A homogén Gauss-Markov folyamatokról

Krámli András

Ebben a dolgozatban bebizonyitjuk a következő tételt:

TÉTEL:

Az 1 valószinűséggel folytonos Gauss-Markov folyamatok osztályában a $d\xi(t) = -A\xi(t)dt - Mdt + B\,dw(t)$ ($w(t)$ a standard Wiener-folyamat) sztochasztikus differenciálegyenletnek elegettevő folyamat átmenetvalószinűsége az egyedüli, amely homogén is.

Annak ellenére, hogy a bizonyítás egyszerű számitásokon alapszik, az ismertebb irodalomban ez a tény nincs megemlitve.

A probléma Ju. A. Rozanov egy kérdésével kapcsolatban merült fel.

BIZONYITÁS:

Ismeretes, hogy a Gauss-Markov folyamat átmenetvalószinűség sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$p(y,t|x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma(t)^2}}\exp\left[-\frac{\left(y-m(t)-\rho\left(\frac{\sigma(t)}{\sigma(s)}\right)(x-m(s))\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma(t)^2}\right].$$

Itt feltesszük, hogy $t \geq s$; $m(s)$ és $\sigma(s)$ - a várhatóérték és szórás - az időnek tetszőleges folytonos függvényei, a $\rho(s,t)$ korrelációs együttható pedig $\rho(s,t) = e^{F(s)-F(t)}$ alakú ($F(t)$ nemcsökkenő függvény).

Minthogy $p(y,t\,|\,x,s)$ úgy tekinthető, mint egy $M_1(t,s)x + M_2(t,s) = \rho\frac{\sigma(t)}{\sigma(s)}x + m(t) - \rho m(s)\frac{\sigma(t)}{\sigma(s)}$ várhatóéetékű és $\sqrt{\sum(t,s)} = \sqrt{(1-\rho^2)\sigma^2(t)}$ szórású normális eloszlású valószinűségi változó sűrűségfüggvénye, a homogenitás szükséges és elégséges feltétele, hogy $M_1(t,s)$, $M_2(t,s)$ és $\sum(t,s)$ függvények csak $(t-s)$-tól függjenek.

Vegyük sorra a fenti függvényeket:

$$M_1(t-s) = e^{F(s)-F(t)}\frac{\sigma(t)}{\sigma(s)} = \frac{e^{-F(t)}\sigma(t)}{e^{-F(s)}\sigma(s)}.$$

A fenti függvényegyenletnek, a folytonos függvények körében csak az $e^{-F(t)}\sigma(t) = Ce^{-At}$ alakú függvény tesz eleget (A és C konstansok). Tehát $M_1(t,s) = e^{-A(t-s)}$. Az így nyert korlátozó feltételt figyelembevéve fejezzük ki $\sum(t-s)$-t:

$$\sum(t-s) = \sigma^2(t) - e^{-2A(t-s)}\sigma^2(s).$$

A jobboldalt átalakítva:

$$\sum(t-s) = e^{-2At}(\sigma^2(t)\, e^{2At} - \sigma^2(s)\, e^{2As}).$$

Jelöljük $\sigma^2(t)e^{2At}$ -t $G(t)$-vel.

Megmutatjuk, hogy a $\lim\limits_{\tau\searrow 0} \frac{\sum(\tau)}{\tau}$ határérték létezik, tehát $G(t)$ differenciálható, és $G'(t) = e^{2At}(\lim\limits_{\tau\searrow 0} \frac{\sum(\tau)}{\tau})$. Kiválasztható olyan nullához tartó $\{\tau^n\}$ sorozat, hogy $\frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \longrightarrow B$ és a határérték véges. (Az ellenkező eset ellentmondáshoz vezetne.) Ha τ^n elég kicsi az e^{-2At} függvény folytonosságából következik

$$\sum(\tau^n) = e^{-2At}[G(s+\tau) - G(s)] \leqq (1+\frac{\varepsilon}{4})\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2A(s+\frac{k+1}{N}\tau^n)}(G(s+\frac{k+1}{N}\tau^n) -$$

$$-G(s+\frac{k}{N}\tau^n) \leqq (1+\frac{\varepsilon}{2})\, N\, \frac{\sum(\frac{\tau^n}{N})}{\tau^n}$$

Hasonlóképpen nyerjük a

$$\sum(\tau^n) \geqq (1-\frac{\varepsilon}{2})\, \frac{N\sum(\frac{\tau^n}{N})}{\tau^n}$$

egyenlőtlenséget. A $\sum(\tau)$ függvény folytonossága miatt elég kis δ-ra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(1-\varepsilon)\frac{\sum(\tau)}{\tau} \leqq \frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \leqq (1+\varepsilon)\frac{\sum(\tau)}{(\tau)} \qquad (\text{ha } \tau < \delta).$$

Minthogy ε tetszőleges volt és $\frac{\sum(\tau^n)}{\tau^n} \longrightarrow B$, $\frac{\sum(\tau)}{\tau} \longrightarrow B$.

Egyszerű számolás igazolja, hogy

$$G(t) = \begin{cases} be^{2At} + c & \text{ha } A \neq 0 \\ Bt + c & \text{ha } A = 0 \end{cases}$$

(ahol $b = -\frac{B}{2A}$) és

$$\Sigma(t-s) = \begin{cases} b - be^{-2A(t-s)} \\ B(t-s) \end{cases}$$

Hasonló meggondolások érvényesek $M_2(t,s)$ függvényre is:

$$M_2(t-s) = \begin{cases} m - me^{-A(t-s)} & \text{ha} \quad A \neq 0 \\ M(t-s) & \text{ha} \quad A = 0 \end{cases} \qquad \left(m = -\frac{M}{A}\right)$$

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az $A > 0$, $A = 0$ illetve $A < 0$ esetnek a stacionárius-, Wiener- illetve az exploziós-folyamat felel meg; sőt az itt szereplő A, B és M paraméterek egybeesnek az eredeti sztohasztikus differenciálegyenlet paramétereivel.

Irodalom

J.L. Doob, Stochastic Processes (J. Wiley, 1953).

Summary

On homogeneous Gauss-Markov processes.

In this note it is proved that among the continuous Gaussian Markovian processes only the transition density of the solutions of the stochastic differential equation $d\xi(t) = -A\xi(t)dt + Mdt + dW(t)$ is the homogeneous one. ($W(t)$ is the standard Wiener-process.)

Резюме

Об однородных гауссово-марковских процессах

В настоящей заметке доказывается, что кроме переходной плотности описывающей решение стохастического дифференциального уравнения $d\xi(t) = -A\xi(t)dt + Mdt + dW(t)$ нет однородной переходной плотности, принадлежащей к гауссовскому марковскому процессу траектории которого непрерывны с вероятностью 1./ $W(t)$ - стандартный винеровский процесс./