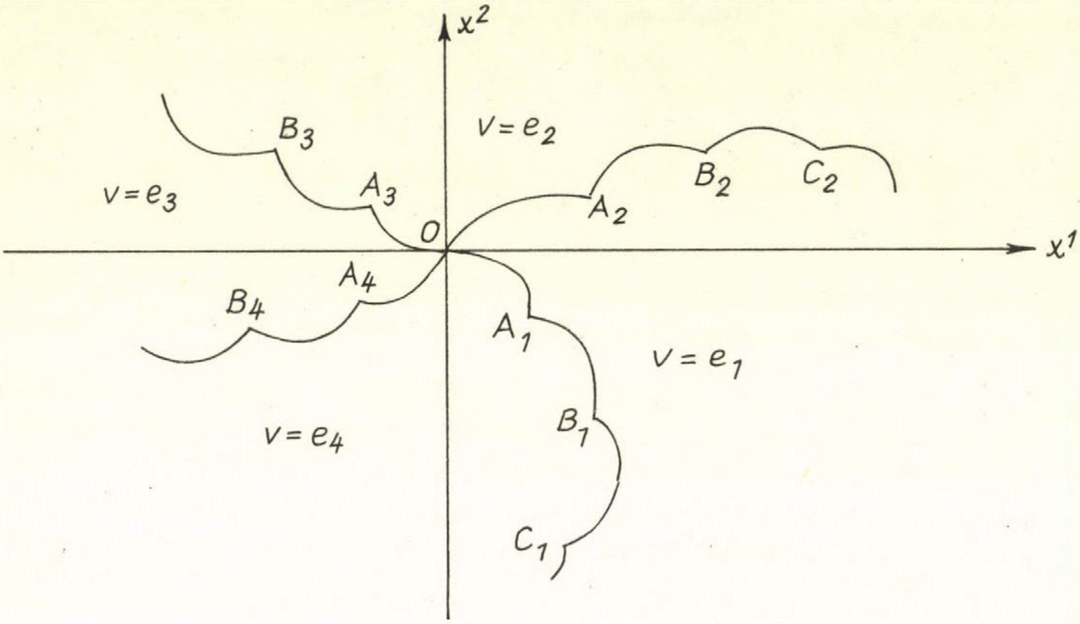
A Pontrjagin-féle maximum-elv és az ebből levezethető tételek alapján megvalósítható az optimális trajektóriák szintézise [1], azaz megadható egy olyan

$$(O,A_i,B_i,C_i,D_i,\ldots\ldots) \qquad i = 1,2,\ldots,s$$

átkapcsolási görbesereg az R^2 sikon, hogy az

$$(O, A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots\ldots)$$
$$(O, A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}, \ldots\ldots) \quad i = 1,2, \ldots, s$$

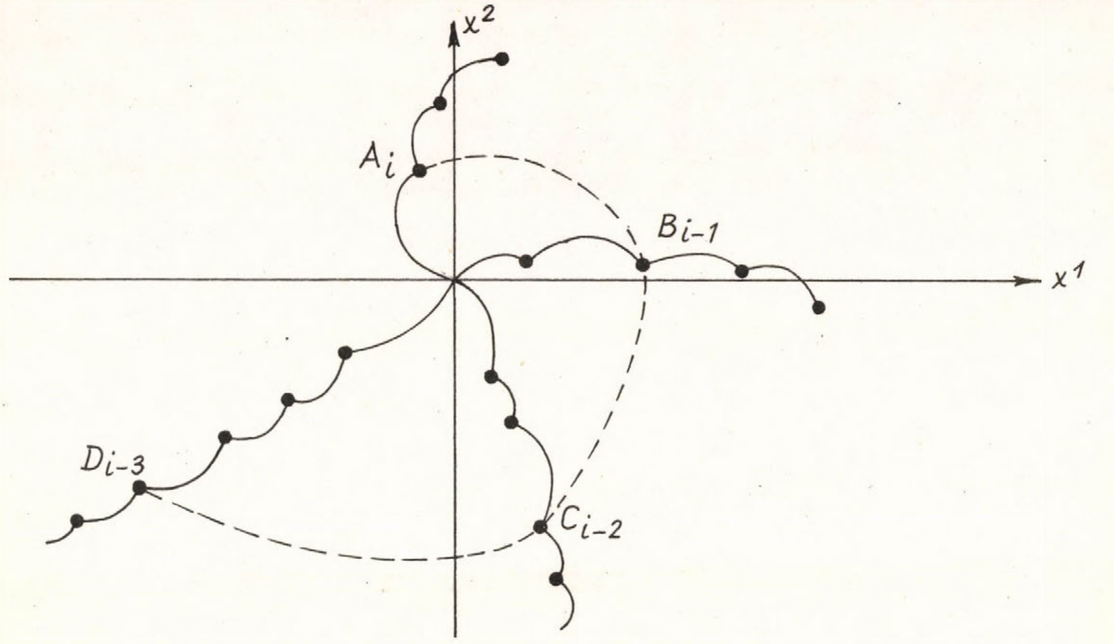
görbék által határolt síkrészen az optimális vezérlés a V tartomány e_i csúcsa lesz. (Az indexelés itt és a továbbiakban is mod s értendő).



Ha az (1) mozgásegyenletben $a \leqslant 0$, akkor az átkapcsolási görbék az egész síkot behálózzák. A szintézistartomány a sík lesz. Ha a mozgásegyenletben $a > 0$, akkor a görbék az origó környezetének korlátos tartományában maradnak [1]. Ekkor a szintézistartomány korlátos.

Ebben a cikkben feladatul tűzzük ki egy olyan kör meghatározását, amely tartalmazza az $a > 0$ esetben a szintézistartományt. Az alábbiakban $a > 0$, $b > 0$ speciális esetet tárgyaljuk.

Az A_i, B_{i-1}, C_{i-2}, $D_{i-3}, \ldots$ pontok sorozata rekurzív módon megadható.



Legyen $h_i = (h_i^1, h_i^2)$ az

$$(2) \qquad \begin{aligned} a h_i^1 - b h_i^2 + e_i^1 &= 0 \\ b h_i^1 + a h_i^2 + e_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása. Ekkor [1]

$$(3_1) \qquad \begin{cases} A_i^1 - h_i^1 = C_{OA} e^{-\frac{a}{b}\alpha_i} \cos(-\alpha_i + \gamma_{OA}) \\ A_i^2 - h_i^2 = C_{OA} e^{-\frac{a}{b}\alpha_i} \sin(-\alpha_i + \gamma_{OA}) \\ (C_{OA})^2 = (h_i^1)^2 + (h_i^2)^2 \\ \operatorname{tg} \gamma_{OA} = \dfrac{h_i^2}{h_i^1} \end{cases}$$

$$(3_2) \qquad \begin{cases} B_{i-1}^1 - h_{i-1}^1 = C_{AB} e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \cos(-\alpha_{i-1} + \gamma_{AB}) \\ B_{i-1}^2 - h_{i-1}^2 = C_{AB} e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \sin(-\alpha_{i-1} + \gamma_{AB}) \\ (C_{AB})^2 = (A_i^1 - h_{i-1}^1)^2 + (A_i^2 - h_{i-1}^2)^2 \\ \operatorname{tg} \gamma_{AB} = \dfrac{A_i^2 - h_{i-1}^2}{A_i^1 - h_{i-1}^1} \end{cases}$$

$$
(3_3)\quad\begin{cases}
C^1_{i-2} - h^1_{i-2} = C_{BC}e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \cos(-\alpha_{i-2} + \gamma_{BC}) \\
C^2_{i-2} - h^2_{i-2} = C_{BC}e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \sin(-\alpha_{i-2} + \gamma_{BC}) \\
(C_{BC})^2 = (B^1_{i-1} - h^1_{i-1})^2 + (B^2_{i-1} - h^2_{i-2})^2 \\
\operatorname{tg}\gamma_{BC} = \dfrac{B^2_{i-1} - h^2_{i-2}}{B^1_{i-1} + h^1_{i-2}}
\end{cases}
$$

$$\vdots$$

Az

$$M^1_i = |h_i|e^{-\frac{a}{b}\alpha_i}$$

$$M^2_i = (M^1_i + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}$$

$$M^3_i = (M^2_i + |h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}}$$

$$\vdots$$

sorozat felhasználásával az átkapcsolási görbék töréspontjainak az origótól való távolságára a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$|A_i - h_i| = M^1_i$$

$$(4_1)\qquad |A_i| \leqslant M^1_i + |h_i|$$

$$
\begin{aligned}
|B_{i-1} - h_{i-1}| &= |A_i - h_{i-1}|e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} \leqslant \\
&\leqslant (|A_i - h_i| + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} = \\
&= (M^1_i + |h_i - h_{i-1}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}} = M^2_i
\end{aligned}
$$

$$(4_2)\qquad |B_{i-1}| \leqslant M^2_i + |h_{i-1}|$$

$$
\begin{aligned}
|C_{i-2} - h_{i-2}| &= |B_{i-1} - h_{i-2}|e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \leqslant \\
&\leqslant (|B_{i-1} - h_{i-1}| + |h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} \leqslant \\
&\leqslant (M^2_i + h_{i-1} - h_{i-2}|)e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-2}} = M^3_i
\end{aligned}
$$

(4_3) $\qquad |C_{i-2}| \leqslant M_i^3 + |h_{i-2}|$

.
.
.

Az M_i^k sorozat vizsgálatához értelmezzük az

$$N_i^p = |h_i| e^{-\frac{a}{b} 2\pi p} + \frac{1 - e^{-\frac{a}{b}(p+1)2\pi}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \cdot \sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}$$

sorozatot, amelyre

$$M_i^k \leqslant N_i^p, \quad \text{ahol} \quad k = p \cdot s + q$$

$$s > q \geqslant 0.$$

Az N_i^p sorozat konvergens

$$\lim_{p \to \infty} N_i^p = \frac{\sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}}$$

(a határérték független az i indextől)

A (4_1), (4_2), (4_3)..... egyenlőtlenségek alapján a

$$\max_i \left(\lim_{k \to \infty} M_i^k + |h_i| \right) \leqslant \max \left(\lim_{p \to \infty} N_i^p + |h_i| \right) =$$

$$= \max_i |h_i| + \frac{\sum_i |h_i - h_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} = R$$

sugarú kör tartalmazni fogja a feladatban megjelölt szintézistartományt.

A h_i és e_i vektorok közötti (2) összefüggés figyelembevételével igaz az alábbi

Tétel: Ha az (1) mozgásegyenletben $a > 0$, akkor az

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\max_i |e_i| + \frac{\sum_i |e_i - e_{i-1}| e^{-\frac{a}{b}\alpha_{i-1}}}{1 - e^{-\frac{a}{b}2\pi}} \right]$$

sugarú kör tartalmazza az időoptimum folyamat szintézistartományát.

1. Megjegyzés: Az $\alpha = \min\limits_i \alpha_i$; KER = V sokszög kerülete jelöléssel bevezetve az

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\max_i |e_i| + \frac{KER\, e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

$$R_2 = \frac{\max\limits_i |e_i|}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1 + \frac{2\pi e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

$$R_3 = \frac{\max e_i}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1 + \frac{2\pi}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

mennyiségeket nyilvánvaló, hogy

$$R \leqslant R_1 < R_2 < R_3 .$$

2. Megjegyzés: Ha a V vezérlési tartomány egy origó középpontú r sugarú körbe írt szabályos s-szög, akkor a következő körsugarakat kapjuk:

$$R = \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1 + \frac{2\cdot s\cdot \sin\frac{\pi}{s}\cdot e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

$$R_1 = R$$

$$R_2 = \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1 + \frac{2\pi e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

$$R_3 = \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1 + \frac{2\pi}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}}\right]$$

Az $|OA_i| + |A_iB_i| + |B_iC_i| + \ldots$ mennyiségekkel szintén megadhatunk egy körsugarat, amely megoldása lesz a feladatnak. Részletszámítások nélkül az eredmény:

$$\widetilde{R} = \frac{\max\limits_i |e_i|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{a}{b}\alpha}}{1-e^{-\frac{a}{b}\alpha}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{a}{b}s\alpha}}{1-e^{-\frac{a}{b}2\pi}} .$$

Ha a vezérlési tartomány a fentebbi szabályos sokszög, akkor az

$$\widetilde{R} = \frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}{1-e^{-\frac{a}{b}\frac{2\pi}{s}}}$$

sugarat kapjuk.

Rögzített r mellett vegyük az R és $\widetilde{R}$ határértékét.

$$\lim_{s\to\infty} R = R_3 \; .$$

$$\lim_{s\to\infty} \widetilde{R} = \infty \; .$$

Az R tehát finomabb korlát, mint az $\widetilde{R}$, ha a csúcsok száma megfelelően nagy.

Irodalom

[1] Boltjanszkij: Matematicseszkije metodü optimalnovo upravlenyija, Moszkva, 1967.

Summary

Estimation of the synthesis domain of a special time-optimum flow

The synthesis domain of a linear time optimum flow in a plain is limited if the roots of the homogeneous differential equation system are complex and the real part is positive. In the paper an upper limit is given for the synthesis domain of the flow.

Резюме

Оценка области достижимости специального оптимального быстродействия

Область достижимости линейного оптимального быстродействия на плоскости будет ограничена, если корни однородной системы дифференциальных уравнений комплексны и их действительные части положительны. В статье задается оценка сверху области достижимости такого процесса.