Szalagmátrixú lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere

Gergely József

A parciális differenciálegyenletek, a közönséges differenciálegyenletek peremérték feladatainak numerikus megoldásai gyakran vezetnek olyan lineáris egyenletrendszerekre. amelyekben csak a főegyütthatók és az ahhoz közeli együtthatók különböznek 0 -tól. Az ilyen egyenletrendszerek megoldására a szokásos eliminációs módszerek alkalmazása nem célszerű. Legtöbbször iterációs eljárásokat alkalmaznak. Azonban az iterációs eljárások nem mindig, vagy csak lassan konvergálnak. Az alábbiakban egy kevés számolást igénylő véges módszert ismertetünk.

Legyen az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszerünk $A = \{a_{ij}\}$ $n \times n$ -es mátrixa nem szinguláris és

(1) $$a_{ij} = 0, \quad \text{ha} \quad j - i > k, \quad a_{i\,i+k} \neq 0,$$

ahol $0 < k < n$ adott egész szám.

Legyenek az egyenletrendszer egyenletei $e_1, e_2, \dots, e_n$, a meghatározandó $\underline{x}$ vektor komponensei $x_1, x_2, \dots, x_n$. Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ valamilyen értékeiből kiindulva az e_1 -ből kiszámolható x_{k+1}, e_2-ből $x_{k+2}, \dots,$ az e_{n-k} -ból x_n.

Helyettesítsünk be az $e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \dots, e_n$ egyenletekbe. Minthogy minden x_j, $j = k+1, k+2, \dots, n$ lineáris kifejezése az $x_1, x_2, \dots, x_k$ komponenseknek, ezért írható

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = \sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} x_\ell + c_{i\,k+1}; \qquad i = n-k+1, n-k+2, \dots, n.$$

Rögzitsük az i indexet és induljunk ki az $x_1, x_2, \dots, x_k$ komponensek $k+1$ értékrendszeréből. Legyenek ezek $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{km}$, $m = 1, 2, \dots, k+1$. A (2) helyettesítéseket elvégezve kapjuk

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{jm} - b_i = d_{im} = \sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} x_{\ell m} + c_{i\,k+1}.$$

(3) $k+1$ lineáris egyenletet jelent a $c_{i\ell}$ együtthatók meghatározására. A (3) egyenletrendszer együtthatóinak mátrixa:

$$X = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} & 1 \\ - & - & - & - & - \\ x_{1\,k+1} & x_{2\,k+1} & \dots & x_{k\,k+1} & 1 \end{Bmatrix}$$

Változtassuk most i értékét $n-k+1$ -től n -ig.

A (3)-ból kapott d_{im} helyettesítési értékeket írjuk a

$$D = \begin{Bmatrix} d_{n-k+1\ 1} & d_{n-k+2\ 1} & \cdots & d_{n1} \\ d_{n-k+1\ 2} & d_{n-k+2\ 2} & \cdots & d_{n2} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ d_{n-k+1\ k+1} & d_{n-k+2\ k+1} & \cdots & d_{n\ k+1} \end{Bmatrix}$$

$(k+1)\times k$ méretű mátrixba. (3) alapján az

$$XC = D$$

mátrixegyenletből kapjuk a (2)-ben szereplő együtthatók C mátrixát

(4) $$C = X^{-1}D$$

Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_k$ kiindulás esetén teljesülnek az $e_1, e_2, \ldots, e_{n-k}$ egyenletek, hiszen ezek alapján számoltuk ki az $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ -et. Ahhoz, hogy az $e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, \ldots, e_n$ egyenletek is teljesüljenek, kell hogy (2) alapján

(5) $$\sum_{\ell=1}^{k} c_{i\ell} x_\ell + c_{i\,k+1} = 0$$

legyen $i = n-k+1,\ n-k+2, \ldots, n$.

Az (5) egyenletrendszerből az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásának első k komponensét kapjuk, majd az $e_1, e_2, \ldots, e_{n-k}$ egyenletekből rendre a teljes megoldásvektort.

Az X mátrixot önkényesen választhatjuk úgy, hogy ne legyen szinguláris. Adott k esetén X -szel együtt X^{-1} is fix mátrix és ezeket, mint konstans mátrixokat kezelhetjük. (Lehetnek célszerüen választott egyszerű mátrixok)

<u>A módszer idő és hely-szükséglete.</u>

A módszert akkor célszerű használni, ha az (1) feltételek helyett az

(6) $$a_{ij} = 0, \qquad |j-i| > k, \qquad a_{i\ i+k} \neq 0$$

feltételek teljesülnek. Ebben az esetben A úgynevezett szalagmátrix. Vizsgáljuk a számoláshos szükséges szorzások és osztások számát. Egy $x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{km}$ értékrendszerből kiindulva a hozzátartozó $d_{n-k+1\ m}, d_{n-k+2\ m}, \ldots, d_{nm}$ mennyiségek kiszámolásához

$n(2k+1)-k^2$ szorzás illetve osztás kell. Ezeket a számolásokat $k+2$ -szer kell elvégezni ($k+1$ -szer ahhoz, hogy a mátrixot megkapjuk és a végén egy visszahelyettesítést kell végezni). A C mátrixot a (4)-ből $k(k+1)^2$ művelettel kapjuk, majd az (5) egyenletrendszer megoldásához $\frac{k}{3}(k^2+3k-1)$ számú művelet kell. Összesen $n(2k^2+5k+2)+$ $+\frac{k}{3}(k^2+3k+2)$.

Hasonlítsuk össze az így kapott műveleti igényt a Gauss eliminációs eljárásból $n \times n$ -es egyenletrendszerre adódó $\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$ -es műveletigénnyel. Az összehasonlítást az alábbi táblázat mutatja:

n	10		100				1000				
Gauss elimináció műveletigénye	430		$3{,}4.10^5$				$3{,}3.10^8$				
k	1	2	1	2	5	10	1	2	5	10	100
Az ismertetett módszer műveletigénye	92	206	9.10^2	2.10^3	$7{,}8.10^3$	$2{,}6.10^4$	9.10^3	2.10^4	$7{,}7.10^4$	$2{,}5.10^5$	$2{,}1.10^7$

A táblázatból látható, hogy a módszer használata akkor célszerű, amikor n nagy és a k n -hez viszonyítva kicsi.

A módszer alkalmazásához az egyenletrendszer mátrixát célszerű $n \times (2k+1)$ -szeres két dimenziós tömbben tárolni. Ezenkívül célszerű a két dimenziós X és X^{-1} konstans mátrixokat előre elhelyezni. Szükség van még a C illetve D $(k+1) \times k$ méretű kétdimenziós tömbökre.

Minthogy a módszer használata közben az A mátrix nem változik, a számológép memóriájában csak egyszer kell a mátrixot felépíteni, a számoláshoz pedig csak olvasni kell a mátrix elemeit. Ezt célszerűen ki lehet használni abban az esetben, ha az egyenletrendszer $n \times (2k+1)$ méretű mátrixa nem fér el a számológép operatív memóriájában.

Számpélda:

A módszer használatát a következő egyszerű számpéldán mutatjuk be: legyen a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad &= 0.64 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3.48 \\ 4x_2 - x_3 &= -1.96 \end{aligned}$$

Az $x_{11} = 0$ értékből indulva $x_{21} = 0.32$, $x_{31} = 3.80$, $d_{31} = -0.56$, az $x_{12} = 1$ -ből pedig $x_{22} = -0.18$, $x_{32} = 1.30$, $d_{32} = -0.06$ értékek adódnak. A $(0, -0.56)$ és $(1, -0.06)$ pontokon átmenő egyenes az $x = 1.12$ pontban metszi az x tengelyt. Az egyenletrendszer megoldása további helyettesítésekkel $x_1 = 1.12$, $x_2 = -0.24$, $x_3 = 1.00$. (Számpéldánk esetén $n = 3$, $k = 1$, $X = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$,

$$X^{-1} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \quad D = \begin{Bmatrix} -0.56 \\ -0.06 \end{Bmatrix}).$$

Summary

A solution of linear equations with band matrix.

The paper discusses a quick, direct method for solution of linear equations in which the coefficient matrix is band matrix with property (6).

Резюме

Решение систем линейных уравнений лентными матрицами

В статье написан скорый прямой метод для решения систем линейных уравнений, в которых матрицы коэффициентов лентные матрицы по (6).