Bakó András:

A legrövidebb ut meghatározása veszteséges hálózatban

A legrövidebb ut problémát Ford és Fulkerson [1] hálóelméleti módszerrel oldja meg. A feladat egy általánositására - időtől függő elhosszakkal biró hálózatra - Cooke és Holsey [2] ad algoritmust dinamikus programozási módszert követve. Klafszky Emil [3] a Ford-Fulkerson féle folyammódszer segitségével egy rövidebb eljárást ir le, amely az ut hosszán kivül a legrövidebb utvonalat is megadja. A legrövidebb ut egy másik - a dolgozat - ban szereplő - általánositását Charnes és Raike [4] lineáris programozási módszerrel oldja meg. Ez a probléma megoldható a Ford-Fulkerson féle eljárással a Klafszky Emil által leirt gondolatmenethez hasonlóan.

A dolgozatban a problémát ugy oldjuk meg, hogy a feladathoz egy duális feladatot rendelünk. Az eredeti és a duális feladat megoldásai közötti kapcsolatot egy Dualitási tételben fogalmazzuk meg. A tétel bizonyitása egyuttal algoritmust is ad mind a primál, mind a duál feladat megoldására.

1. Legyen N véges sok pontból álló halmaz. Jelöljük N pontjait latin kisbetükkel. Nevezzük $x,y \in N$ $x \neq y$ pontokat összekötő szakaszt a hálózat élének és jelöljük az x pontból az y pontba futó élet (x,y)-nal.

Legyen $s \in N$ és $s' \in N$ két rögzitett pontja a hálózatnak, az s N pontot forrásnak, az $s' \in N$ pontot nyelőnek nevezzük. Jelölje $\gamma(x,y)$ $x,y \in N$ az egységnyi áru szállitási költségét az x pontból az y pontba. A szállitás közben az (x,y) élen az áru veszit a sulyából. Ha az x pontból egységnyi árut szállitunk, ugy az y pontba $K(x,y)$ mennyiség érkezik. Igy az egységnyi áru sulycsökkenése az x pontból az

y pontba való szállitás közben $1-K(x,y)$.

A $\gamma(x,y)$ és $K(x,y)$ függvényekre a következő relációk teljesülését követeljük meg.

$$\gamma(x,y) \geq 0 \quad \text{mind } x,y \in N$$
/1.1/
$$\gamma(x,y) = \infty \quad \text{ha az } (x,y) \text{ élen nem lehet szállitani}$$
$$0 \leq K(x,y) \leq 1 \quad \text{mind } x,y \in N$$

A felhasználónak az s pontban korlátlan mennyiségü áru áll rendelkezésére, és az a célja, hogy az s' pontban beérkező egységnyi árut minimális költséggel szállitsa, figyelembe véve az éleken a sulycsökkenést.

Legyen $P = (s = x_0, x_1, \ldots, x_k = s')$ egy az s pontból az s' pontba vezető ut. Jelöljük $\lambda(x_i)$-vel az s-ből induló egységnyi áru szállitási költségét a P ut minden az x_i pontig, $\nu(x_i)$-vel az s-ből induló egységnyi áru mennyiségét a P ut mentén az x_i pontban. Ezen függvényeket nyilvánvalóan a következő rekurziókkal adhatjuk meg:

$$\lambda(x_0) = 0$$
$$\lambda(x_i) = \lambda(x_{i-1}) + \nu(x_{i-1}) \cdot \gamma(x_{i-1}, x_i) \qquad i = 1,2,\ldots, n$$
/1.2/
$$\nu(x_0) = 1$$
$$\nu(x_i) = \nu(x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1}, x_i) \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

A feladat meghatározni azt a P utat, amelyre

/1.3/
$$\frac{\lambda(s')}{\nu(s')} \text{ minimális}$$

azaz, amely mentén szállitva az s' pontba érkező egységnyi mennyiségre eső szállitási költség minimális.

Ahhoz, hogy a feladatot megoldjuk, az előbbi un. primál feladathoz egy duál feladatot rendelünk.

A feladat dualisához a következő gazdasági szemlélettel jutunk: A szállitást egy szállitó is végezheti, aki a hálózat mindenegyes $x \in N$ pontjában megadja azt a $\mu(x)$ árat, amennyiért az x pontban egységnyi árut ad a felhasználónak. Ahhoz, hogy a felhasználó vegyen árut az y pontban, a $\mu(y)$ árunak olcsóbbnak kell lenni, mintha maga szállitaná egy másik, x pontból. Ez az (x,y) élet figyelembe véve azt jelenti, hogy

$$\mu(y) \leq \frac{\mu(x) + \gamma(x,y)}{K(x,y)}$$

A szállitónak az a célja, hogy a hasznát, azaz a $\mu(s')$ értéket maximalizálja.

A duális feladat az előbbiek alapján a következőképp fogalmazható meg:

Határozzuk meg azokat a $\mu(x) \geq 0$ $x \in N$ árakat, amelyek eleget tesznek a

$$\mu(s) = 0$$

/1.4/ $$K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y) \qquad x,y \in N$$

feltételeknek és a

/1.5/ $$\mu(s') \text{ maximális}$$

A duál feladat lehetséges megoldásának nevezzük azon $\mu(x)$ $x \in N$ értékeket, amelyek eleget tesznek /1.4/ feltételeknek.

A duális feladatnak van lehetséges megoldása, például $\mu(x) = 0$ $x \in N$, mert kielégiti az /1.4/ feltételeket.

Az alábbi tétel bizonyitása konstruktiv, igy egyben algoritmust is szolgáltat az /1.3/ feladat megoldására.

Tétel:

Legyen λ, ν , az /1.2/ relációval megadott függvény.

Ekkor

$$\min_{P} \frac{\lambda(s')}{\nu(s')} = \max \mu(s')$$

ahol a minimum az s-ből az s'-be vezető utakra, a maximum az /1.4/-nek elegettevő $\mu(x_i)$ árakra értendő.

2. A tétel bizonyitásánál felhasználjuk az alábbi lemmát, amely a primál és a duál feladat lehetséges megoldásai közötti kapcsolatot mutatja.

Lemma:

Tetszőleges P ut és $\mu(x)$ $x \in N$ lehetséges megoldás esetén

$$\frac{\lambda(s')}{\nu(s')} \geq \mu(s')$$

Bizonyitás:

i-re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy egy P ut minden x_i pontjára teljesül a

$$\frac{\lambda(x_i)}{\nu(x_i)} \geq \mu(x_i) \qquad /2.1/$$

egyenlőtlenség.

i=0 esetben $x_0 = s$, igy a λ, ν, μ definiciójából kapjuk

$$\frac{\lambda(s)}{\nu(s)} = \mu(s)$$

Tegyük fel, hogy i-1 -re fennáll a /2.1/ egyenlőtlenség, azaz

$$\frac{\lambda(x_{i-1})}{\nu(x_{i-1})} \geq \mu(x_{i-1})$$

az /1.4/ feltételt felhasználva

$$\frac{\lambda(x_{i-1})}{\nu(x_{i-1})} \geq K(x_{i-1},x_i)\cdot\mu(x_i) - \gamma(x_{i-1},x_i)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, átrendezve /1.2/ miatt

$$\lambda(x_i) \geq \nu(x_i)\cdot\mu(x_i)$$

alakhoz jutunk, amellyel a lemmát bebizonyitottuk.

A lemma miatt, ha találunk oly P utat, és oly /1.4/-et kielégitő $\mu(x)$ árukat, amely mentén a /2.1/ egyenlőséggel áll fenn minden $x_i \in P$ esetén, akkor a szükségképpen a primál feladat minimumát ill. a duál feladat maximumát kapjuk.

A tétel bizonyitása:

Tegyük fel, hogy a $\mu(x_i)$ függvény olyan, hogy $\mu(s')$ maximális. Soroljuk az N pontjait két halmazba: S-be és S'-be.
Legyen

a./ $s \in S$

b./ $x \in S$, ha van olyan $y \in S$, hogy (x_i,y)-ra /1.4/ egyenlőséggel teljesül.

Jelöljük: $S' = N - S$.

Ha $s' \in S$, akkor meghatároztuk azt a P utat, amely mentén /2.1/ egyenlőséggel teljesül.

Ha $s' \notin S'$, ugy

$$K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) < \gamma(x,y)$$

minden $x \in S$, $y \in S'$ esetén.

Jelöljük:

$$\mathcal{E} = \min_{\substack{x \in S \\ y \in S'}} \left(\frac{\gamma(x,y) + \mu(x)}{K(x,y)} - \mu(y) \right) > 0$$

A $\mu(x)$ függvényből az $\mathcal{E}$ segitségével konstruálunk egy uj "ár" függvényt a következőképp:

$$\bar{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x) & x \in S \\ \mu(x) + \varepsilon & x \in S' \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy az igy konstruált $\bar{\mu}(x)$ függvény kielégiti az /1.4/ feltételeket:

$$\bar{\mu}(s) = \mu(s) = 0$$

A $K(x,y)\,\mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y)$ feltétel teljesülését az alábbi 4 esetben kell megmutatni:

a./ $x \in S$, $y \in S$ esetben $\bar{\mu}(x) = \mu(x)$, igy az /1.4/ feltétel teljesül.

b./ $x \in S$, $y \in S'$ esetben

$$K(x,y) \cdot \bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y)[\mu(y) + \mathcal{E}] - \mu(x) \leq$$

$$\leq K(x,y)\left[\mu(y) + \frac{\gamma(x,y) + \mu(x)}{K(x,y)} - \mu(y)\right] - \mu(x) = \gamma(x,y)$$

c./ $x \in S'$, $y \in S$ esetben

$$K(x,y) \cdot \bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) - \mathcal{E} \leq$$

$$\leq K(x,y) \cdot \mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(x,y)$$

d./ $x \in S'$, $y \in S'$ esetében

$$K(x,y)\cdot\bar{\mu}(y) - \bar{\mu}(x) = K(x,y)\left[\mu(y) + \mathcal{E}\right] - \mu(x) - \mathcal{E} =$$

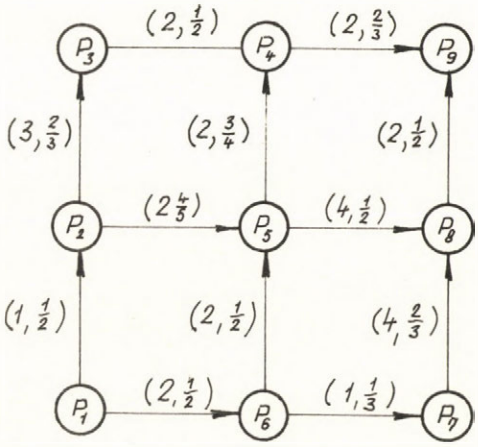
$$= K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) - \mathcal{E}\left[1 - K(x,y)\right] \leq K(x,y)\cdot\mu(y) - \mu(x) \leq \gamma(\cdot,\cdot)$$

$\varepsilon >$, ε , $\bar{\mu}(\cdot) > \mu(\cdot)$,

$\mu(\cdot)$

3. A fentieket egy numerikus példán illusztráljuk.

Tekintsük a következő hálózatot:



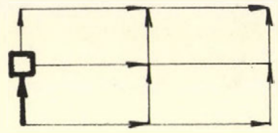
ahol az élre irt első szám a szállitási egységköltséget (a γ értéket), a második szám az élveszteséget (a k értéket) jelenti. Határozzuk meg a/1.3/ feltételeknek elegettevő utat a P_1 pontból a P_9 pontba.

<u>I. lépés</u> $S = \{P_1\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_1 \rightarrow P_2 & \\ & \text{esetén} \\ P_1 \rightarrow P_6 & \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\frac{1+0}{1/2} - 0 = \underline{\underline{2}} \longrightarrow \text{min!} \\ \\ &\frac{2+0}{1/2} = 0 = 4 \end{aligned}$$

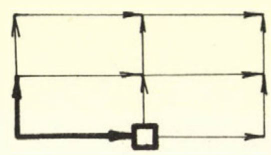
Az uj potenciál az S -beli pontoknál 2.

A lépéseknél felrajzoljuk a hálózatot bekeretezéssel megjelölve az S-be bejelölt pontot:



II. lépés $S = \{P_1, P_2\}$

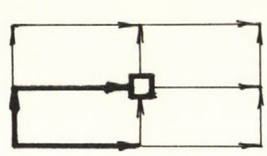
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_1 \to P_6 \\ P_2 \to P_3 \\ P_6 \to P_5 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{2+0}{1/2} - 2 = \underline{\underline{2}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{3+2}{2/7} - 2 = 15\frac{1}{2} \\ \frac{2+2}{4/5} - 2 = 3 \end{array}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál 4.

III. lépés $S = \{P_1\ P_2\ P_6\}$

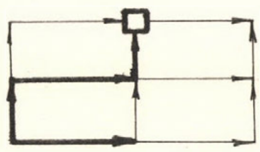
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \to P_3 \\ P_2 \to P_5 \\ P_6 \to P_5 \\ P_6 \to P_7 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{3+2}{2/7} - 4 = 13\frac{1}{2} \\ \frac{2+2}{4/5} - 4 = \underline{\underline{1}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{2+4}{1/2} - 4 = 8 \\ \frac{1+4}{1/3} - 4 = 11 \end{array}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál 5.

IV. lépés $S = \{P_1\ P_2\ P_5\ P_6\}$

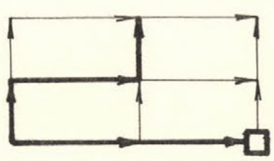
$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \rightarrow P_3 \\ P_5 \rightarrow P_4 \\ P_5 \rightarrow P_8 \\ P_6 \rightarrow P_7 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{3+2}{2/7} - 5 = 12\frac{1}{2} \\ \frac{2+5}{3/4} - 5 = \underline{\underline{4\frac{1}{3}}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{4+5}{1/2} - 5 = 13 \\ \frac{1+4}{1/3} - 5 = 10 \end{array}$$



Uj potenciál az S -beli pontoknál $9\frac{1}{3}$.

<u>V. lépés</u> $S = \{P_1\ P_2\ P_4\ P_5\ P_6\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 \rightarrow P_3 \\ P_5 \rightarrow P_8 \\ P_6 \rightarrow P_7 \\ P_4 \rightarrow P_9 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{3+2}{1/7} - 9\frac{1}{3} = 8\frac{1}{6} \\ \frac{4+5}{1/2} - 9\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3} \\ \frac{1+4}{1/3} - 9\frac{1}{3} = \underline{\underline{5\frac{2}{3}}} \longrightarrow \text{min!} \\ \frac{2+9\frac{1}{3}}{3/4} - 9\frac{1}{3} = 5\frac{7}{9} \end{array}$$



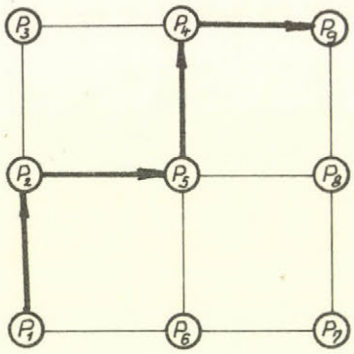
Uj potenciál az S -beli pontokon 15.

<u>VI. lépés</u> $S = \{P_1\ P_2\ P_4\ P_5\ P_6\ P_7\}$

$$\mathcal{E} = \begin{cases} P_2 - P_3 \\ P_5 - P_8 \\ P_7 - P_8 \\ P_4 - P_9 \end{cases} \quad \text{esetén} \quad \begin{array}{l} \frac{3+2}{2/7} - 15 = 2\frac{1}{2} \\ \frac{4+5}{1/2} - 15 = 3 \\ \frac{4+15}{2/3} - 15 = 13\frac{1}{2} \\ \frac{2+9\frac{1}{3}}{3/4} - 15 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}} \longrightarrow \text{min} \end{array}$$

Potenciálérték a P_9 pontban $15\frac{1}{9}$.

Egységnyi áru szállitási költsége a $\overrightarrow{P_1P_2P_5P_4P_2}$ utvonalon minimális:



- . -

Irodalom

1./ L.R.Ford and D.R.Fulkerson, "Maximal Flow Trought a Network" Canadian J. Math. 8. 339-404 /1956/

2./ K.L.Cooke and E.Halsey: The Shortest Route Trought a Network with Time Dependent Internodal Transit Times J.Math.Anal.Appl. 14, 493-498 /1966/

3./ Klafszky E.: Legrövidebb ut meghatározása időtől függő élhosszakkal biró hálózatban. MTA SzK Közlemények 3, 29-35 /1968/

4./ A.Charnes and W.M.Raike: One-pass Algorithms for some Generalized Network Problems. Operations Research 14, 914-924 /1966/.

S u m m a r y

The shortest path problem is solved by Ford and Fulkerson [1] by means of the network method. For the generalization of the problem - in the case of network having edge lengths depending on the time - Cooke and Holsey [2] render algorithm while following the method of dinamic programming. E.Klafszky [3] applying the flow method of Ford and Fulkerson gives a shorter procedure delivering the shortest path in addition to the length of the path. Another generalisation described in this paper is performed by Charnes and Raike [4] by means of linear programming. That generalization can be solved by means of the Ford and Fulkerson's procedure similar to the way described by Klafszky.

The problem in this paper is solved by assining a dual problem to the original one. We describe the relation beetween the original and the dual problem in a duality theorem. The proof of the theorem gives an algorithm for solving of both the primal an dual problem as well.

Р е з ю м е

Проблему наикратчайшего пути Форд и Фулькерсон [1] решают методом теории сеток.
Обобщение задачи- для сетки имеющей рёбра зависящиеся от времени - Сееке и Хольсей [2] решают алгорифмом использующим метод динамического программирования. Клафски Эмил [3] описывает более короткий процесс используя метод потоков Форда-Фулькерсона, который задаёт не только длину пути, а наикратчайший путь.
Другое обобщение наикратчайщего пути - которое находится в настоящей статье - Чарнес и Рейльс [4] решают методом линейного программирования. Эту проблему можно решать с процессом Форда-Фулькерсона ходом мыслей, похожим на описанный Клафски Эмилом.
В настоящей статье мы решаем эту проблему с двойственной задачей. Связь между прямой и двойственной задачами сформулируем в одной теореме двойственности. Доказательство теоремы одновременно задаёт и алгорифм для решения и прямой и двойственной задачи.