Sonnevend György:

Végtelen dimenziós terek konvex halmazairól

E dolgozatban a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek és a konvex testek elmélete két klasszikus eredményének végtelendimenziós térre vonatkozó kiterjesztésével foglalkozunk.

C. Caratheodorey bizonyitotta, hogy egy n dimenziós tér bármely kompakt, konvex K halmazához tartozó pont előállitható K legfeljebb $n+1$ extremális pontjának konvex kombinációjaként.

A lineáris egyenlőtlenség-rendszerek /n dimenziós térben/ elmélete többek között Farkas Gyula és Minkowski Hermann vizsgálataiból ered.

Az elmélet alkalmazást nyer a számelméletben, a funkcionálanalizis számos témakörében és az utóbbival kapcsolatosan fontos segédeszköz az elméleti fizikában is /kvantumállapotok klasszifikációja/. Alapvető szerepet játszik az "optimális programozási" elméletekben /pl. Kuhn-Tucker tétel/.

Az alaptétel n dimenziós vektorokra vonatkozó egyenlőtlenség-rendszerekre:

Tegyük fel, hogy az $\underline{a}$ az $\{a_\lambda\} = A$ vektorok / λ tetszőleges index-halmaz/ "következménye", azaz abból, hogy valamely x vektorra

/1/ $\quad (a_\lambda , x) \leq 0 \quad$, [( ) a skaláris szorzatot jelöli] következik, hogy

/2/ $(a, x) \leq 0$

Ekkor van n+1 nemnegativ szám: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ és n+1 A-beli $a_1, \ldots, a_{n+1}$ elem, hogy

/3/ $$a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$$

feltéve, hogy az A-beli vektorok az n-dimenziós tér egy zárt halmazát alkotják.

Vizsgáljuk e tétel általánositását X lokálisan konvex topológikus, valós vektor terekre!

Az /1/ és /2/ relációk pozitiv homogenıtása alapján a fenti alaptételt igy is fogalmazhatjuk:

Minden A zárt konvex kupra

/4/ $${}^{\circ}(A^{\circ}) = A$$

ahol, ha X ill. X' jelenti a teret és a téren értelmezett folytonos lineáris funkcionálok terét /"duális"/, tetszőleges $M \subset X$ halmazra

$$M^{\circ} = \{ x' \in X' ; \quad x \in M \rightarrow (x, x') \leq 0 \}$$

ill. tetszőleges M' X' halmazra

$$^{\circ}M' = \{ x \in X ; \quad x' \in M' \rightarrow (x, x') \leq 0 \}$$

A /4/ összefüggés valóban a fenti alaptétel általánositása /a /3/ belőle a Caratheodorey tétel alkalmazásával kapható feltéve, hogy az $\{a_\lambda\}$ -k által generált K konvex kupnak van kompakt sikmetszete, mely nem megy keresztül az origon és generálja K-t./

/4/ bizonyitása egy a Hahn-Banach tételt általánositó Mazurtól eredő tétel alkalmazásával lehetséges.

Először is természetesen $M \subset {}^{\circ}(M^{\circ})$. Tegyük fel létezik $x_o \in {}^{\circ}(M^{\circ}) - M$ Mazur fenti tétele azt mondja ki, hogy minden lokálisan konvex térben levő M, a 0-t tartalmazó zárt konvex halmazon kivüli x_o ponthoz létezik olyan f_o folytonos lineáris funkcionál, melyre

/5/ $f_o(x_o) > 1$ és $f_o(x) \leq 1$ az M-n

/ld. pl. Yosida /1/ 4. fej. 6. §. 3' tétel./

Mivel esetünkben M kup, M-n csak $f_o(x) \leq 0$ lehet /egy kupban minden elem tetszőleges pozitiv számszorosa is benn van/. Ez pont azt jelenti, hogy $f_o \in M^o$, mig az /5/ első relációjából ellentmondásra jutunk: x_o nem tartozhat ${}^{\circ}(M^{\circ})$ -hoz.

Ahhoz, hogy a /3/-hoz analóg előállitást biztosithassunk a Caretheodorey tétel végtelendimenziós analogonjának ismerete kellene, azaz hogyan reprezentálhatók egy konvex halmaz pontjai extremális pontjai segitségével. Choquet bizonyitotta a következő tételt: Legyen X egy lokálisan konvex popologikus vektortér konvex, kompakt részhalmaza, mely metrizálható, ekkor X extremális pontjainak E halmaza G_δ tipusu és minden $x \in X$-hez E-n létezik egy nemnegativ μ_x Baire-mérték, hogy

$$f(x) = \int_E f(e)\,\mu_x(de)$$

minden $f \in X'$ -re. Azaz x a μ_x mérték baricentruma. A fenti mérték adott $x \in X$-re, akkor és csak akkor egyértelmű, ha az $L \times R$ /R a valós számok tere/ térben az $X \times 1$ által generált kup háló az általa definiált részben rendezésre. /Ha $0 \in K$ kup egy L lineáris téren, akkor $x \geq y$ akkor és csak akkor, ha $(x-y) \in K$ továbbá egy részben rendezett halmaz háló, ha bármely két eleméhez van egyértelmű min. és max.

/E két tétel bizonyitását illetően lásd Choquet-Meyer cikkét a részben rendezett lineáris terek elméletét illetően Yosida /1/, XII. fej. ill. Bourbaki "Integration" 1. könyvét . - Az ilyen konvex halmazokat szimplexeknek nevezhetjük /véges, n dimenziós esetben éppen a szimplexek - n+1 pont konvex burkai rendelkeznek a fenti tulajdonsággal/. - Tanulságos a következő példa. A funkcionálanalizisből ismert, hogy Szeparábilis normált tér duálisának egységgömbje konvex kompakt metrizálható tér a gyenge topológiában.

Speciálisan a $C(0,1)$ tér duálisát tekintve, amely a $[0,1]$-n értelmezett Lebesque-Stieltjes /korl.var.fgv./ mértékek összessége, a pozitiv mértékekre a norma $\int_{[0,1]} 1 \, d\mu$, ezért az 1 normáju pozitiv elemek (K) egy "sikon" feküsznek /rajtuk az azonosan 1 függvény által definiált lineáris folyt funkcionál konstans 1 értéket vesz fel/ - és a pozitiv mértékek kupja a Hahn-felbontás létezéséből következően hálószerü. Végül K extremális pontjai a $[0,1]$ intervallum pontjaival állanak kölcsönösen egyértelmü megfeleltetésben, látjuk tehát, hogy a Choquet-Meyer tétel itt éppen a Riesz-Markov reprezentációs tételt adja. És e példa mutatja, hogy végtelendimenziós esetben előfordulhat az is, hogy a reprezentáló mérték nem atomos /mint a Caratheodorey tételből következően véges dimenziós esetben/.

Minthogy a $C(0,1)$ duális tere /korlátos változásu függvények/ nem szeparábilis a kérdés felvetődik; L szeparábilis pl. Hilbert tér esetén, mikor atomosak a reprezentáló mértékek?

Először megmutatjuk, hogy az un. Hilbert tégla esetén a fenti kérdésre igenlő a válasz, majd egy másik példát mutatunk, melyben a válasz tagadó.

A Hilbert tégla T megszámlálható sok szakasz direkt szorzata. (l_2) -ben azon pontok halmaza $\{(x_n)\}$ melyekre $|x_n| < \frac{1}{n}$ $n=1,2,\ldots$

T konvex kompakt halmaz /általában: egy bázissal rendelkező szeparábilis B-térben egy T halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van n_0, hogy $n > n_0$-ra: $\|R_n x\| < \varepsilon$, $x \in T$-re egyenletesen , - $R_n x$, az x kifejtésében az n taggal kezdődő "maradék" összeg /farok/. Lásd pl. Lusztyernyik Szoboljev: Elemente der Funkcionalanalysis, Berlin, 1960. Kap. IV./

T extremális pontjai E az élvégpontok direkt szorzata jelentse d_n a T n dimenzióját adó élvektor felét. T bármely pontja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$ alakban irható, ahol $|c_n| \leq 1$ és E pontjait $|C_n| = 1$ jellemzi.

Megmutatjuk, hogy T bármely pontja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n$$

alakban irható, ahol e_n extremális $(\in E)$. Mivel $\sum \frac{1}{2^n} = 1$, ebből következik, hogy a reprezentáló mértékek választhatók atomosnak.

A bizonyitás azon alapszik, hogy az $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ sor alkalmas előjelezésével minden -1 és $+1$ közé eső szám megkapható, minden C_n-hez választunk egy ilyen előjelezést, és e_n-t ezáltal jelöljük ki.

Elég azt bizonyitani, hogy az $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$-k előjelezésével kapott véges összegek mindenütt sürün vannak a $[-1,1]$-ben a végtelen összegek ennek lezárását adják. Minthogy a diadikusan racionális számok:

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^{n_i}} \qquad n_i > n_j \quad i > j\text{-re}$$

mindenütt sürün vannak, elég megmutatni, hogy ezek előállithatók a fenti előjelezésekkel. Ez pedig azért lehetséges, mert

$$\frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{s-2}} - \frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^s} = \ldots$$

ha az n_i sorozatban hézag van, azt kipótolhatjuk.

Érdekes megjegyezni, hogy a Hilbert téglának nincs baricentrikus felbontása, azaz a véges-dimenzióju tégla csökkenő dimenzióju lapközéppontjai által alkotott szimplexekre bontáshoz analóg felbontás.

A véges dimenziós esetben $\sum_{n=1}^{m} \pm c_n e_n$, $1 \geq c_1 \geq c_2 \ldots \geq 0$ valamilyen konkrét előjelválasztásra adott egy szimplexet, és mivel minden véges sorozat monoton sorozatba irható, azért e szimplexek együttese kiadta a téglát.

Hilbert téglánál $\{c_n\}$-nek a $[0,1]$-neli racionális számokat véve olyan pontot kapunk, mely nincsen benn egyetlen szimplexben sem /szimplex: a $\sum c_n (\pm e_n)$, ahol $0 \leq c_n \leq 1$ és $\{c_n\}$ megszámlálható sok monoton részre bonatható /melyek maguk is monoton következnek, irhatók egymásután/. Valóban a rac. számok természetes rendjükben nem irhatók le. - A baricentrikus felbontást tehát általánositani kell majd.

A következő példánkban látjuk, hogy a Caratheodorey tételben szereplő $n+1$ helyébe végtelendimenziós /de szeparábilis/ általánositásánál a megszámlálhatónál "(n)" jóval nagyobb számosság "$(n+1)$ként" a kontinuum lép.

Tekintsük az $L_2(0,1)$ Hilbert térben azon függvényeket /pontosabban ezek osztályait mod 0 mértékü halmazokra/, melyek monoton csökkenők, pozitivak és 1-nél nem nagyobbak.

Ezek halmaza X konvex és kompakt, M.Riesz, Kolmogorov, Frechet jól ismert kompaktsági kritériuma teljesül:

$$\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt < K$$

és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy ha $0 < h < \delta$

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt < \varepsilon$$

Valóban a monotonitás miatt

és mivel $0 \leq x(t) \leq 1$

$$\mu(S_n) = \mu\left(t:\ h \cdot n \leq x(t+h) - x(t) < h(n+1)\right) \leq \left(\frac{1}{n} - h\right) \nu(S_n)$$

ahol $\nu(S_n)$ az $x(t)$ függvény által generált Borel mérték $\mu = dt$ a Lebesque mérték.

$$x(t) = \int_t^1 1 \, d\nu$$

Ezért

$$\int_{S_n} |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt < (n+1)^2 h^2 \left(\frac{1}{n} - h\right) \nu(S_n) \leq h \, \nu(S_n)$$

felhasználva az $\left(\frac{1}{n} - h\right) \cdot h \leq \left(\frac{1}{2n}\right)^2$ és $n+1 \leq 2n$ összefüggéseket. Ha $n = 0$, akkor

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^2 \, dt \leq h^2 < h$$

Mivel $\sum \nu(S_n) \leq x(o) - x(1) \leq 1$ kapjuk, hogy a követelt reláció teljesül $\varepsilon = 2\delta$ véve, minthogy egy L_2-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenütt konvergens részsorozata és az is monoton függvényhez tart: X kompakt.

Az X halmaz extremális pontjai E a $[0, \xi]$ intervallumok $\xi \leq 1$ karakterisztikus függvényei, - minden fenti tipusu $x(t)$ függvény a ν mértéket ezeken egyértelmüen meghatározza. Ha a ν mérték nem atomos, az általa előállitott függvény nem nyerhető megszámlálható sok extremális pont segitségével.

Irodalom:

1. Yosida, Functional Analysis, Springer 1965, oroszul, 1967.
2. Choquet-Meyer: Existence et unicité des representations integrales, Annales de l' Institut Fuorier, 1963. p. 139-154.
3. C.Berge et Ghomla-Honri: Programmes, jeux et reseaux de transport, Dunod Paris 1962, oroszul is megjelenik.

S u m m a r y

In this note we want to investigate the problem of the generation a convex set by its extrem points in the infinite dimensional case.

The fundamental theorem of G.Choquet states:
Be X a locally convex topological vector space, K a compact convex subset of it. Then, the set of the extremal points of K, E, is G_δ and to every point $x \in K$ there is a Baire measure on E having x as harycentrum, that is

$$x = \int_E e \, d\mu^x(e) \qquad \mu(E) = 1, \; \mu(E') \geq 0 \text{ for } E' \subset E$$

We inquire: in what cases is this measure discret /atomic/ - specially when X is a separable Hilbert - space. First we shaw, that for the so called-/compact/-Hilbert paralelogram: $\{x_n\}$, $|x_n| \leq \frac{1}{n}$ all μ^x can be chosed to have the discret weights $\frac{1}{2^n}$, n = 1,2,... /However K-has ordinary barycentic decomposition/. The more interesting second example shovs that - in $L^2(0,1)$ taking K to be the set of monoton decrising fonctions $x(t)$, such that $0 \leq x(t) \leq 1$ - wich is proven to be compact - the discret measures on E are not sufficient to generate a /continous/ function in K.

Р е з ю м е

В этой статье изучается представление выпуклого множества через его крайние точки в бесконечномерном случае.

Основная теорема Шоке гласит: для каждого пункта x выпуклого, метризуемого, компактного множества K локально-выпуклого пространства X существует бэровская неотрицательная мера μ^x такая, что $\mu^x(E)=1$, где E - множество / типа G_δ / крайних точек K, и x является " барицентром " т.е.

$$x=\int_E e\,\mu^x(de) \qquad \mu(E)=1, \qquad \mu(E')\geq 0$$

для $E'\subset E$

Спрашивается: когда эта мера дискретна в случае X сепарабельного гильбертового пространства. Пусть K " гильбертов параллелограмм ".

$\{x_n : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$, тогда можем быть взята мера μ^x, имеющая дискретные весы $\frac{1}{2^n}$, $n=1,2,\dots$,

Однако теперь обыкновенное " барицентрическое " разбиение невозможно. Интересен и второй пример, когда K - множество убывающих функций $0\leq x(t)\leq 1$, в $L_2(0,1)$ - это множество компактно, но для представления непрерывной функции дискретные меры уже недостаточны.