Komplex mátrixok sajátértékeinek meghatározása a "hasonlósági elimináció" módszerével

Varga Gyula

A jelen cikk folytatását és általánosítását tartalmazza egy, az MTA Számítástechnikai Központja Közleményeiben megjelent hasonló témájú cikknek [3], amely mátrixok valós sajátértékeinek meghatározásával foglalkozik az ún. "hasonlósági elimináció" módszerével. [1] Ennek alapgondolata az, hogy az adott mátrixot hasonlósági transzformációk egymásutánjával háromszögalakúvá változtatja, melynek főátlójában az eredeti mátrix sajátértékei helyezkednek el. Másszóval, valamely $m \times m$ -es A mátrix összes sajátértékének meghatározásához az $A^{(1)} = A$, $A^{(p+1)} = C_p^{-1} \cdot A^{(p)} \cdot C_p$, $A^{(p)} = \{a_{i,k}^{(p)}\}$, $(p = 1,\dots,n-1)$ transzformációk sorozatát kell végrehajtani, hogy a mátrix p -edik oszlopának főátló alatti elemeit rendre eliminálhassuk. A transzformációk végrehajtásához szükséges C_p mátrixokat az alábbi módon adhatjuk meg:

$$C_p = E - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m-p} \\ \vdots \\ x_1 \end{bmatrix} \cdot [0,\dots,0,\underbrace{1}_{p},0,\dots,0] \tag{1}$$

A C_p -ben szereplő $m-p$ db ismeretlen értéket az elimináció feltételének megfelelően egy $m-p$ ismeretlenes másodfokú egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg; eszerint

$$a_{j+p,p}^{(p+1)}(x_1,\dots,x_{m-p}) = 0 \qquad (j = 1,\dots,m-p). \tag{2}$$

Az említett cikk azt az esetet tárgyalja, amikor a szükséges transzformációk csupa valós x értékek segítségével végrehajthatók, másszóval az eredeti mátrix elemei valósak, és a mátrix csupa valós sajátértékekkel rendelkezik. A módszer azonban, bizonyos változtatásokkal, komplex elemű mátrixok sajátértékeinek, ill. valós elemű mátrixok komplex sajátértékeinek kiszámítására is alkalmas.

Ha a valós $x_1,\dots,x_{m-p}$ értékek helyett megengedjük a komplex $z_1,\dots,z_{m-p}$ mennyiségeket, akkor az

$$f_j(\underline{z}) = a_{j+p,p}^{(p+1)}(z_1,\dots,z_{m-p}) = 0 \qquad (j = 1,\dots,m-p) \tag{3}$$

$m-p$ egyenletből álló $m-p$ ismeretlenes komplex egyenletrendszer a $z = x_{2j-1} + x_{2j}\sqrt{-1}$ egyenlőségből adódó valós x_{2j-1}, x_{2j} mennyiségek meghatározására szétesik egy

$$(4) \qquad \begin{aligned} \bar{f}_{2j-1}(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) &= 0 \\ f_{2j}(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) &= 0 \end{aligned} \qquad (j = 1, \dots, m-p)$$

vagy egyszerűbben írva egy

$$(5) \qquad \hat{f}_i(x_1, \dots, x_{2(m-p)}) = 0 \qquad [i = 1, \dots, 2(m-p)]$$

$2(m-p)$ egyenletből álló $2(m-p)$ ismeretlenes valós egyenletrendszerre. Mivel ugyanilyen egyenletrendszerhez jutunk akkor is, ha az eredeti mátrix elemei komplex számok, azért ez a módszer valós elemű mátrixok komplex sajátértékeinek meghatározásán kívül komplex elemű mátrixok sajátértékeinek meghatározására is felhasználható.

Az (5) egyenletrendszert a Newton-Raphson-módszer [2] segítségével akarjuk megoldani. Az

$$(6) \qquad \underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - J^{-1} \cdot \hat{F}(\underline{x})\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^{[k]}} ; \qquad \left(\hat{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \hat{f}_{2(m-p)}(\underline{x}) \end{bmatrix} \right)$$

iteráció végrehajtásához szükséges J Jacobi-féle mátrix elemeit a cikkben látottakhoz hasonlóan (komplex változókra áttérve) a következőképpen kaphatjuk meg ($n = m-p$ jelöléssel, $j = 1, \dots, n$; $h = 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h-1}} = \delta_{n-j+1,h} \cdot \Big[a_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{n} (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell})\Big] -$$

$$- a_{j+p,m+1-h} - a_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)-1} + b_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)} ;$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h}} = \frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h-1}}$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h-1}} = \delta_{n-j+1,h} \cdot \Big[b_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{n} (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1})\Big] -$$

$$- b_{j+p,m+1-h} - a_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)} - b_{p,m+1-h} \cdot x_{2(n-j+1)-1};$$

$$\frac{\partial \hat{f}_{2j-1}}{\partial x_{2h}} = - \frac{\partial \hat{f}_{2j}}{\partial x_{2h-1}} .$$

A Newton-Raphson-módszer alkalmazásához szükséges lineáris egyenletrendszer jobboldalán álló vektor $(-\hat{F})$ elemei $(j = 1, \ldots, n)$:

$$-\hat{f}_{2j-1} = -a_{j+p,p} - a_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)-1} + b_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n} \Big[x_{2\ell-1} \cdot (a_{j+p,m+1-\ell} + a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1} -$$

$$- b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)}) - x_{2\ell} \cdot (b_{j+p,m-1-\ell} +$$

$$+ a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1})\Big];$$

(8)

$$-\hat{f}_{2j} = -b_{j+p,p} - a_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)} - b_{p,p} \cdot x_{2(n-j+1)-1} +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n} \Big[x_{2\ell-1} \cdot (b_{j+p,m+1-\ell} + a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)} +$$

$$+ b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1}) + x_{2\ell} \cdot (a_{j+p,m+1-\ell} +$$

$$+ a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2(n-j+1)})\Big].$$

Az iteráció végrehajtásához kezdő közelítésként valós mátrix esetén az $x_{2j-1} = 0$, $x_{2j} = 1$ $(j = 1, \dots, n)$ értékeket, komplex mátrix esetén $\underline{X} = \underline{0}$ -t célszerű venni. Az egyenletrendszernek több gyökrendszere is lehet, ezek közül bármelyik felhasználható a mátrix sajátértékeinek meghatározására. A különböző gyökrendszerek csak a mátrix sajátértékeinek sorrendjét befolyásolják. A transzformációra tett meggondolásaink alapján, az egyenletrendszer megoldása után az $x_1, \dots$ $\dots, x_{2n}$ mennyiségekből λ_p valós és képzetes részét az alábbiak szerint kapjuk meg:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \lambda_{p_v} &= a_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{n} (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1} - b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell}) ; \\ \lambda_{p_k} &= b_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{n} (a_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell} + b_{p,m+1-\ell} \cdot x_{2\ell-1}) ; \end{aligned}$$

Az eljárás folytatásához a mátrix elemeinek transzformációját csak az

$$i = p+1, \dots, m$$
$$\ell = p+1, \dots, m$$

indexű elemekre kell felírnunk:

$$(10)\qquad \begin{aligned} a^*_{i,\ell} &= a_{i,\ell} + a_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+1} - b_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+2} ; \\ b^*_{i,\ell} &= b_{i,\ell} + a_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+2} + b_{p,\ell} \cdot x_{2(m-i)+1} . \end{aligned}$$

Az eredeti mátrix háromszög mátrixszá való átalakítása $m-1$ lépésben történt. Mindegyik lépés után egy-egy komplex (esetleg valós) sajátértéket kaphatunk meg. Az utolsó sajátértéket az $m-1$-edik transzformáció után a mátrix jobb alsó sarokeleme adja meg.

Az eljárás leírásából látható, hogy valamely $m * m$-es mátrix összes sajátértékének meghatározása

egy $2m-2$ ismeretlenes,
egy $2m-4$ – " –
stb.
s végül egy 2 – " – másodfokú egyenletrendszer megoldását kívánja meg.

Az eredmények pontosságát valós mátrix esetén a számítás folyamán kapott konjugált komplex sajátértékpárok összehasonlításával becsülhetjük. Mivel az itt leírt módszer az említett cikk eljárásának általánosítása, valós sajátértékek meghatározására is alkalmas. A módszerrel továbbá többszörös sajátértékek is megbízhatóan számolhatók. A leírt módszer programja az Ural 2 gépre készült EFT autokódban, továbbá a Gier-gépre ALGOL-ban, ezenkívűl elkészült és lefutott a CDC 3300-as gépen az eljárás ALGOL-ban és FORTRAN-ban írt programja.

Irodalom

[1] Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem (Clarendon Press Oxford 1965)

[2] Березин–Жидков: Методы вычислений (Физматгиз Москва, 1962)

[3] Varga Gyula: Mátrixok sajátértékeinek meghatározása a hasonlósági elimináció módszerével (MTA SzK Közlemények 1969. 5.sz.)

Summary

Determination of the eigenvalues of complex matrices by the method of similarity elimination.

The paper deals with the determination of the eigenvalues of complex matrices. The method consists in the transformation of the given matrix with the aid of similarity transformations to a triangular matrix in whose diagonal the eigenvalues of the given matrix sought for can be found.

Резюме

Об определении собственных значений комплексных матриц методом исключения подобия

Статья занимается определением собственных значений комплексных матриц с помощью метода исключения подобия. Метод исключения подобия состоит в превращении данной матрицы преобразованиями подобия в треугольную, в главной диагонали которой находятся собственные значения данной матрицы.