Varga Gyula I.:

Mátrixok sajátértékeinek meghatározása a "hasonlósági elimináció" módszerével

Jelen dolgozatban egy eljárást adunk meg csupa valós sajátértékekkel rendelkező mátrixok összes sajátértékeinek meghatározására. Ismeretes, hogy az un. hasonlósági transzformációk nem változtatják meg a mátrixok sajátértékeit, tehát pl. az A $m \times m$ -es mátrix és a CAC^{-1} (C $m \times m$ -es nem szinguláris mátrix) transzformált mátrix valamennyi sajátértékei rendre megegyeznek.

Ismeretes továbbá, hogy trianguláris mátrix sajátértékei megegyeznek a mátrix főátlójában lévő elemekkel.

Eljárásunk abban áll, hogy az adott A mátrixot hasonlósági transzformációk segitségével triangulárissá változtatjuk, hogy igy a sajátértékekhez hozzájuthassunk. Ezt $m-1$ lépésben fogjuk végrehajtani. Az 1. lépésben ugy akarjuk a C_1 mátrixot megválasztani, hogy a $C_1AC_1^{-1}$ mátrix első oszlopában az első elem kivételével csupa 0 álljon, s.i.t. A p-ik lépésben ugy akarjuk megválasztani a C_p transzformáló mátrixot, hogy a $C_pC_{p-1}\ldots C_1AC_1^{-1}\ldots C_{p-1}^{-1}C_p^{-1}$ mátrix p-ik oszlopában lévő főátló alatti elemek valamennyien 0-sá váljanak. Természetesen a már eliminált főátló alatti elemeknek nem szabad változniok. Ez az eljárás az $m-1$-ik lépésben egy trianguláris mátrixhoz vezet, melynek főátlójában az eredeti mátrix valamennyi sajátértékét megtalálhatjuk.

Feladatunk tehát abban áll, hogy alkalmas C_p $(p=1,\ldots,m-1)$ mátrixokat találjunk, melyekkel a szükséges transzformációk végrehajthatók.

Keressük C_p-t a

$$C_p = \begin{array}{c} \quad (p) \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & X_{m-p} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & 0 & \\ & & X_1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

alakban, ahol $x_1,\dots,x_{m-p}$ a továbbiakban meghatározandó mennyiségek.

C_p inverze igen egyszerüen megadható a következő alakban:

$$C_p^{-1} = \begin{array}{c} \quad (p) \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & -X_{m-p} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -X_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

az $x_1,\dots,x_{m-p}$ mennyiségeket ugy kell megválasztanunk, hogy a transzformáció elvégzése után nyert $A^{(p+1)}$ mátrix p-ik oszlopában a főátló alatti elemek valamennyien 0-sal legyenek egyenlők, vagyis meg kell oldanunk az

$$f_j(\underline{x}) = a^{(p+1)}_{p+j,p} = a^{(p)}_{j+p,p} + a^{(p)}_{p,p} \cdot X_{m-p-j+1} -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{m-p} X_\ell \, (a^{(p)}_{j+p,m+1-\ell} + a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot X_{m-p-j+1}) = 0$$

$$(j=1,\dots,m-p)$$

m-p ismeretlenes másodfoku egyenletrendszert. Ezt a Newton-Raphson-módszer segitségével tehetjük meg. Az egyenletrendszer megoldására szolgáló

$$\underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - J^{-1}_{j,h} \cdot \underline{F}\,(\underline{x}^{[k]})$$

$$(\underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_{m-p}(\underline{x}) \end{pmatrix})$$ iteráció végrehajtásához

szükséges $J_{j,h}$ Jacobi-féle mátrix elemeit a

$$J_{j,h} = \frac{\partial f_j}{\partial x_h} = \delta_{m-p-j+1,h} \cdot (a^{(p)}_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{m-p} a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot x_\ell) -$$

$$- a^{(p)}_{j+p,m+1-h} - a^{(p)}_{p,m+1-h} \cdot x_{m-p-j+1}$$

$(j=1,\dots,m-p)$

$(h=1,\dots,m-p)$ képlet segitségével adhatjuk meg (δ a Kronecker-féle szimbolum).

Az iteráció végrehajtásához kezdő közelitésként az $x_1^{(o)} = \dots = x_{m-p}^{(o)} = 0$ értékeket vehetjük.

Eddigi meggondolásaink alapján

$$a^{(p+1)}_{p,p} = a^{(p)}_{p,p} - \sum_{\ell=1}^{m-p} a^{(p)}_{p,m+1-\ell} \cdot x_\ell$$ Éppen az

eredeti mátrixnak egyik sajátértéke.

Az $A^{(p+1)} = C_p A^{(p)} C_p^{-1}$ mátrix többi elemeit az alábbi transzformációs képletekből nyerjük:

$$a^{(p+1)}_{p,\ell} = a^{(p)}_{p,\ell} \qquad (\ell = p+1,\dots,m)$$

$$a^{(p+1)}_{i,\ell} = a^{(p)}_{i,\ell} + a^{(p)}_{p,\ell}\, x_{m-i+1} \qquad (i=p+1,\dots,m) \quad (\ell=p+1,\dots,m)$$

$p > 1$ esetén

$$a_{i,\ell}^{(p+1)} = a_{i,\ell}^{(p)} \qquad (i=1,\dots,m) \quad (\ell < p)$$

$$a_{\ell,i}^{(p+1)} = a_{\ell,i}^{(p)}$$

Az A $m \times m$ -es mátrix összes sajátértékének meghatározása tehát egy $m-1$ ismeretlenes, egy $m-2$ ismeretlenes, s.i.t. egy 2 ismeretlenes másodfoku egyenletrendszer, s végül egy másodfoku egyenlet megoldását kivánja meg. Komplex aritmetika nélkül ezeknek csak valós megoldásait kaphatjuk meg (ha ilyenek léteznek) a Newton-Raphson-módszer segitségével.

Az eljárás programja az Ural-2 elektronikus számológépre készült EFT autókódban.

Summary

The paper deals with the determination of the eigenvalues of matrices. The method consists in the transformation of the given matrix with the aid of similarity transformations to a triangular matrix in whose diagonal the eigenvalues sought for can be found. The solutions of the quadratic equation systems required for the determination of the matrices of the transformations can be obtained by the Newton-Raphson method.

Резюме

Статья занимается вычислением собственных значений матриц. Существо метода состоит в превращении данной матрицы преобразованием подобия в треугольную, в диагонале которой находятся искомые собственные значения. Решения систём квадратных уравнений, необходимых для определения матриц преобразований, получаются методом Нютона-Рафсона.