VESZTESÉGES HÁLÓZAT MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMÁJA

Bakó András

A hálózati feladatok nagy része a minimális (maximális) út és a maximális folyam feladattal oldhatók meg. A veszteséges hálózat minimális út problémáját Charnes és Raike [1] vetette fel és oldotta meg lineáris programozással. A feladat megoldására később a Ford és Fulkerson [3] módszert használó kombinatórikus algoritmust adtunk [10].

A maximális folyam feladatot Robacher [5] vetette fel és oldotta meg, majd Ford és Fulkerson [3] tisztán kombinatórikus algoritmust adott a maximális folyam–minimális vágás tétel bizonyításával.

Cikkünkben a veszteséges hálózat maximális folyam problémájának megfogalmazásával az alapfeladat egy más irányú általánosítását adjuk. A feladatot lineáris programozási feladatra fogalmazzuk át, és végül megemlítünk néhány fontos gyakorlati alkalmazást.

Az irodalomjegyzékben felsoroljuk a fenti alapfeladatok néhány további általánosítását: [2, 4, 6, 7, 8, 9].

Tekintsük az [N, E] digráfot. A digráf élein egy b nem negatív egészértékű függvényt értelmezünk, amelyet kapacitás-függvénynek nevezünk. Az [N, E, b] -t hálózatnak nevezzük. A hálózat minden egyes $(x, y) \in E$ éléhez hozzárendelünk egy $0 \leq k(x, y) \leq 1$ racionális számot.

Az [N, E, b, k] -t veszteséges hálózatnak, a $k(x, y)$ függvényt a hálózat veszteségfüggvényének nevezzük. A $k(x, y)$ függvény értelmezése a következő: ha egységnyi mennyiséget indítunk el az x pontból, az y pontba $k(x, y)$ mennyiség érkezik.

A folyamot veszteséges hálózat esetén a következőképp definiáljuk:

Jelölje x_s a hálózat forráspontját, x_t a nyelőpontját. Az [N, E, b, k] hálózaton az $f(x, y)$ függvényt az x_s pontból az x_t pontba folyó veszteséges folyamnak nevezzük, ha a következők teljesülnek:

$$(1) \qquad \sum_{(x_i,x_j)\in E} f(x_i,x_j) - \sum_{(x_j,x_i)\in E} f(x_j,x_i)\, k(x_j,x_i) = 0 \qquad x_i \in N, \quad x_i \neq x_s, \quad x_i \neq x_t$$

$$(2) \qquad \sum_{(x_s,x_j)\in E} f(x_s,x_j) - \sum_{(x_j,x_s)\in E} f(x_j,x_s)\, k(x_j,x_s) < 0$$

(3) $$\sum_{(x_t,x_j)\in E} f(x_t,x_j) - \sum_{(x_j,x_t)\in E} f(x_j,x_t)\, k(x_j,x_t) < 0$$

és

(4) $$0 \leqslant f(x_i,x_j) \leqslant b(x_i,x_j) \qquad (x_i,x_j) \in E.$$

Az (1) összefüggés azt fejezi ki, hogy minden a forrásponttól és a nyelőponttól különböző pontra a befolyó és a kifolyó folyammennyiség értéke 0. Ezeket a pontokat nevezzük közbülső pontoknak. A (2), (3) kifejezés mutatja, hogy a folyam az x_s pontból az x_t pontba folyik.

A veszteséges folyam feladat meghatározni az (1)-(4) feltételeket kielégítő $f(x, y)$ függvényt, amelyre a (3) kifejezés értéke maximális.

Ahhoz, hogy ezen lineáris programozási feladat mátrixának, jobboldalának és célfüggvényének speciális struktúráját megmutassuk, a feladatot átfogalmazzuk.

Tegyük fel, hogy a hálózatban m pontja és n éle van. A lineáris programozási feladat megfogalmazásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \qquad N = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Jelöljük az $e_1, e_2, \dots, e_n$ éleken a folyamértékeket $f_1, f_2, \dots, f_n$ -nel, a kapacitás értékeket $b_1, b_2, \dots, b_n$ -nel, a folyamértéket a forrás, illetve nyelőpontban f_s, illetve f_t -vel, a veszteségfüggvény értékeit $k_1, k_2, \dots, k_n$ -nel.

Az (1) feltétel szerint a befolyó és kifolyó mennyiségek minden belső pontra egyenlőek. Jelöljük az x_i belső pontba befutó éleket $e_1, \dots, e_r$ -rel, a kifutó éleket pedig $e_{r+1}, e_{r+2}, \dots$ $\dots, e_v$ -vel.

Igy

(5) $$\sum_{i=r+1}^{v} f_i - \sum_{j=1}^{r} f_j k_j = 0.$$

Az (5) m lineáris egyenletet ad.

A (4) szerint az $f_1, f_2, \dots, f_n$ értékekre felső korlát megkötés van:

$$0 \leqslant f_i \leqslant b_i ,$$

ami n további feltételt ad az $f_1, f_2, \dots, f_n$ értékekre.

A feladat mátrixához a forrás és nyelőpontoknak megfelelően két további oszlopot veszünk hozzá. Az f_s változóhoz tartozó oszlopban minden elem 0, kivéve az s ponthoz tartozó sort, ahol - 1 van. A f_t változóhoz tartozó oszlop egyetlen nullától különböző eleme a t ponthoz tartozó sorban van, értéke 1.

A feladat jobboldala: $b = (0, 0, \ldots, 0, k_1, k_2, \ldots, k_n)'$, ahol a nullák száma megegyezik a digráf pontjainak a számával. A célfüggvény első $n+1$ együtthatója nulla, az utolsó pedig 1, azaz $c = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

A feladat meghatározni azt az $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n, f_s, f_t)'$ vektort, amely kielégíti az (5), (6) feltételt (ami (m+n) feltételt ad a változókra), és a

$$c \cdot b = (0, 0, \ldots, 0, 1) \cdot (f_1, f_2, \ldots, f_n, f_s, f_t)' = f_t$$

maximális.

Megjegyezzük, hogy a feladat mátrixa egyedi korlátoktól eltekintve a szállítási feladat mátrixához hasonlít. Minden oszlopában két nullától különböző elem van, egyik értéke 1, a másik $-k_{ij}$.

Mivel az egyedi felső korlátok száma általában igen nagy, így célszerű egyedi felsőkorlát technikával dolgozó programmal megoldani a fenti feladatot.

Végül megemlítjük a feladat néhány fontos gyakorlati alkalmazását:

A veszteséges maximális folyam feladattal megoldható az eddig heurisztikus úton számolt országos nagyfeszültségű hálózat tervezése, illetve az egyes pontokban hirtelen megnövő igény kielégítésének kérdése. Hasonló problémák lépnek fel gázhálózatban, távfűtési hálózatokban, általában minden energiatovábbító hálózatban, valamint csatornahálózatban, öntözéses-, talajvízlecsapoló rendszereknél.

Irodalom

[1] A. Charnes and W.M. Raike: One-pass Algorithms for some Generalized Network Problems, Opns. Res. 14., 914-924 (1966).

[2] Ju.M. Ermoljev – I.M. Melnyik: Eksztremálnüje Zadacsi na Grafax, Naukova Dumka, Kiev, 1968.

[3] L.R. Ford and D.R. Fulkerson: Maximal flow trough a Network, Canad. J. Math. 8, 399-404 (1956).

[4] D.R. Fulkerson: Flow Networks and Combinatorial Operations Research, The Amer. Math. Mont. 13, 115-137 (1966).

[5] J.T. Robacker: On Network Theory, The RAND Corp. Res. Memor. RM-1498, May 26, 1955.

[6] R.E. Gomory and T.C. Hu: Multi-terminal Network flows, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9., 551-571 (1961).

[7] T.C. Hu: The Development of Network Flow and Releted Areas in Programming, The 7th Int. Math. Programming Symp. at the Hague, on Sept. 16. 1970. MRC. Tech. Summ. Rep. 1096, Aug. 1970.

[8] Klafszky E.: Legrövidebb út meghatározása időtől függő élhosszakkal bíró hálózatban, MTA SzK Közlemények 3., 29-35 (1967).

[9] Komáromi É. és Arany I.; Hálózati feladatok, Szemináriumi Füzetek 3., 1971.

[10] Bakó A.: A legrövidebb út meghatározása veszteséges hálózatban, MTA SzK Közlemények 5., 33-43 (1969).

Summary

The problem of maximum flow of a network with losses

The majority of the network problems can be solved by the minimal (maximal) path and the max maximal flow algorithm. The problem of the minimal path in a network having gains was solved for the first time by Charnes and Raike [1] through the technique of linear programming. We gave a combinatorial algorithm using the Ford-Fulkerson method.

The maximal flow problem was first put forward by Robacker [5], and Ford and Fulkerson [3] gave a purely combinatorial algorithm by proving the maximal flow-minimal cut theorem.

In our paper a generalization of another direction of the basic problem is expounded by the formulation of the maximal flow of a network having gains. The problem is transposed to a linear programming problem and some important practical applications are mentioned in the end.

In the literature we enumerate several further generalizations of the above basic problems: [2, 4, 6, 7, 8, 9].

Резюме

Проблема максимального потока сети с потерями

Большая часть сетевых задач разрешается с помощью поиска минимального /максимального/ пути и максимального потока.. Проблему минимального пути сети с потерями поставили Чарнес и Райке [1] и разрешили методами линейного программирования.

Для разрешения этой проблемы дается комбинаторический алгоритм [10], использующий метод Форда и Фулмерсона [3].

Проблему максимального потока поставил и разрешил Робашер [5], позднее Форд и Фулмерсон разработали чисто комбинаторический алгоритм с доказательством теоремы максимального потока минимального разреза.

В этой статье дается другое обобщение максимального потока сети с потерями. Проблема решается с помощью линейного программирования и упоминается о нескольких важных практических применениях.

В списке литературы перечисляются некоторые обобщения вышеупомянутых основных проблем.