Stacionárius Gauss Markov folyamat csillapodási paraméterének konfidencia határai

Benczur András

Tekintsük a $\xi(t)$ stacionárius Gauss Markov folyamatot, amely a

(1) $$d\xi(t) = -\lambda\xi(t)dt + d\zeta(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek tesz eleget, ahol $\zeta(t)$ Wiener-folyamat,

$$Md\zeta(t) = 0 \quad \text{és} \quad M(d\zeta)^2 = \sigma_\zeta^2 dt.$$

A $\xi(t)$ folyamat korrelációs függvénye

(2) $$R(t) = \sigma_\xi^2 e^{-\lambda|t|}$$

alakú lesz, ahol $M(d\xi(t))^2 = \sigma_\xi^2 dt$ (lásd Arató [1]). A σ_ζ és σ_ξ együtthatók között a $\sigma_\zeta^2 = 2\lambda\sigma_\xi^2$ összefüggés áll fenn.

A σ_ξ illetve σ_ζ paraméterek már egy realizáció ismeretében meghatározhatók, mert BAXTER tétele alapján

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1})\to 0} \sum [\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})]^2 = \sigma_\zeta^2 T \qquad \text{(1 valószínűséggel)}$$

ahol $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ egy felosztása a $[0,T]$ intervallumnak. Ily módon a $\xi(t)$ folyamat ismeretlen paramétereinek száma egyre csökkenthető, hiszen $M\xi(t) = 0$ következik az $Md\zeta(t) = 0$ feltevésből. A továbbiakban tehát a λ, úgynevezett csillapodási paraméter becslésével foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\sigma_\zeta = 1$.

Jelölje L a közönséges Lebesgue mértéket a $\xi(0)$ számegyenesen és W a $\xi(t)-\xi(0)$ növekmények terén a $[0,T]$ intervallumban a Wiener-mértéket. Legyen $V = L\times W$ ezen két mérték szorzata. Ha P jelöli a fenti $\xi(t)$ folyamat által generált mértéket a $[0,T]$ intervallumban, akkor a P mérték abszolut folytonos V-re nézve és a V szerinti Radon-Nikodym deriváltja (lásd Ch. Striebel [5])

(3) $$\frac{dP}{dV} = \frac{\lambda}{\pi} \exp\left\{-\lambda\left[s_1^2 - \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\varkappa s_2^2\right]\right\}$$

lesz, ahol $\varkappa = \lambda T$,

$$s_1^2 = \frac{1}{2}[\xi(0)^2 + \xi(T)^2], \qquad s_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)\,dt.$$

Ebből látható, hogy λ (vagy $\varkappa$) elégséges statisztika rendszerét az s_1^2, s_2^2 statisztikák adják. Irjuk fel a λ paraméterre vonatkozó maximum likelihood egyenletet. (3)-ból

$$\log \frac{dP}{dV} = c + \frac{1}{2}\log\lambda - \lambda[s_1^2 - \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\lambda T s_2^2]$$

alapján λ maximum likelihood becslése a

$$\frac{1}{2\lambda} - [s_1^2 - \frac{1}{2}T] - \lambda T s_2^2 = 0$$

egyenlet, azaz a

(4) $$\lambda^2 T s_2^2 + \lambda[s_1^2 - \frac{1}{2}T] - \frac{1}{2} = 0$$

egyenlet megoldása lesz.

Látható, hogy (4) egyetlen pozitív megoldása

$$\hat{\lambda} = \frac{-[s_1^2 - \frac{1}{2}T] + \sqrt{[s_1^2 - \frac{1}{2}T]^2 + 2Ts_2^2}}{2Ts_2^2}.$$

Ebből következik, hogy a $\hat{\lambda} > z$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha a (4) egyenlet baloldalán álló másodfokú kifejezés a $\lambda = z$ helyen negativ. Tehát

$$P_\lambda\{\hat{\lambda} > z\} = P_\lambda\{z^2 T s_2^2 + z s_1^2 - \frac{1}{2}Tz - \frac{1}{2} < 0\}.$$

Bevezetve a $z = \lambda x$ és $\eta_\lambda(x) = \lambda^2 x^2 T s_2^2 + \lambda x s_1^2$ jelölést,

(5) $$P_\lambda\{\hat{\lambda} > \lambda x\} = P_\lambda\{\eta_\lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}T\lambda x\}.$$

Ahhoz tehát, hogy a $\hat{\lambda}$ becslés eloszlását meghatározhassuk, az s_1^2 és s_2^2 statisztikák együttes eloszlására lenne szükségünk, amit azonban ezideig nem sikerült meghatározni. Meg tudjuk viszont határozni karakterisztikus függvényüket. A $\xi(0) = x$ feltétel mellett differenciálegyenletet írunk fel a feltételes karakterisztikus függvényre. Legyen ugyanis

(6) $$u(T, x) = M\{e^{i(\alpha_1 s_1^2 + \alpha_2 T s_2^2)} \mid \xi(0) = x\}.$$

A folyamat tulajdonságaiból következik, hogy az $u(T, x)$ függvény az x változó szerint tetszőleges sokszor differenciálható (lásd pl. Gihman-Szkorohod [4]). Ezt felhasználva a következő módon állíthatjuk elő az u függvényt a $T+\Delta T$ helyen:

$$u(T+\Delta T) = \int_{-\infty}^{\infty} M\{M\{e^{i(\alpha_1 s_1^2+\alpha_2(T+\Delta T)s_2^2}\Big|\xi(0)=x\}\Big|\xi(\Delta T)=x_1\}\, p(\xi(\Delta T)=x_1\Big|\xi(0)=x)dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} M\{M\{e^{i\alpha_1\frac{\xi^2(0)-\xi^2(\Delta T)}{2}+i\alpha_2\int_0^{\Delta T}\xi^2(t)dt}\Big|\xi(0)=x,\xi(\Delta T)=x_1\}\}u(T,x_1)p\,dx_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}}\left[u(T,x)+\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=x}(x_1-x)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big|_{x_1=x}\frac{(x_1-x)^2}{2}+\ldots\right]$$

$$\cdot\left\{1-\frac{i\alpha_1}{2}\left((x_1-x)^2+2x(x_1-x)\right)-\frac{\alpha_1^2}{8}\left(4x^2(x_1-x)^2+\ldots\right)+\ldots\right\}\cdot$$

$$\cdot(1+i\alpha_2 x^2\Delta T)\,dx_1 .$$

Ebből $\Delta T \longrightarrow 0$ esetén a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk $u(T,x)$-re, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}}(x_1-x)dx_1 = -\lambda x\Delta T \tag{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta T}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-x+\lambda x\Delta T)^2}{2\Delta T}}(x_1-x)^2dx_1 = \Delta T+\lambda^2x^2(\Delta T)^2 ,$$

s a magasabb rendű momentumok $o(\Delta T)$ nagyságrendűek:

(8) $$\frac{\partial u}{\partial T}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[-x(\lambda+i\alpha_1)\right]+u\left[x^2\left[\lambda i\alpha_1+i\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{2}\right]-\frac{i\alpha_1}{2}\right].$$

A (8) egyenlet megoldásaként az $u(0,x)=e^{i\alpha_1 x^2}$ kezdeti feltétel mellett az s_1^2, s_2^2 statisztikák közös karakterisztikus függvénye a következő alakban adódik (lásd Arató [1])

(9) $$\varphi_{s_1^2,s_2^2}(\alpha_1,\alpha_2)=$$
$$=\frac{2\sqrt{k}\,e^{\frac{k}{2}}(k^2-2Ti\alpha_2)^{\frac{1}{4}}}{\left[(k-Ti\alpha_1+\sqrt{k^2-2Ti\alpha_2})^2e^{\sqrt{k^2-2Ti\alpha_2}}-(k-Ti\alpha_1-\sqrt{k^2-2Ti\alpha_2})^2e^{-\sqrt{k^2-2Ti\alpha_2}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Az egyszerűsítés kedvéért a továbbiakban legyen $T=1$. Ez nem jelenti az általánosság megszorítását, mert a $t'=\frac{t}{T}$ és $x'=x\sqrt{\frac{T}{\sigma_\zeta^2}}$ transzformációval $T=1$ és $\sigma_\zeta^2=1$ elérhető. Az $\eta_\lambda(x)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye (9) alapján

(10) $$\varphi_{\eta_\lambda(x)}(\alpha)=$$
$$=\frac{2e^{\frac{\lambda}{2}}(1-2i\alpha x^2)^{\frac{1}{4}}}{\left[(1-i\alpha x+\sqrt{1-2i\alpha x^2})^2e^{\lambda\sqrt{1-2i\alpha x^2}}-(1-i\alpha x-\sqrt{1-2i\alpha x^2})^2e^{-\sqrt{1-2i\alpha x^2}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel s_1^2 és s_2^2 pozitív valószínűségi változók, (10)-ből $-i\alpha=p$ helyettesítéssel és $\frac{1}{p}$-vel való szorzással megkapjuk az $\eta_\lambda(x)$ valószínűségi változó $F_\eta(z)$ eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltját:

$$F_\eta^*(p)=\frac{2e^{\frac{\lambda}{2}}(1+2px^2)^{\frac{1}{4}}}{p\left[(1+px+\sqrt{1+2px^2})^2e^{\lambda\sqrt{1+2px^2}}-(1+px-\sqrt{1+2px^2})^2e^{-\sqrt{1+2px^2}}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Az F és F^* közötti ismert összefüggés szerint

(11) $$F_\eta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pz}F^*(p)\,dp\,.$$

Ennek alapján az eloszlásfüggvény meghatározása numerikus integrálással elvégezhető. A (11) alatti integrál a $p=\sigma+is$ jelöléssel

$$F_\eta(z) =$$

$$= \frac{e^{\sigma x}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz} (1+2x^2\sigma + i2x^2 s)^{\frac{1}{4}} \, e^{\frac{\lambda}{2}(1-\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2 s})} \, ds}{\sigma+is\left[(1+\sigma x+ixs+\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2 s})^2-(1+\sigma x+ixs-\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2 s})^2 e^{-2\lambda\sqrt{1+2x^2\sigma+i2x^2 s}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Mivel a jobboldalon szereplő integrálnak csak a valós részére van szükségünk, az

$$r = \left((1+2x^2\sigma)^2 + (2x^2 s)^2\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x^2 s}{1+2x^2\sigma}$$

jelöléssel

$$F_\eta(z) = \frac{e^{\sigma z}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(sz+\frac{\varphi}{2}-\frac{\lambda}{2} r\sin\varphi)} \sqrt{r}\, e^{\frac{\lambda}{2}(1-r\cos\varphi)} \, ds}{(\sigma+is)\left[[A_1+iA_2]^2-[B_1+iB_2]^2(\cos 2\lambda r\sin\varphi - i\sin 2\lambda r\sin\varphi)e^{-2\lambda r\cos\varphi}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ahol

$$A_1 = A_1(s) = 1+\sigma x + r\cos\varphi \qquad A_2 = A_2(s) = xs + r\sin\varphi$$

$$B_1 = B_1(s) = 1+\sigma x - r\cos\varphi \qquad B_2 = B_2(s) = xs - r\sin\varphi$$

Legyen most

$$\alpha_1 = A_1^2 - A_2^2 - \{(B_1^2-B_2^2)\cos 2\lambda r\sin\varphi + 2B_1B_2\sin 2\lambda r\sin\varphi\}\, e^{-2\lambda r\cos\varphi}$$

$$\beta_1 = 2A_1A_2 + \{(B_1^2-B_2^2)\sin 2\lambda r\sin\varphi - 2B_1B_2\cos 2\lambda r\sin\varphi\}\, e^{-2\lambda r\cos\varphi}$$

$$r_1 = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2} \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$r_2 = s^2 + \sigma^2 \qquad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{s}{\sigma}$$

Akkor - csak a valós részt véve figyelembe

$$F(z) = \frac{e^{\sigma z}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(sz + \frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2} r \sin\varphi - \varphi_1 - \varphi_2\right) \sqrt{\frac{r}{r_1 r_2}}\, e^{\frac{\lambda}{2}(1 - r\cos\varphi)}\, ds .$$

A számolás során legalkalmasabbnak a $\sigma = \frac{1}{z}$ választás adódott. Könnyen ellenőrizhető, hogy az integrandus páros függvény. Ezek után az integrálás határát úgy választottuk $[0, A]$ -nak, hogy az $[A, 2A]$ intervallumon az integrál értéke a kívánt pontosságnál, 10^{-4}-nél kisebb legyen. Legtöbb esetben az $A = \frac{100}{\lambda x}$ választás megfelelt. előfordult azonban, hogy ennél két-, sőt 4-szer nagyobb értéket kellett választani. Egy integrál kiszámítása az URAL-2 gépen 1,5-25 percet vett igénybe. A táblázatban zárójelben található értékek az

(12) $$F\left(\frac{\lambda x}{2} + \frac{1}{2}\right) = p$$

egyenlet megoldásai, ahol p és λ előre adott értékek. Az egyenlet megoldásához x -ben iterációt kell végrehajtani. Abból a célból, hogy kevesebb integrál kiszámitását kelljen elvégezni, az iteráció kiinduló értékeit már más λ -ra kiszámitott értékek figyelembevételével választottuk és az iterációt a közelítő értékekből kézi úton végzett interpolációval hajtottuk végre.

A táblázatban a $\lambda < 1$ értékekre $p \geq 0,9$ mellett nem számitottuk ki az x értékeket, mert itt az integrálok kiszámitása igen hosszadalmas, másrészt pedig az $x = x(\lambda, p)$ függvény az $[0, 1]$ intervallumon λ -ban jó közelítéssel lineárisnak tekinthető.

A $\lambda = 0$ esetben szereplő x értéket χ^2 táblázatból nyertük. Ugyanis (10) alapján könnyű belátni, hogy

$$\varphi_\eta(\alpha) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - i\alpha x}}, \text{ ha } \lambda \longrightarrow 0, \text{ tehát a } \frac{2\eta}{x}$$

valószínűségi változó egy szabadságfokú χ^2 eloszlású, azaz

$$P\left\{\frac{2\eta_0}{x} < z^2\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2}\, du .$$

Ebben az esetben a χ^2 eloszlás z_p kvantilisével a

$$P_0\left\{\eta_0(x) < \frac{1}{2}\right\} = p$$

egyenlet x megoldása $x = \frac{1}{z_p}$ összefüggésben van.
A $\lambda \to \infty$ esetben igaz a normális eloszlással való közelítés:

$$P\{\hat{\lambda} < \lambda x\} = P\{\hat{\lambda} < \lambda + z\sqrt{\lambda}\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du.$$

A kis és nagy λ értékekre (0,01, 0,05 ill. 500, 1000, 10000) a számitásokat a közelítő képletek és határeloszlások alkalmazhatóságának vizsgálatára végeztük el. Ennek eredményét egy későbbi cikkben közöljük.

A táblázat segítségével $\hat{\lambda}$-ra könnyen megszerkeszthetjük a konfidencia intervallumokat. Az (5) összefüggés alapján ugyanis a (12) egyenlet megoldása ekvivalens az

$$P_\lambda(\hat{\lambda} > \lambda x) = P_\lambda\{\hat{\lambda} > z\} = F(z,\lambda) = p$$

egyenlet megoldásával. Ismerjük tehát a $\hat{\lambda}$ becslés eloszlásának $z_p(\lambda)$ kvantiliseit. A táblázat alapján a $z_0(\lambda)$ függvény λ-ban monotonnak tekinthető. Ezek után λ-ra p megbizhatóságú felső (alsó) konfidenciahatárt a következő eljárással nyerhetünk: az

$$F(\hat{\lambda},\lambda) = p \qquad (0 < p < 1)$$

egyenlet $\lambda_p(\hat{\lambda})$ megoldása (λ-ban), mely a $z_p(\lambda)$ inverz függvénye, adja az alsó konfidencia határt $1-p$ megbizhatósággal. A $\lambda_p(\hat{\lambda})$ konfidencia határ meghatározásához tehát a $\hat{\lambda} = z_p(\lambda)$ egyenletet kell megoldani a mellékelt táblázat inverz interpolációjával.

Szerkesztéssel: megrajzolva a $z_p(\lambda)$ függvényt a $\hat{\lambda} = z_p(\lambda)$ összefüggésnek eleget tevő λ érték adja a konfidencia határt.

A valószínűségi változó kvantiliseinek táblázata

A táblázatban a $P_\lambda\{\hat{\lambda} > z\} = p$ összefüggést kielégítő z és – zárójelben – az $x = \frac{z}{\lambda}$ értékek adottak.

λ \ p	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	(637000)	(6370)	(1020)	(255.0)	(63.60)	(0.369)	(0.260)	(0.199)	(0.151)	(0.092)
0.01	10.60	4.232	2.274	1.170	0.4734					
	(1060)	(423.2)	(227.4)	(117.0)	(47.34)					
0.05	11.195	6.330	4.0065	2.5130	1.3375					
	(263.9)	(126.6)	(80.13)	(50.26)	(26.75)					
0.1	14.38	7.344	4.879	3.268	1.908					
	(143.8)	(73.44)	(48.79)	(32.68)	(19.08)					
0.2	15.664	8.468	5.902	4.154	2.624					
	(78.32)	(42.34)	(29.51)	(20.77)	(13.12)					
0.3	16.488	9.207	6.561	4.746	3.120					
	(54.96)	(30.69)	(21.87)	(15.82)	(10.40)					
0.4	17.080	9.756	6.080	5.208	3.517					
	(42.70)	(24.39)	(17.70)	(13.02)	(8.793)					
0.5	17.670	10.230	7.515	5.605	3.8610	0.2085	0.1510			
	(35.34)	(20.46)	(15.03)	(11.21)	(7.722)	(0.417)	(0.302)			
0.6	18.108	10.638	7.896	5.9532	4.1676					
	(30.18)	(17.73)	(13.16)	(9.922)	(6.946)					
0.7	18.522	11.011	8.239	6.2713	4 4471					
	(26.46)	(15.73)	(11.77)	(8.959)	(6.353)					
0.8	18.896	11.360	8.560	6.5648	4.7103					
	(23.62)	(14.20)	(10.70)	(8.206)	(5.887)					

λ \ p	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
0.9	19.260 (21.40)	11.682 (12.98)	8.8587 (9.843)	6.8409 (7.601)	4.9446 (5.494)					
1	19.60 (19.60)	11.98 (11.98)	9.140 (9.140)	7.103 (7.103)	5.188 (5.188)	0.445 (0.445)	0.332 (0.332)	0.269 (0.269)	0.205 (0.205)	0.130 (0.130)
1.5	21.060 (14.04)	13.3080 (8.872)	10.3845 (6.923)	8.2590 (5.506)	6.2325 (4.155)	0.7005 (0.467)	0.5325 (0.355)	0.4275 (0.285)	0.3360 (0.224)	0.2145 (0.143)
2	22.32 (11.16)	14.462 (7.231)	11.426 (5.713)	9.272 (4.636)	7.156 (3.578)	0.972 (0.486)	0.750 (0.375)	0.606 (0.303)	0.480 (0.240)	0.310 (0.155)
2.5	23.4750 (9.390)	15.515 (6.206)	12.4575 (4.983)	10.2050 (4.082)	8.0100 (3.204)	1.2575 (0.503)	0.9850 (0.394)	0.8000 (0.320)	0.6500 (0.256)	0.4125 (0.165)
3	24.342 (8.114)	16.506 (5.502)	13.389 (4.463)	11.082 (3.694)	8.811 (2.937)	1.557 (0.519)	1.233 (0.411)	1.111 (0.337)	0.807 (0.269)	0.525 (0.175)
3.5	25.5850 (7.310)	17.4440 (4.984)	14.2800 (4.080)	11.9105 (3.403)	9.5970 (2.742)	1.8655 (0.533)	1.4910 (0.426)	1.2355 (0.353)	0.9975 (0.285)	0.6405 (0.183)
4	26.576 (6.644)	18.352 (4.588)	15.136 (3.784)	12.732 (3.183)	10.352 (2.588)	2.180 (0.545)	1.760 (0.440)	1.468 (0.367)	1.192 (0.298)	0.776 (0.194)
4.5	27.5355 (6.119)	19.2285 (4.273)	15.9705 (3.549)	13.5225 (3.005)	11.0835 (2.463)	2.5020 (0.556)	2.0430 (0.454)	1.7100 (0.380)	1.3905 (0.309)	0.9135 (0.203)
5	28.470 (5.694)	20.090 (4.018)	16.795 (3.359)	14.395 (2.879)	12.755 (2.351)	2.835 (0.567)	2.325 (0.465)	1.965 (0.393)	1.615 (0.323)	1.070 (0.214)
5.5	29.3865 (5.343)	20.9275 (3.805)	17.5835 (3.197)	15.0535 (2.737)	12.5125 (2.275)	3.1680 (0.576)	2.6235 (0.477)	2.4640 (0.448)	1.8315 (0.333)	1.2265 (0.223)
6	30.318 (5.053)	21.750 (3.625)	18.366 (3.061)	15.792 (2.632)	13.282 (2.212)	3.510 (0.585)	2.922 (0.487)	2.490 (0.415)	2.061 (0.347)	1.392 (0.232)
6.5	31.1610 (4.794)	22.5615 (3.471)	19.1295 (2.943)	16.5295 (2.543)	13.8905 (2.137)	3.8545 (0.593)	3.2305 (0.497)	2.7690 (0.426)	2.3140 (0.356)	1.5730 (0.242)

λ \ p	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
7	32.025	23.359	19.894	17.248	14.574	4.207	3.542	3.052	2.555	1.764
	(4.575)	(3.337)	(2.842)	(2.464)	(2.082)	(0.601)	(0.506)	(0.436)	(0.365)	(0.252)
7.5	32.8882	24.1500	20.6475	17.9550	15.2475	4.5600	3.8550	3.3375	2.8200	1.9575
	(4.385)	(3.220)	(2.753)	(2.394)	(2.033)	(0.608)	(0.514)	(0.445)	(0.376)	(0.261)
8	33.728	24.920	21.384	18.672	15.912	4.920	4.176	3.632	3.088	2.168
	(4.216)	(3.115)	(2.673)	(2.334)	(1.989)	(0.615)	(0.522)	(0.454)	(0.386)	(0.271)
8.5	34.5610	25.6870	22.1170	19.3715	16.5750	5.2700	4.5050	3.9270	3.3490	2.3630
	(4.066)	(3.022)	(2.602)	(2.279)	(2.950)	(0.620)	(0.530)	(0.462)	(0.394)	(0.278)
9	35.388	26.451	22.689	20.070	17.226	5.643	4.842	4.230	3.618	2.592
	(3.932)	(2.939)	(2.521)	(2.230)	(1.914)	(0.627)	(0.538)	(0.470)	(0.402)	(0.288)
9.5	36.1855	27.1700	23.5790	20.7480	17.8790	6.0135	5.1870	4.5315	3.8950	2.812
	(3.809)	(2.860)	(2.482)	(2.184)	(1.882)	(0.633)	(0.546)	(6.477)	(0.410)	(0.296)
10	37.04	27.55	24.28	21.47	18.53	6.38	5.50	4.84	4.20	3.04
	(3.704)	(2.755)	(2.428)	(2.147)	(1.853)	(0.638)	(0.550)	(0.484)	(0.420)	(0.304)
20	52.200	42.040	37.800	34.4360	30.8960	14.1780	12.7140	11.580	10.380	8.320
	(2.610)	(2.102)	(1.890)	(1.7218)	(1.5448)	(0.7089)	(0.6357)	(0.579)	(0.519)	(0.416)
30	66.270	55.230	50.520	46.7370	42.7080	22.4310	20.4960	18.960	17.340	14.400
	(2.209)	(1.841)	(1.684)	(1.5579)	(1.4236)	(0.7477)	(0.6832)	(0.632)	(0.578)	(0.480)
40	79.800	67.920	62.800	58.6800	54.2320	30.9400	28.5920	26.720	24.680	21.000
	(1.995)	(1.698)	(1.570)	(1.4670)	(1.3558)	(0.7735)	(0.7148)	(0.668)	(0.617)	(0.525)
50	92.900	80.3200	74.8400	70.3950	65.5800	39.6150	36.9000	34.7100	32.350	27.950
	(1.858)	(1.6064)	(1.4968)	(1.4079)	(1.3116)	(0.7923)	(0.7380)	(0.6942)	(0.647)	(0.559)
60	105.780	92.520	86.6820	81.9540	76.7940	52.0140	45.3660	42.8880	40.200	30.300
	(1.763)	(1.542)	(1.4447)	(1.3659)	(1.2799)	(0.8669)	(0.7561)	(0.7148)	(0.670)	(0.585)
70	118.370	104.510	98.3770	93.3800	87.9130	57.3020	53.9560	51.2120	48.2300	42.490
	(1.691)	(1.493)	(1.4054)	(1.3340)	(1.2559)	(0.8186)	(0.7708)	(0.7316)	(0.689)	(0.607)

λ \ P	0.001	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
80	130.800 (1.635)	116.40 (1.455)	109.960 (1.3745)	104.7120 (1.3089)	98.9600 (1.2370)	66.2722 (0.8284)	62.6240 (0.7828)	59.6320 (0.7454)	56.400 (0.0705)	50.080 (0.626)
90	143.100 (1.590)	128.160 (1.424)	121.4550 (1.3495)	115.9650 (1.2885)	109.9350 (1.2215)	75.2940 (0.8366)	71.3880 (0.7932)	68.1570 (0.7573)	64.620 (0.718)	57.870 (0.643)
100	155.32 (1.5332)	139.79 (1.3979)	132.86 (1.3286)	127.15 (1.2715)	120.86 (1.2086)	84.37 (0.8437)	80.21 (0.8021)	76.8 (0.768)	73.0 (0.730)	65.7 (0.657)
500	609.000 (1.218)	580.000 (1.160)	567.0500 (1.1341)	555.800 (1.1116)	543.15 (1.0863)	462.05 (0.9241)	451.4500 (0.9029)	442.600 (0.8852)	432.600 (0.8652)	412.00 (0.824)
1000	1149 (1.149)	1110.6 (1.1106)	1092.6 (1.0926)	1077.3 (1.0773)	1060.00 (1.0600)	945.3 (0.9453)	929.9 (0.9299)	917.00 (0.9170)	902.3 (0.9023)	872.00 (0.872)
10000	10447 (1.0447)	10336 (1.03360)	10282.1 (1.02821)	10236.3 (1.02363)	10183.9 (1.01839)	9821.4 (0.98214)	9771.1 (0.97711)	9727.6 (0.97276)	9677.5 (0.96775)	9574 (0.9574)

Irodalom

[1] Arató Mátyás, Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I. MTA III. Oszt. Közleményei 14. 13-34 (1964).

[2] Arató Mátyás, Оценка параметров стационарного гауссовского марковского процесса
Д. А. Н. 145, 13-16 (1962).

[3] Arató Mátyás, Вычисление доверительных границ для параметра "затухания" комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.
Теория вероятностей и ее применения 13, № 2, 326-333.

[4] И.И.Гихман-А.В.Скороход: Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, Наукова Думка.

[5] Ch. Striebel, Densities for Stochastic Processes
Annals of Math. Stat. 30, 559-567 (1959).

Summary

Confidence limits for the damping parameter of a stationary Gaussian Markovian process.

The one dimensional stationary Gaussian Markovian process $\xi(t)$ $(M\xi(t)=0)$ is given by the covariance function $M\xi(t+s)\xi(s)=\sigma^2 e^{-\lambda|t|}$ where $2\lambda\sigma^2=\sigma_\xi^2$ and σ_ξ^2 are given. The probability distribution of maximum likelihood estimator of the unknown parameter λ is given by the help of the characteristic function of sufficient statistics. The table gives results of numerical integration on computer at the levels p = 0.001, 0.01, 0.025, 0.05, 0.01, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.999 $(0<\lambda<10000)$.

Резюме

Доверительные границы для параметра "затухания" стационарного гауссовского процесса

Рассматривается стационарный гауссовский марковский процесс $\xi(t)$ с мат. ожиданием $M\xi(t) = 0$ и функций ковариации $M\xi(t+s)\xi(s) = \sigma^2 e^{-\lambda|t|}$, где $2\lambda\sigma^2 = \sigma_\xi^2$ и σ_ξ известны. С помощью характеристической функции достаточных статистик вычислена функция распределения оценки наибольшего правдобододобия неизвестного параметра λ. В таблице можно найти p квантили распределений, вычисленные методом численного интегрирования на Э.В.М. Урал-2, при p = 0.001, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.999 $(0<\lambda<10000)$.