EXTREMÁLIS FELADATOK ABSZTRAKT TEREKBEN

Tóth Árpád

1. BEVEZETÉS

A vezérléselmélet és a variációszámítás sok feladata (pl. a Mayer feladat) fogalmazható meg absztrakt tereken megadott extremális problémaként. [1] A kérdés gyakorlati jelentőségére való tekintettel az [1] és [2]-ben elért eredmények általánosítását tűzzük ki célul. A feltételes szélsőértékfeladatnál megengedjük az egyenlőtlenségtípusú feltételeket is. (Az előbbiek csak egyenlőség-típusú feltételeket tárgyalnak.) A szükséges feltételeken túl egy elégséges feltételt is adunk.

2. NÉHÁNY FONTOS DEFINICIÓ

Az alábbi meghatározások [1]-ben találhatók. Ebben a szakaszban E, F normált, lineáris tereket jelentenek.

1. Definició: Egy $D \subset E$ részhalmazt az $x_0 \in D$ pontban *végesen nyíltnak* mondunk, ha minden $\{h_1, \dots, h_n\} \in E$ véges halmazhoz van R^n-ben a 0-nak olyan $U(h_1, \dots, h_n)$ környezete, hogy $x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \in D$, ha csak $(t_1, \dots, t_n) \in U(h_1, \dots, h_n)$.

Legyen D_{x_0} az így előálló pontok halmaza, vagyis

$$D_{x_0} = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i :\ n \geqslant 1,\ h_i \in E,\ (t_1, \dots, t_n) \in U(h_1, \dots, h_n) \right\}.$$

Ezt a halmazt az x_0 egy csillagkörnyezetének nevezzük. D *végesen nyílt,* ha minden pontjánál végesen nyílt.

2. Definició: Legyen az $f\colon E \to F$ függvény egy $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve, és D_{x_0} az $x_0 \in D$ pontnak csillagkörnyezete.

Az f *végesen folytonos* az $y \in D_{x_0}$ pontban, ha az

$$f(y + \sum_{1}^{n} t_i h_i)\colon R^n \to F$$

folytonos a $(t_1, \dots, t_n)$ függvényeként a $0 \in R^n$ pontban, tetszőleges $h_1, \dots, h_n$ és $n \geqslant 1$ megválasztása mellett. f végesen folytonos a D_{x_0} halmazon, ha minden $y \in D_{x_0}$ pontban végesen folytonos.

3. Definició: Legyen az $f\colon E \to F$ egy $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve. Ha a

$$\lim_{t \to 0} \ [f(x_0 + th) - f(x_0)]/h = \delta f(x_0; h)$$

határérték létezik minden $h \in E$ esetén, akkor f *gyengén differenciálható* az x_0 pontban, $\delta f(x_0; h)$ pedig az f h irányába vett gyenge (vagy Gâteaux) deriváltja.

Könnyű belátni, hogy ha $f: E \to R$, $\delta f(x_0; h)$ pedig létezik minden $y \in Dx_0$ pontban és végesen folytonos az x_0 pontban, akkor a $\delta f(x_0; h)$ a h-nak lineáris, de nem feltétlenül folytonos funkcionálja.

4. Definició: Legyen az $f: E \to F$ függvény az x_0 pont egy U környezetében értelmezve. Ha létezik egy olyan $Df(x_0): E \to F$ folytonos lineáris leképezés, hogy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(x_0)h + \epsilon(x_0; h),$$

ahol $\|\epsilon\| / \|h\| \to 0$, ha $\|h\| \to 0$; akkor $Df(x_0)$-át az f x_0 pontbeli erős (vagy Fréchet) deriváltjának mondjuk.

A továbbiakban az E lineáris normált térből az F lineáris normált térbe képző folytonos lineáris leképzések terét $L(E,F)$-el jelöljük. Speciálisan, ha $F = R$, $L(E,R) = E^*$, az E duálisa.

Ha az f az U halmaz minden pontjában F-differenciálható, a $Df(x)$ $(x \in U)$ függvény az U halmazt képezi le az $L(E,F)$-be. Ha ez a leképzés folytonos, akkor az f függvényt folytonosan F-differenciálhatónak mondjuk.

Ha E pre-Hilbert – vagyis lineáris, normált, és rendelkezik $< u,v >: E \times E \to R$ belső szorzattal is – előfordulhat, hogy folytonos és lineáris funkcionálok kanonikusan azonosíthatók a pre-Hilbert tér elemeivel. Ez indokolja a következőt:

5. Definició: Legyen $f: E \to R$ értelmezve a $D \subset E$ végesen nyílt halmazon (E pre--Hilbert tér), és tegyük fel, hogy f G-deriválható az x_0 pontban. Ha létezik egy olyan $\nabla f(x_0) \in E$ elem, hogy $\delta f(x_0;h) = < \nabla f(x_0), h >$ minden $h \in E$ elemre, akkor a $f(x_0)$ elemet az f függvény x_0 pontbeli *(gyenge) gradiensének* nevezzük.

Megjegyzés: Ha az f-nek létezik x_0 pontban a gradiense, a $\delta f(x_0;h)$ nemcsak lineáris, hanem folytonos funkcionálja h-nak. Ugyanilyen módon lehetne az erős gradienst is definiálni, de erre a fogalomra nem lesz szükség, így a gradiens végig ”gyenge gradienst” jelent.

3. EXTREMÁLIS FELADAT PRE-HILBERT TÉRBEN

Ebben a szakaszban E pre-Hilbert teret jelöl. Először fogalmazzuk meg a feladatot.

6. Definició: Legyenek az $f, \psi_1, \ldots, \psi_p, \psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$ funkcionálok a $D \subset E$ halmazon értelmezve. Legyen

(1) $$M = \{x \in E: \ \psi_i(x) = 0, \ 1 \leq i \leq p\},$$

(2) $$G = \{x \in E: \ \psi_i(x) \leq 0, \ p < i \leq n\}.$$

Az $x_0 \in M \cap G$ pont az f funkcionál *feltételes relatív minimumhelye,* ha van x_0-nak egy olyan U környezete, hogy $f(x_0) \leq f(y)$ minden $y \in U \cap M \cap G$ pontra.

7. Definició: Legyen $x_0 \in M$, és létezzenek a $\nabla\psi_1(x_0), \ldots, \nabla\psi_p(x_0)$ gradiensek. Ha $T_0 = \{h \in E: \langle \nabla\psi_i(x_0), h \rangle = 0, \ 1 \leq i \leq p\}$, akkor a $T_{x_0} = x_0 + T_0$ halmazt az M sokaság x_0 pontbeli *érintőterének* nevezzük.

A következőkben bizonyítás nélkül közöljük az [1] -ben levezetett szükséges feltételt az f funkcionál relatív minimumára egyenlőség típusú feltételek mellett. Ez a tétel viszonylag keveset követel meg a szereplő funkcionálok és deriváltjaik értelmezési tartományairól, ezért pl. az irányításelméletben jól használható.

1. Tétel: (i) Legyenek $f, \psi_i, \ldots, \psi_p: E \to R$ a $D \subset E$ végesen nyílt halmazon értelmezve. Legyen x_0 az f relatív minimumhelye az (1) feltétel mellett, $x_0 \in M$.

(ii) Tegyük fel, hogy a $\nabla\psi_1(y), \ldots, \nabla\psi_p(y)$ gradiensek léteznek és végesen folytonosak, ha y az x_0 egy D_{x_0} csillagkörnyezetében van. Ugyanitt legyen értelmezve $\nabla f(y)$, és legyen végesen folytonos az x_0 pontban.

(iii) A $\nabla\psi_1(x_0), \ldots, \nabla\psi_p(x_0)$ gradiensek alkossanak lineárisan független rendszert E-ben.

Ha $\nabla f(x_0) \neq 0$, van egyértelműen meghatározott olyan $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = 0$ vektor, hogy

(3) $$\nabla f(x_0) = \sum_1^p \lambda_j \nabla\psi_j(x_0).$$

Ez a tétel a Lagrange-féle multiplikátor szabály általánosítása absztrakt terekre. A következőkben ehhez hasonló tételt bizonyítunk be, most már (2) típusú feltételt is megengedve.

Az (1) és (2) feltételeket vizsgálva az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy

$$\psi_i(x_0) = 0, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

$$\psi_i(x_0) \neq 0, \qquad r < i \leq n,$$

ahol $p \leq r \leq n$. Definiáljuk a következő sokaságot:

$$N_r = x \in E: \ \psi_i(x) = 0 \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Jelöljük most T_{x_0}-lal az N_r x_0 pontbeli érintőterét, és legyen $T_0 = T_{x_0} - x_0$.

A tételt ezután a következő formában mondjuk ki:

2. Tétel: (i) Legyenek $f, \psi_1, \ldots, \psi_n$: $E \to R$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon, $\psi_{p+1}, \ldots, \psi_n$ folytonosak az $x_0 \in U$ pontban. Legyen x_0 az f funkcionál relatív minimumhelye az (1) és (2) feltételek mellett.

(ii) Tegyük fel, hogy a $\nabla \psi_1(y), \ldots, \nabla \psi_r(y)$ gradiensek léteznek és végesen folytonosak az x_0 egy D_{x_0} csillagkörnyezetében ($D_{x_0} \subset U$). Ugyanitt legyen értelmezve a $\nabla f(y)$ gradiens is, amely az x_0 pontban végesen folytonos.

(iii) Alkossanak a $\nabla \psi_1(x_0), \ldots, \nabla \psi_r(x_0)$ gradiensek lineárisan független rendszert E-ben.

Ha $\nabla f(x_0) = 0$, akkor van olyan $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \in R^n$ vektor, hogy

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla \psi_i(x_0) \\ &\text{b)} \quad \lambda_i \leqslant 0 \qquad (p+1 \leqslant i \leqslant n) \\ &\text{c)} \quad \lambda_i \psi_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Mivel $\psi_i(x_0) < 0$ $(r+1 \leqslant i \leqslant n)$, x_0-nak van olyan V környezete, hogy $\psi_i(x) < (r+1 \leqslant i \leqslant n$ és $x \in V$ esetén. Ezért x_0 relatív minimumhelye f-nek az (1) és a

$$(2)' \qquad G' = \{x \in E: \psi_i(x) \leqslant 0 \quad p+1 \leqslant i \leqslant r\}$$

feltétel mellett, tehát relatív minimum az N_r sokaságon is. Az 1. tétel szerint van olyan $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq 0$ vektor, hogy

$$(5) \qquad \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla \psi_i(x_0).$$

A b) állítás bizonyításánál tegyük föl, hogy van egy $\lambda_0 > 0$ együttható $(p+1 \leqslant i_0 \leqslant r)$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $i_0 = r$. Az (iii) feltétel miatt az

$$(6) \qquad < \nabla \psi_i(x_0), x > = a_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

egyenletrendszernek minden $a_i \in R$ mellett van megoldása. Legyen $a_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ és $a_r = a_0 < 0$ jobboldal esetén a (6) megoldása a $h \in E$ elem. Legyen T'_{x_0} az $N_{r-1} = \{x \in E: \psi_i(x) = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant R-1\}$ sokaság érintőtere az x_0 pontban. Nyilván $x_0 + h \in T'_{x_0}$. (5)-ből

$$< \nabla f(x_0), h > = \lambda_r \nabla \psi_r(x_0), h > .$$

Mivel:

(7)
$$< \nabla \psi_r(r_0), h > = a_0 < 0 , \quad a$$
$$< \nabla f(x_0), h > < 0 .$$

Az $x_0 + h$ segítségével konstruálunk egy, az (1),(2) feltételnek eleget tevő pontot. $y_{st} \in E$ jelölje a következő pontot:

$$y_{st} = x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} t_i \nabla \psi_i(x_0)$$

ahol $s, t_i \in R$. Definiáljuk az $F_i(t,s)$: $R^r \to R$ függvényt a következő módon:

(8)
$$F_i (t,s) = \psi_i (y_{st}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant r - 1 .$$

Az F_i függvényeknek a következő tulajdonságai vannak:

1. $F_i (0,0) = \psi_i (x_0) = 0$.

2. Az $F_{ij} = \partial F_i / \partial t_j$ és $F_{is} = \partial F_i / \partial s$ parciális deriváltnak minden $1 \leqslant i, j \leqslant r - 1$ indexre értelmezve vannak, és folytonosak a $0 \in R^r$ egy környezetében.

Ez az (ii) tulajdonság következménye, figyelembe véve, hogy

$$F_{ij}(t,s) = < \nabla \psi_i(y_{ts}), \nabla \psi_j(x_0) > \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant r - 1)$$

$$F_{is}(t,s) = < \nabla \psi_i(y_{ts}), h > .$$

3. $F_{is}(0,0) = 0$, az $F_{ij}(t,s)$ mátrix rangja $r - 1$ a $0 \in R^r$ pont egy környezetében.

Az első tulajdonság annak a következménye, hogy

$$F_{is}(0,0) = < \nabla \psi_i(x_0), h > = 0 \qquad (1 \leqslant r \leqslant r - 1) .$$

A második pedig az (iii) és a parciális deriváltak folytonosságának következménye.

Az 1., 2., és 3. miatt alkalmazható a klasszikus implicit függvény tétel. Eszerint léteznek olyan $G_i(s)$: $R \to R$ függvények, $(1 \leqslant i \leqslant r - 1)$, hogy $F_i(G_1(s), \ldots, G_{r-1}(s), s) = 0$ és folytonosan differenciálható az $s = 0$ pont egy környezetében minden $1 \leqslant i \leqslant r - 1$-re. Minden ilyen függvényre teljesül továbbá, hogy

(9)
$$G_i'(0) = \lim_{s \to 0} G_i(s) / s = 0,$$

mivel $G_i(s) = s\, G_i'(s\Theta)$ $(0 < \Theta < 1)$.

Tekinsük most az $y_s = x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} G_i(s) \nabla \psi_i (x_0)$ pontot. Ha s a $0 \in R$ elég kis környezetében van,

$$\psi_i(y_s) = F_i(G_1(s), \ldots, G_{r-1}(s), s) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r-1),$$

vagyis $y_s \in N_{r-1}$.

Az f és ψ_r funkcionálok G-differenciálhatóságából és (9)-ből következik, hogy

$$\psi_r(y_s) = \psi_r(x_0 + sh + \sum_{i=1}^{r-1} G_i(s)\, \nabla\psi_i(x_0)) = \psi_r(x_0) +$$

(10) $$+\, s < \nabla\psi_r(x_0), h > + \sum_{i=1}^{r-1} G_i'(0) < \nabla\psi_r(x_0), \nabla\psi_i(x_0) > +$$

$$+\, o(s) = \psi_r(x_0) + s < \nabla\psi_r(x_0), h > + o(s)\,.$$

Ugyanígy f-re

(11) $$f(y_s) = f(x_0) + s < \nabla f(x_0), h > + o(s).$$

Mivel $\psi_r(x_0) = 0$ és $< \psi_r(x_0), h > < 0$, elég kis $s > 0$ mellett (10)-ből $\psi_r(y_s) < 0$ következik. Láttuk, hogy $y_s \in N_{r-1}$, ezért y_s eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. (7)-ből és (11)-ből viszont az következik, hogy elég kis $s > 0$ esetén $f(y_s) < f(s_0)$, ami ellentmond annak, hogy x_0 az f relatív minimumhelye az (1) és (2) feltételek mellett. Ezért $\lambda_r \leqslant 0$. Legyen $\lambda_{r+1} = \ldots, = \lambda_n = 0$, ekkor a b, és a c, feltétel is teljesül.

4. EXTREMÁLIS FELADAT BANACH-TÉRBEN

Az előző tétel bizonyításánál alkalmazott módszer kis módosításával egy, bizonyos szempontból általánosabb extremális feladatra is lehet szükséges feltételt adni. Ezt a feladatot – egyenlőség-típusú feltételek mellett – már Luszternyik megoldotta [2]. Ugyanitt található az érintőtérre vonatkozó azon tétel, melyet az előbbi rész implicit függvény tétele helyett használunk fel.

Ebben a részben E, F Banach-teret jelentenek.

Legyen $\varphi\colon E \to F$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)\colon E \to R^p$. Definiáljuk a mellék feltételeket most a következő módon:

(13) $$M = \{x \in\colon \varphi(x) = 0 \in F\},$$

(14) $$G = \{x \in\colon \psi_i(x) \leqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant p\}\,.$$

Szükséges még néhány további meghatározás.

8. Definició: Legyen $y\colon E \to F$, M pedig a (13) sokaság. $x_0 \in M$ sokaság reguláris pontja, ha y folytonosan F-differenciálható x_0-ban és a $\nabla y(x_0\colon E \to F$ értékkészlete az F.

9. Definició: Tegyük fel, hogy $x_0 \in M$ reguláris pont. Legyen $T_0 = \{h \in E\colon D\varphi(x_0) = 0 \in F\}$ a $D\varphi(x_0)$ magja, ekkor a $T_{x_0} = \{x_0 + h\colon h \in T_0\}$ sokaságot az M x_0 pontbeli érintőterének nevezzük.

Most is feltehetjük, hogy

$$\psi_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\psi_i(x_0) < 0 \qquad (r \leqslant i \leqslant p),$$

megengedve az $r = 0$ értéket is. Legyen $N_r = \{x \in E\colon \varphi(x) = 0 \in F,\ \psi_i(x) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Nyilván $x_0 \in N_r$.

3. Tétel. (i) Legyenek $f\colon E \to R$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)\colon E \to R^p$ és $\varphi\colon E \to F$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon. Legyen $x_0 \in U$ az f relatív minimumhelye a (13) és (14) feltételek mellett.

(ii) Tegyük fel, hogy az f, ψ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ és a φ F-deriválhatók, az x_0 egy környezetében,

(iii) és x_0 reguláris pontja az N_r sokaságnak.

Ekkor van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in R^p$ vektor, hogy

a) $Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$;

b) $\mu_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$;

c) $\mu_i \psi_i(x_0) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$.

Megjegyzés: ha $g\colon E \to F$ tetszőleges leképezés, ${}^tg\colon F^* \to E^*$ jelöli a transzponált leképzést. $\lambda \in F^*$-ra

$$({}^tg \cdot \lambda)\, x = \lambda g(x) \quad \text{minden} \quad x \in E\text{-re}.$$

Bizonyítás: Mivel az F-deriválhatóságból következik a folytonosság, a 2. tételnél alkalmazott meggondolással arra jutunk, hogy x_0 az N_r sokaságon is relatív minimumhelye az f-nek. Ljuszternyik tétele szerint [2] van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \in R^r$ vektor, hogy

$$Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\,\lambda + \sum_{i=1}^{r} \mu_i D\psi_i(x_0). \tag{15}$$

A b) állítás bizonyításánál feltesszük megint, hogy $\mu_r > 0$. A bizonyítás tovább teljesen hasonlóan megy.

Az x_0 pont regularitása miatt a

$$D\varphi(x_0)x = a,$$

$$D\psi_i(x_0)x = b_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

rendszer minden $a \in F$ és $b_i \in R$ esetén megoldható. A $b_r = b_0 < 0$, $a = 0 \in F$ és $b_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$ jobboldalhoz tartozó megoldást h-val jelölve, újból fennáll, hogy

(16) $$Df(x_0)h < 0.$$

Nyilvánvaló, hogy x_0 az $N_{r-1} = \{x \in E\colon \varphi(x) = 0 \in F,\ \psi_i(x) = 0\ (1 \leqslant i \leqslant r-1)\}$ sokaságnak is reguláris pontja. Idézzük most az érintőtérről szóló tételt [2], mely az implicit függvény tétel egy általánosítása Banach-terekre. A tétel erre az esetre így szól:

Ha T'_{x_0} az N_{r-1} sokaság érintőtere az x_0 pontban, akkor minden $\bar{x} = x_0 + th \in T'_{x_0}$ ponthoz van olyan $x = x_0 + th + \epsilon(t) \in N_{r-1}$ pont, hogy $\|\epsilon(t)\| = 0(|t|)$.

(ii) miatt felírhatjuk:

(17) $$\psi_r(x_0 + th + \epsilon(t)) = \psi_r(x_0) + tD'\psi_r(x_0)h + \lambda(t),$$

(18) $$f(x_0 + th + \epsilon(t)) = f(x_0) + tDf(x_0)h + \eta(t),$$

ahol megint $\|\lambda(t)\|$ és $\|\eta(t)\| = 0(|t|)$.

(17)-ből következik, hogy $\bar{x}$ a (13) és (17) feltételeknek eleget tesz, (18) és (16)-ból pedig, hogy $f(\bar{x}) - f(x_0) < 0$. Az ellentmondás miatt $\mu_i \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Legyen $\mu_i = 0$ $r + 1 \leqslant i \leqslant p$, ekkor

$$Df(x_0) = {}^t[D(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$$

és teljesül b) és c) is.

5. AZ EXTRÉMUM EGY ELÉGSÉGES FELTÉTELE

A szükséges feltétel élesítésével elégséges feltételt kaphatunk az f funkcionál szélsőértékének létezésére. Ehhez be kell vezetni a magasabbrendű deriváltakat is. E,F jelöljenek most is Banach-tereket.

10. Definició: Legyen az $U \subset E$ halmaz nyílt és $f\colon E \to F$ folytonosan differenciálható az U-n. Ekkor azt mondjuk F C^1 osztálybeli. Az $f\colon E \to F$ C^p osztálybeli leképezés $(p > 1)$ akkor, ha Df C^{p-1} osztálybeli és $D^p f = D(D^{p-1} f)$.

A $D^p f\colon E \to L(E, L(E, \ldots, L(E, F) \ldots))$ az U halmazon van értelmezve, és ismeretes [3], hogy $L(E, L(E, \ldots, L(E,F) \ldots))$ mindig azonosítható $E \times E \times \ldots E = E^p$ direkt szorzaton értelmezett F-be képező folytonos, lineáris leképezésekkel.

Fel fogjuk használni még a Taylor formula általánosítását, amely szintén [3]-ban található.

Taylor formula: Legyen $f: E \to F$ értelmezve az $U \subset E$ nyílt halmazon, $F \in C^p$. Legyenek $x, h \in U$ olyan pontok, hogy $x + th \in U$ $0 \leq t \leq 1$ esetén. Jelöljük h^p-vel a $(h, \ldots, h) \in E^p$ elemet. Ekkor a $D^p f(x + th)$ folytonos t-ben, és

$$(19)\qquad \begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{Df(x)h}{1!} + \ldots + \frac{D^{p-1}f(x)h^{p-1}}{(p-1)!} + \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)} : D^p f(x+th)h^p \, dt. \end{aligned}$$

(Az integrál – értelmezése [3]-ban – az adott feltételek mellett létezik.)

4. Tétel: Legyenek $f: E \to R$, $\varphi: E \to F$ és $\psi_i: E \to R$ $(1 \leq i \leq p)$ az $U \subset E$ nyílt halmazon értelmezve, és a (13) és (17) feltételeknek eleget tevő x_0 pont egy alkalmas V környezetében kétszer folytonosan F-deriválhatók. Teljesüljenek még a következők:

(i) Van olyan $\lambda \in F^*$ funkcionál és $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in R^p$ vektor, hogy

a) $Df(x_0) = {}^t[D\varphi(x_0)]\lambda + \sum_{i=1}^{p} \mu_i D\psi_i(x_0)$,

b) $\mu_i \leq 0$ $(1 \leq i \leq p)$,

c) $\mu_i \psi_i(x_0) = 0$ $(1 \leq i \leq p)$,

(ii) $D\varphi(x_0): E \to F$ ráképezés.

(iii) Legyen $F = f - t\varphi \cdot \lambda - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \psi_i: E \to R$,

és legyen $D^2F(x_0)$-nak az $E \times E$ egységgömbjén egy $a > 0$ alsó korlátja, ekkor az x_0 az f relatív minimuma a (13) és (14) feltételek mellett.

Bizonyítás: Az x_0 nyilván reguláris pontja az M-nek, ezért van egy olyan V környezete, hogy minden $x \in V \cap M$ ponthoz létezik egy $\bar{x} \in T_{x_0}$, amelyre

$$\|x - \bar{x}\| \leq K \, \|\epsilon(x_0; x - x_0)\|,$$

ahol $\epsilon(x_0; x - x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0) - D\varphi(x_0)(x - x_0)$ (Ljuszternyik tétele az érintősokaságról).

Mivel $D^2\varphi(x_0)$ folytonos, (19) felhasználásával

$$(20)\qquad \|x - \bar{x}\| \leq K_1 \, \|x - x_0\|^2$$

minden $x \in V_1 \subset V$, $x \in M$ elemre. (A továbbiakban a V_i-k az x_0 megfelelően választott környezeteit jelölik.) Szükség lesz még két következő becslésre:

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant \|\bar{x} - x\| + \|x - x_0\| \leqslant (K_1\|x - x_0\| + 1)\|x - x_0\|.$$

Minden $x \in V_1 \cap M$-re igaz tehát

$$\|\bar{x} - x_0\| \leqslant K_2\|x - x_0\|. \tag{21}$$

Továbbá,

$$\|\bar{x} - x_0\|^2 \geqslant (\|\bar{x} - x\| - \|x - x_0\|)^2 \geqslant \|x - x_0\| \, (\|x - x_0\| -$$

$$- 2\|\bar{x} - x\|) \geqslant \|x - x_0\|^2 \, (1 - a\, K_1 \, \|x - x_1\|).$$

Megfelelő V_2 környezetben tehát

$$\|\bar{x} - x_0\|^2 \geqslant \frac{\|x - x_0\|^2}{2} \tag{22}$$

$$x \in V_2 \cap M.$$

Vizsgáljuk most meg a következő különbséget:

$$f(x) - f(x_0) = F(x) - F(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \, \psi_i \, (x_0) \geqslant F(x) -$$

$$- F(x_0) = F(\bar{x}) - F(x_0) + F(x) - F(\bar{x}). \tag{23}$$

(23)-nál felhasználtuk (i)-ből a b) és c)-t.

Becsüljük most meg a (23) jobboldalát! Az (i) feltételt használva

$$F(\bar{x}) - F(x_0) = (\int_0^1 (1 - t) D^2 F(x_0 + t(\bar{x} - x_0)) \, (\bar{x} - x_0)^2 \, dt.$$

Mivel D^2F folytonos a V környezetében, a (21) egyenlőtlenséget is figyelembe véve található egy alkalmas $V_3 \subset V_1$ környezet, hogy minden $x \in V_3 \cap M$-re igaz:

$$D^2F(x_0 + t(\bar{x} - x_0)) - D^2F(x_0) \leqslant \frac{a}{2K_2^2}. \tag{24}$$

(24) felhasználásával

$$F(\bar{x}) - F(x_0) = \frac{1}{2} D^2F(x_0)\,(\bar{x} - x_0)^2 + \int_0^1 (1 - t)\,[D^2F\,(x_0 +$$

$$+ t(\bar{x} - x_0) - D^2\,F(x_0)]\,(\bar{x} - x_0)^2 dt \geqslant \frac{1}{2}\,\|D^2\,F(x_0)\|\,\|x - x_0\|^2 -$$

$$- \int_0^1 (1 - t) \cdot \|D^2F(x_1 + t\,(\bar{x} - x_0)) - D^2\,(x_0)\|\,\|\bar{x} - x_0\|^2\,dt.$$

Figyelembe véve (24)-et és (22)-t, kapjuk, hogy minden $x \in V_2 \cap V_3 \cap M$ esetén

$$F(\bar{x}) - F\,(x_0) \geqslant \frac{a}{4}\|x - x_0\|^2. \tag{25}$$

Becsüljük most meg a (23) jobboldalának másik két tagját.

$$F(x) - F(\bar{x}) = \int_0^1 D\,F(\bar{x} + t(x - \bar{x}))\,(x - \bar{x})\,dt =$$

$$= \int_0^1 [Df(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - D\,F(x_0)]\,(x - \bar{x})\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|D\,F(\bar{x} + t\,(x - \bar{x})) - D\,F\,(x_0)\|\,\|x - \bar{x}\|\,dt.$$

Mivel minden $x \in V_1 \cap M$ elemre fennáll $\|\bar{x} + t\,(x - \bar{x}) - x_0\| \leqslant \|\bar{x} - x_0\| + \|x - \bar{x}\| \leqslant \leqslant (K_2 + K_1)\,\|x - x_0\|$, a $D\,F(x)$ folytonossága miatt olyan alkalmas $V_4 \subset V_1$ környezetet választhatunk, hogy minden $x \in V_4 \cap M$ esetén

$$\|DF(\bar{x} + t(x - \bar{x}) - DF(x_0)\| \leqslant \frac{a}{8\,K_1}. \tag{26}$$

A (20) és (26) felhasználásával $x \in V_4 \cap M$-re

$$F(x) - F(\bar{x}) \leqslant \frac{a}{8}\,\|x - x_0\|^2. \tag{27}$$

Legyen $W = V_2 \cap V_3 \cap V_4$, W az x_0 környezete, (25) és (27)-ből rögtön adódik, hogy minden $x \in W \cap M$ esetén

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{a}{8}\,\|x - x_0\|^2 > 0.$$

Köszönetnyilvánítás: Itt szeretném Dr. Kósa Andrásnak köszönetemet kifejezni értékes tanácsaiért.

Irodalom

[1] E.K. Blum: The calculus of variations, functional analysis and optimal control problems, megjelent a Topics in Optimization, Academic Press, New York, 1967. c. gyűjteményben.

[2] L.A. Ljuszternik – V.I. Szobolev: Elementü funkcional'nogo analiza. Nauka, Moszkva, 1965.

[3] J. Dieudonné: Foundations of modern analysis. Academic Press, New York, 1960.

[4] H.H. Goldstine: Minimum problems in functional calculus, Bull. Am. Math. Soc., 46, (1940).

[5] H.H. Goldstine: A multiplier rule in abstract spaces, Bull. Am. Math. Soc., 44, (1938).

S u m m a r y

Boundary problems in abstract spaces

In the first part of this paper we generalize the results given by [1] and [2]. A necessary condition for the extremum of a functional with constraints in pre-Hilbert and Banach spaces is considered here. In the second part a sufficient condition is derived for the existence of the minimum of a functional in a Banach Space.

Р е з ю м е

Экстремальные задачи в абстрактных пространствах

Данная статья обобщает необходимые условия условного минимума функционала в предгильбертовом и банаховом пространстве, указанные в [1] и [2] Устанавливается и достаточное условие минимума в случае банахового пространства.