Sonnevend György:

Megjegyzések a differenciál játékok egyszerü tipusairól.

Ezen jegyzetben a differenciáljátékok néhány speciális problémájával foglalkozunk.

Először vizsgáljuk a következő üldözési feladatot.
Egy K körlapon mozoghat az üldöző, a H határoló körvonalon az üldözött, mindkettőjük abszolut értékben maximális sebessége 1.

A feladat,meghatározni mindkét részről az optimális viselkedésmódot. Alább egy ilyet adunk meg (tökéletesen jó eredményt adva [6]-ban).

Ilyen tipusu feladatokkal többen foglalkoztak.
A legáltalánosabb módszert differenciáljátékokra (üldözés esetében) Pontrjagin [1] ill. lineáris játékokkal [2-4] cikkében adott. Bátran állithatjuk, hogy módszere és e cikk két alaptétele a differenciál játékok elméletének fontos elemeit alkotják.

Mégis a fenti egyszerü feladat elemzése során megmutatjuk, hogy az [1] cikk alapfeltevései esetében nem teljesülnek és igy további kutatásra van szükség és lehetőség e feladattipus vizsgálatánál.

Először is jegyezzük meg, hogy a fenti feladat állapottere nem egy teljes enklidesi tér, hanem egy határral rendelkező differenciálható sokaság: a körlap és a körvonal direkt szorzata (Henger, melynek alap és fedőlapjai "azonositva" van (összeragasztva az egy magasságvonalon fekvő pontpárok). Habár az [1] ill. [4] cikkben állapottérként a teljes enklidesi tér szerepel, könnyen ellenőrizhetjük, hogy az ott megadott módszer átvihető tetszőleges differenciálható sokaságon vett differenciáljáték esetére, hiszen a meggondolások "lokális" jellegüek.

Bevezetve a $K \times L = R$ sokaságon egy természetes koordináta rendszert a játék egyenletei

$$\dot{x} = u \qquad |u| \leq 1 \qquad (K = x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$\dot{z} = v \qquad |v| \leq 1 \qquad L = 0 \leq z < 1$$

$$M : \text{„}x = z\text{"}$$

A terminális halmaz M a hengerpalást egy csavarvonala. Mivel M nem konvex a [4] cikk módszere közvetlenül nem alkalmazható. (Elképzelhető, hogy e módszert lehet ugy általánositani - az alternáló összeg müvelet nem konvex halmazokra való általánositásával - hogy általa feladatunk kezelhető lesz, most ezzel nem foglalkozunk.) Vizsgáljuk most az [1] cikk módszerének alkalmazhatóságát.

A ψ vektorfüggvényre vonatkozó differenciálegyenlet jelen esetben (a differenciálegyenlet helytől független) $\dot{\psi} = 0$, ezért az optimális mozgásoknak egyenesvonaluaknak kellene lenni. u(t)-t ill. v(t)-t az határozza meg, hogy

$$u(t)\,\psi_{12} \qquad \text{maximális} \qquad (\psi_{1,2} = \psi_1, \psi_2)$$

illetve

$$v(t)\,\psi_3 \qquad \text{minimális} \qquad \psi_3 = \psi_3$$

abban az esetben, ha pl. $\psi_3 = 0$ a v(t) meghatározatlan.

A ψ-k az M-re merőleges vektorok. Egy ábra felrajzolásával könnyen látható, hogy $\psi_3 = 0$ olyan kiindulási helyzethez tartozók, melynél az üldöző és üldözött összekötő egyenese átmegy a körközépponton. A v(t) ilyen határozatlansága miatt az S sokaság nem szerkeszthető meg. A módszert lehetne menteni azáltal, hogy az S sokaság megszerkesztéséhez nem az összes lehetséges ψ-t használjuk. Az 5 és 6 feltételek biztositásához pl. $|\psi_3| < |\psi_{12}|$ kellene megkövetelni. Azonban mindenképpen baj van a $\psi_3 = 0$ esettel: ahhoz, hogy az S-ről való w leképezés kiadja az egész R-t, szükséges, hogy bevonjuk ezt az esetet is, márpedig fennállásakor v(t) nem lehet ugy definiálni, hogy az alapvető 1 feltétel fennálljon.

Az alábbiakban megadunk egy stratégiát, mely véges idő alatt befejezi a játékot. Más módszer kell tehát!

Ez az eredmény érdekes; ugyanis abban az esetben, ha az üldözött is az egész K körön belül mozoghat ismert (Besicovitz egy eredménye), hogy az üldözött végtelen hosszu ideig kitérhet az elkapás elől (ld. Littlewood : Mathematical Miscellany az ő stratégiájának lényege, hogy pályája összegükben végtelen hosszu egyenes szakaszokból áll, melyeket ugy választ meg diszkrét időpillanatokban, hogy irányuk merőleges legyen ő és üldözője összekötő egyenesére és ha ez az egyenes nem megy át a körközépponton, akkor a körközéppontot tartalmazó oldalára mutasson).

Ha tehát az üldözött számára van egy kör, amelyen belül mozoghat, akkor üldözője (ugyanakkora maximális sebességgel) nem tudja megfogni, igy pl. akármilyen kis körgyürü elég a megmeneküléshez.

Adjuk most meg az elfogás stratégiáját. Először is menjen az üldöző a kör középpontjába, ezután mozogjon ugy, hogy összekötő egyenesük állandóan átmenjen a kör középpontján. Ha emellett az üldözött maximális sebességgel egyirányban halad, akkor az üldöző pályája egy $\frac{1}{2}$ sugaru félkör, mely a kiinduláshoz tartozó összekötő egyenest a középpontban érinti (a középponti és kerületi szögek tétele).

Ha az üldözött egyirányban maximális sebességgel fut, akkor az elfogása $\pi/2$ idő után következik be. Ha közben irányt változtat (maximális sebességét tartva), akkor szimmetria okokból (összekötő egyenes mindig átmegy a kör középpontján) az elfogás ugyanannyi idő alatt bekövetkezik. Ha kisebb sebességgel halad, akkor az üldözőnek módjában van (a szimmetrikus helyzetet állandóan fenntartva) ugyanazon idő alatt még előnyösebb (közelebbi) poziciót elfoglalni. Valószinünek látszik, hogy ez az üldöző részéről is optimális stratégia (azaz nyeregpont) azonban nem szimmetrikus esetben elég bonyolultnak látszik az optimális üzés (világos, hogy bizonyos esetekben gyorsabban is sikerül szimmetrikus helyzetet elérni, mint a középpontba futás révén). Vegyük észre, hogy ez a stratégia ismertnek tételezte fel az üldözött irányitását az adott pillanatban (nem ugy mint a fent emlitett "kitérési" stratégia). Érdemes megjegyezni, hogy konstrukciónkban éppen az a kivételes helyzet, szingularitás képezte a lényeges pontot, amely miatt a Pontrjagin féle módszer nem alkalmazható.

Jegyezzük meg, hogy a fenti módszer átvihető arra az üldözési feladatra, melyben K ill. H szerepét az n dimenziós gömb ill. gömbfelület veszi át.

Általánosabban sejthető, hogy a fenti üldözési feladat(tetszőleges konvex test és annak felületén) véges idő alatt befejezhető, ha a test korlátos, (és felülete minden pontban pozitiv görbületü?)

Térjünk most át egy másik problémára, Pontrjagin [4] cikkében a lineáris differenciálegyenletek esetére egy általános módszert irt le

$z = Cz + U - \vartheta$, $z \in R$ $u \in U$, $v \in V$

Az ő módszere alkalmazható tetszőleges (végtelendimenziós) lineáris térben értelmezett differenciál játék esetében is, ha a konstrukcióban szereplő integrálok léteznek. Ez az eset áll fenn akkor, ha az irányitási paramétertartományok U és V kompakt halmazok.

Minthogy az irányitási paramétertartomány az irányitó objektum technikai kapacitását adja meg matematikailag, természetes, hogy az u ill. v-re vonatkozó kikötések

$$(E_1 u_1 u) \leq m_1 \qquad (E_2 v, v) \leq m_2$$

ahol (Hilbert teret vizsgálva állapottérként) E_1 és E_2 pozitiv önadjungált "energia" operátorok, melyek az esetek nagy részében nem korlátos (ált.: differenciál) operátorok.

Speciális példaként tekinthetjük egy rugalmas testre ható ellentétes erők játékát (hur, membrán), vagy R-t mint zajfüggvények halmazát tekintve, u zajkeltő v zajcsillapitó hatásu, vagy $L_2(o,1)$-t mint keritésalakzatok halmazát, ahol u falépitő v falromboló hatásu.

Az itt fellépő esetek nagy részében az U ill. V halmazok kompaktak, pl. ha λ_n az E operátor sajátértékeinek rendszere, mely egy teljes sajátvektorrendszerhez tartozik, akkor $u = \sum u_n$ $m \geq (E,u,u) \geq (E\, u_n, u_n) = \lambda_n \|u_n\|^2$ -ből

$$\|u_n\|^2 < \frac{m}{\lambda_n}$$

Tehát $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ esetén a megfelelő u vektorok benne vannak a

$$|u_n| < \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad n=1,2,\dots$$

Hilbert téglában, mely kompakt halmaz. A fenti egyenlőtlenség ($\sum_1^\infty \lambda_n^{-1} < \infty$) számos energiaoperátorra teljesül.

A következőkben vizsgáljuk az egyszerü

$$\dot{x} = u \qquad x-y=z \qquad M: x=y \quad z=0$$

$$\dot{y} = v \qquad \dot{z}=u-v \qquad U:(E_1 u,u) \leq m_1; \; V: (E_2 v,v) \leq m_2$$

általánositott ellipszoidok.

differenciáljátékot egy Hilbert térben.

Legyen $T = U \overset{*}{-} V$, vagyis azon x pontok halmaza, melyekre

$$x + V < U$$

(Feltehető, hogy $T < U$). A T konstrukciójából világos, hogy z_0 pontból a játék nem fejezhető be, ha az $M + sT$ (két konvex test komplexus összege) semmilyen s-re sem tartalmazza z_0-t. Másrészt egyszerü belátni, hogy ha valamilyen s-re a tartalmazás fennáll, akkor a játék z_0-ból kiindulva s idő alatt befejezhető. (ld. Pontrjagin emlitett cikkét[4] a fellépő integrálokat célszerü általánosa, a Bochner integrál keretében nézni feltéve, hogy $\|u(t)\|$ korlátos és Lebesque-mérhető, tehát az U kompaktsága sem szükséges, ha Bochner integrálok exisztenciáját figyelembe vesszük. Az $\|u(t)\|$ korlátos, ha E spektruma nem terjed egy pozitiv δ-nál lejjebb.

Ha U kompakt, akkor érdekesen jelentkezik a tér végtelen dimenziós voltából a következő tény: Létezik olyan Z_o pont, ahonnan kiindulva a játék nem fejezhető be, annak ellenére, hogy T nem üres (ami szemléletesen azt jelenti, hogy az üldöző (u) nagyobb lehetőségekkel rendelkezik, mint az üldözött). Ez azért van, mert $T \subset U$ miatt T is kompakt és végtelen dimenziós Hilbert térben kompakt halmaz nem lehet elnyelő, ugyanis ő seholsem sürü, hiszen zárt és gömböt nem tartalmaz, igy a Baire tétel miatt nem lehet $\bigcup_{1}^{\infty} n\, T = H$.

Nem paradox a fenti állitás akkor, ha Z_o olyan vektor, melyre $(E\, Z_o, Z_o) = \infty$. Ha tehát a rendszer természetes energia operátora E , akkor minden véges energiáju állapot leépithető (azaz 0-ba vihető a fenti játék esetében, akkor és csak akkor, ha $s.T \supset \{(E,z,z) = \text{const}\}$ valamely s-re.

Abban a speciális esetben, ha $E_1 = E_2 = E$, $m_2 < m_1$ ez teljesül, hiszen ekkor $T = U \overset{*}{-} V \supset (m_1 - m_2)\ (D_1)\ U = D_{m_1}$, $V = D_{m_2}$, $D_s = (E\, u, u) \leq s$ jelölésekkel. Az E_s ellipszoid konvex voltából

$$E_{m_2} + (m_1 - m_2)\ E_1 \subset E_{m_1}$$

(ez tetszőleges konvex testre érvényes összefüggés könnyen bizonyitható megfelelő hasonlósági háromszögek bevonásával).

- . -

Irodalom:

Pontrjagin [1] Uszpehi Mat.Nauk. 1966. 21.4.219-274.

[2] Dokladi Akad.Nauk 174.No.I. 27-29.

[3] " 174.No.6. 1278-1280

[4] " 175.No.4. 764-766

[5] Littewood: Mathematical Miscellany

[6] Megjelenőben magyar ismertetés a fenti cikkekről a jelen jegyzet szerzőjétől.

S u m m a r y

Note on differential games

In this note we investigate the following pursuit problem. The pursuer moves on the circle $|z| \leq 1$, the pursued on the circumference $|z| = 1$, both have can have velocities with absulut values smaller then 1.

We show that the two fundametal methods in [1] and [4] are not applicable, and find a strategy wich ends the game in finite time. This strategy reqiures that the two objects lie on a line, wich passes through the centre of the circle- and it is interesting that this is the configuration wich represents the singularity on wick fails the applicability of the method [1]. Howerer we did not proove that our strategy is the best possible. Tho final solution is given in [6].

Attempting investigate the pursuit problem in a Hilbert-space with the method of [4] we made same remarks wich show that in matural cases the control regions conesponding to finit energy capacity:
$(E\,u,u) < \text{const}$ - E is the energy operator - is compact. From this follows that the question of ending the game is not so trivial as in the finit

Р е з ю м е

В настоящей статье исследуется проблема гоньбы: гонящий движется в круге $|z| \leq 1$, гонянный на окружности $|z| = 1$, и оба имеют скорость меньше единицы по абсолютной величине.
Мы покажем, что основные методы работ [1] и [4] неприменимы и найдем стратегию окончающую игру в течении конечного времени.