Varga Gyula I.:

# Polinomfaktorizálás másodfoku tényezőkre

Valós együtthatós polinomok másodfoku tényezőkre való felbontását elvégezhetjük a Bairstow-féle eljárás segitségével, amely alkalmas közelitő értékekből kiindulva a Newton-Raphson-féle módszer alkalmazásával megadja az adott $f(x)$ polinom valamely $x^2 + px + q$ tényezőjének együtthatóit, valamint az

$$f(x) = (x^2 + px + q) \cdot g(x) \quad \text{azonosságnak}$$

eleget tevő 2-vel alacsonyabb fokszámu $g(x)$ polinom együtthatóit. Ha az $f(x)$ polinom összes másodfoku tényezőjét meg akarjuk határozni, ezt az eljárást folytathatjuk tovább. Hiányossága ennek a módszernek az, hogy a további tényezők a hibák összegeződése miatt egyre pontatlanabbak lesznek.

Az itt ismertetésre kerülő módszer valamely $f(x)$ párosfokszámu, többszörös gyökökkel nem rendelkező valósegyütthatós polinom összes másodfoku tényezőinek meghatározását egyszerre végzi el, ugyancsak a Newton-Raphson-féle módszer alkalmazásával.

Ha az $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

polinomot $\prod_{i=1}^{n} (x^2 + p_i x + q_i)$ alakban akarjuk felbontani az alább ismertetésre kerülő módszer segitségével, meg kell oldanunk az

$$a_i = a_i\,(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n) \qquad (i=0,\dots,2n-1), \qquad /1/$$

vagy rövidebben az $A = A(R)$ $2n$ ismeretlenes egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy már ismerünk valamely $p_1^{(m)}, q_1^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}, q_n^{(m)}$ közelitő megoldásvektort. Jelöljük ezt $R_m$ -mel, a pontos megoldások vektorát $R^*$-gal, az $a_0, \dots, a_{2n-1}$ vektort $A$-val, az $a_i(p_1^{(m)}, \dots)$ $(i=0,\dots,2n-1)$ együtthatókból álló vektort pedig $A(R_m)$-mel.

Irjuk a megoldandó egyenletrendszert

$$Y = Y(R) = A(R) - A = 0 \quad \text{alakban.}$$

A Newton-Raphson-módszert alkalmazva az

$$Y - Y(R_m) = \left(\frac{\partial Y}{\partial R}\right)_{R=R_m} \cdot (R - R_m)$$

egyenletből

$$R - R_m = \left(\frac{\partial Y}{\partial R}\right)^{-1}_{R=R_m} \cdot (Y - Y(R_m));$$

mivel ez nem a pontos egyenletrendszer, $Y = 0$-t helyettesitve nem $R^*$-ot, hanem valamely $R_{m+1}$ közelitő értéket kapunk $R^*$-ra:

$$R_{m+1} = R_m + \left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)^{-1}_{R=R_m} \cdot (A - A(R_m)) \quad \left(\text{u.i. } \frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{\partial A(R)}{\partial R}\right) \qquad /2/$$

Az /1/ egyenletrendszert ezzel az iterációval akarjuk megoldani.

A $\left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)_{R=R_m}$ Jacobi-féle mátrix felirásához szükséges deriváltakat a következőképpen kapjuk:

$$\text{A} \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = \prod_{k=1}^{n} (x^2 + p_k x + q_k)\text{-ből} \qquad (a_{2n} = 1)$$

$p_k$ ill. $q_k$ szerint deriválva a

$$\sum_{i=o}^{2n-1} \frac{\partial a_i}{\partial p_k} x^i = x \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x^2 + p_j x + q_j) \qquad \text{ill.}$$

$$\sum_{i=o}^{2n-1} \frac{\partial a_i}{\partial q_k} x^i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x^2 + p_j x + q_j) \qquad (R = R_m) \qquad /3/$$

egyenlőségeket kapjuk, amelyekből látható, hogy a $p_k$ szerinti deriváltak egy 2n-1 -ed foku, a $q_k$ szerintiek pedig egy 2n-2 -ed foku polinom együtthatóiként nyerhetők.

Az ezekhez szükséges 2n-2 -ed foku, továbbá az $A(R_m)$ előállitásához szükséges 2n -ed foku polinomokat a $b_o^{(o)} = 1$

$$b_k^{(i)} = b_{k-2}^{(i-1)} + b_{k-1}^{(i-1)} \cdot p_i^{(m)} + b_{k-2}^{(i-1)} \cdot q_i^{(m)}$$

$$(b_{2i-1}^{(i-1)} = b_{2i-2}^{(i-1)} = b_{-1}^{(i-1)} = b_{-2}^{(i-1)} = 0) \qquad (i=1,\dots,n \text{ ill. } i=1,\dots,n-1) \quad (k=0,\dots,2i)$$

alaku rekurzió segitségével kaphatjuk meg a

$$p_1^{(m)},\ q_1^{(m)}, \dots,\ p_n^{(m)},\ q_n^{(m)} \quad \text{mennyiségekből.}$$

Az eljárás konvergenciáját a Newton-Raphson-tétel alapján vizsgálhatjuk meg. Legyen

$$\left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)^{-1} = H_{ij}(R) \qquad \text{továbbá}$$

$$\phi(R) = R + H_{ij}(R) \cdot (A - A(R)) \;.$$

Mivel $\phi(R^*) = R^*$ továbbá $\phi(R)$ valamennyi parciális deriváltja az $R = R^*$ helyen 0, ezért az $R_m \longrightarrow R^*$ konvergencia másodrendü. U.i.

$$\frac{\partial \phi_i(R)}{r_k} = \delta_{ik} - \frac{\partial \phi_i(R)}{\partial r_k} \cdot (A - A(R)) -$$

$$- H_{ij}(r) \cdot \left(\frac{\partial A(R)}{\partial R}\right)_{jk} = 0 \qquad (R = R^*)$$

$r_k$ páratlan k-ra valamelyik p-vel,

páros k-ra pedig valamelyik q-val egyezik meg; $\delta_{ik}$ a Kronecker-szimbolum.

Az itt ismertetett módszer a Kerner-féle eljárás általánositása másodfoku tényezőkre.

Az eljárás programja az Ural-2 gépre készült EFT autókodban.

## Irodalom:

J.F.Traub: Iterative methods for the solution of equations. /1964. Prentice-Hall inc./

I.O.Kerner: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen (Numer.Math.8. 1966. 290-294.)

## S u m m a r y

The paper deals with breaking down to quadratic factors of polynoms of even-numbered power with real coefficients, not having multiple roots. The described process renders the determination at the same time of all quadratic factors of the polynom possible. The convergence of the process is of second order.

## Р е з ю м е

Статья обсуждает разложение на множители второй степени полиномов счётного порядка с действительными коэффициентами неимеющих многократных корней с помощью итерации. Ознакомленный метод даёт возможность одновременно определить все множители второй степени полинома.
Сходимость метода второго порядка.