Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I.

SZABÓ ÁRPÁD

Ennek a tanulmánynak a célja az, hogy kimutassa: a görög matematika mint deduktív tudomány az eleai filozófia hatására született meg legkésőbb az i. e. 5. század első felében; ezt megelőzően az eleaták fogalmazták meg tudatosan először az európai gondolkozás történetében a logika alapelveit, deduktív matematika pedig nem lehetséges mindaddig, amíg a matematikus nem építheti tételeinek igazolását az általa már jól ismert és tudatosan alkalmazott logikára. A kitűzött célnak megfelelően a dolgozat az alábbi *négy* fejezetre oszlik: az I. fejezetben röviden vázolom, hogy milyen újabb kérdéseket vetett föl a görög matematika történetével kapcsolatban a régebbi ókori keleti népek matematikájának alaposabb megismerése; a II.-ban ismertetem a görög matematika kibontakozására vonatkozó újabb elgondolásokat; a III.-ban összefoglalom azokat a legfontosabb antik adatokat és a hozzájuk fűződő modern tudománytörténeti megállapításokat, amelyekre saját elgondolásom épül; végül pedig a IV.-ben a matematikai indirekt bizonyítás vizsgálatával kapcsolatban kifejtem véleményemet az egzakt görög tudomány létrejöttéről.

I.

A legutóbbi évtizedek során több jelentős tudománytörténeti jellegű dolgozat foglalkozott az ókori Egyiptom és Babylón népeinek matematikai ismereteivel.[1] Ezek a kutatások nemcsak azzal az eredménnyel jártak, hogy jobban megismertük a görögség előtti ókori kultúrák matematikáját, hanem újabb ismereteink módosították a görögségről és a tudomány kezdeteiről alkotott elképzelé-

[1] Lásd ezeknek az eredményeit összefoglalva B. L. v. d. WAERDEN, Science awakening, Groningen, 1954 c. munkájának első három fejezetében.

seinket is. Amíg nem ismertük az egyiptomi és babylóni matematikát, több-kevesebb joggal a görögöket tarthattuk a matematika megteremtőinek. De egyszerre más lett a helyzet akkor, amikor kiderült, hogy sok matematikai felismerés, amelyet a görög hagyomány az i. e. 6. vagy 5. századra datált, már évszázadokkal korábban közismert volt a görögség előtti kultúrákban. Pythagoras életkorát pl. a görög hagyomány az i. e. 6. századra teszi, és ennek megfelelően i. e. 6. századi eredetű lehetne az a Pythagoras tétele néven emlegetett felismerés, amelyet a hagyomány Pythagorasnak tulajdonít. A modern kutatók közül azonban régebben sokan kétségbevonták ezt a hagyományt azért, mert nem tartották lehetőnek, hogy egy ilyen fontos tételt már ilyen *korán*, a tudománynak szinte a kezdetén fölismertek volna.[2] Más értelme lett azonban a modern tudomány szkepszisének az antik hagyománnyal szemben akkor, amikor kiderült, hogy ismerték a Pythagoras-tétel gyakorlati alkalmazását a babylóniak már az i. e. 2. évezredben is.[3] Hasonlóképpen kiderült az Euklidés művében rendszerezett matematikai tudásanyag nagy részéről, hogy az — legalábbis mint empirikus ismeret — már jóval a görögök előtt készen volt a babylóni kultúrában.[4]

Megismertük a görög tudomány előzményeit, s ezáltal a görögök a tudománytörténet szempontjából szinte elveszítették régi nimbuszukat. Mint a görögség előtti matematika történetének egyik kutatója, O. Neugebauer mondja: amióta nemcsak azt a két és félezer évet tekinthetjük át, amely a klasszikus görög kor óta eltelt, hanem amióta többé-kevésbé ismerjük azt a másik két és félezer évet is, amely a görög kor *elé* esik, azóta nem tekinthetjük a görögöket a tudomány megteremtőinek.[5] Mai megítélésünk szerint a görög matematika már nem a tudomány történetének a kezdetén, hanem valahol a közepe táján helyezkedik el.[6] Sőt, Neugebauer éppen a babylóni matematikára gondolva fölvetette azt a kérdést is:

[2] Vö. B. L. v. d. Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer I. c. dolgozatával (Math. Ann. 120 1947/49 127—153; különösen 132. lap)

[3] Vö. O. Neugebauer, Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften, Berlin 1934, 168. lap és K. Reidemeister, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 51. lap.

[4] Vö. O. Neugebauer, Studien zur Geschichte der antiken Algebra III. (Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3, 1936 245—259): „Sowohl im Bereich der Elementargeometrie, wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre wie schließlich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte *inhaltliche* Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluß ist in allen Punkten praktisch lückenlos herzustellen."

[5] O. Neugebauer, Quellen und Studien i. h. 259. lap.

[6] B. L. v. d. Waerden, Math. Ann. 120 1947/49 132. lap.

vajon szabad-e a tudománytörténet szempontjából a görög matematika vívmányait egyértelműen *csak* pozitíven értékelnünk? — Hiszen a görögök, ahelyett pl., hogy a babylóniak nyomán tudatosan megteremtették volna a 10-es vagy 12-es pozicionális számrendszert, a babylóniak kibontakozóban levő pozicionális számjelölését betűszámokká módosították, ami hosszú ideig tartó súlyos visszaesésre kellett vezessen[7]. Hasonlóképpen a babylóni algebra is a görögök

[7] A. Frenkian, Études des mathématiques suméro-akkadiennes, égyptiennes et grecques c. román nyelvű tanulmányának francia kivonatában (Revue de l'Université de Bucarest 1953, 9—20) írja: "Rien n'indique les mathématiciens grecs aient connu le système de notation de position relative des peuples de la Mésopotamie. Le système grec de notation des nombres est des plus défectueux, *incapable d'aider le calcul* (az én kiemelésem — Sz. Á.) inférieur même à celui des Égyptiens, qui avait un signe particulier pour chaque ordre d'unités décimales, qu'ils répétaient autant de fois qu'il était nécessaire pour écrire un nombre donné. Donc, ou bien les Grecs n'ont pas connu le système de notation des Babyloniens, ou bien *l'esprit de leur mathématique étant orienté dans une autre direction, ils n'ont pas adopté ce système, si toutefois ils l'ont connu*" (az én kiemelésem — Sz. Á.) — A továbbiakban megkíséreli *Frenkian* a magyarázatot arra a kérdésre: miért nem fejlesztettek ki a görögök jobb számjelölési rendszert; ezzel kapcsolatban a következő érdekes magyarázattal próbálkozik: Les Hellénes avaient deux sciences qui s'occupaient des nombres: *l'arithmétique* qui était la science théorique des nombres, très étudiée et honorée, et *la logistique* qui était lié à la pratique et qu'on avait abandonné à des specialistes considérés comme des artisans, appelés avec un certain mépris du nom de *banausoi*. C'est ainsi que la science théorique qui est l'arithmétique a fait chez eux de grands progrès, sans faire profiter la logistique de ces progrès. Celle ci a continué de travailler avec les anciennes méthodes venues de l'Égypte: à savoir, la multiplication par duplications successives dont parle un scholie au dialogue Charmide de Platon et le calcul fractionnaire seulement avec des fractions ayant l'unité au numérateur, méthode qui fut employé jusqu'aux temps des Byzantins. — Les mathématiques suméro-akkadiennes ont été beaucoup plus liées à la pratique, comme on le voit par les problèmes qu'elles ont à résoudre dans les textes qui nous sont parvenus. Ensuite, la base de 60 pour le système de numération était très grande et c'est pourquoi les tenants de la civilisation mésopotamienne ont eu recours à la notation de position relative, etc." — Ez az elgondolás összeegyeztethető azzal a felfogással, amelyet dolgozatunk is képvisel, hogy ti. az antik görög matematikának nemcsak nagy eredményei, hanem viszonylagos *elmaradottsága* is úgyanannak az alapvető tendenciának következménye. A. Frenkian elméletéhez csak a következő korrekciót kell hozzáfűznünk: tévedés a görögök *„elméleti* aritmetikáját" egyszerűen csak a *„gyakorlati* logisztikával" szembeállítani. Platon az Állam és a Philebos c. dialogusokban nemcsak praktikus logisztikáról, hanem praktikus arithmetikáról is beszél; ezt a két gyakorlati tudományt állítja szembe az elméleti arithmetikával és logisztikával. Platon szerint tehát mind az arithmetika, mind a logisztika lehet gyakorlati és elméleti tudomány is. Az az egyszerűsítő elgondolás, amelyet Frenkian is képvisel, csak későbbi, *újplatonikus* eredetű. Vö. J. Klein, Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra I., II., Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3. (1936) 18. kk. és 122. kk.

közbejötte nélkül szinte egyenesen fejlődhetett volna tovább a reneszánsz algebrájába, és ezzel talán kétezer évet „megtakaríthattunk“ volna.[8]

Természetesen NEUGEBAUER is tudja, hogy a görögök a matematika története szempontjából távolról sem jelentettek „visszaesést“ a szó igazi értelmében. Az említett példákra csak azért hivatkozik, mert érzékeltetni akarja, hogy a tudomány fejlődése *nem* egyenes vonalú fejlődés; csakugyan voltak a régebbi babylóni matematikában olyan kezdemények, amelyeket a náluk későbbi görögök *nem* használtak ki; sőt azáltal, hogy a görögök a matematika fejlődését egy bizonyos meghatározott irányba terelték[8a], lehetetlenné vált az is, hogy a babylóniaknak az algebrában meglevő kezdeményei az európai reneszánsz kora előtt tovább fejlődjenek.[9]

[8] Lásd az 5. jegyzetet!

[8a] Ez a dolgozat a görögök legfőbb érdemét a *deduktív* matematika megteremtésében látja. A deduktiv matematika viszont elgondolásunk szerint azáltal jött létre, hogy alkalmazták a logikát az addig csak *empirikus* jellegű matematikai ismeretekre. Mégis tévedés lenne, ha azt hinnők, hogy a logika alkalmazása a matematikai ismeretekre kezdettől fogva *csak* pozitív hatással volt a tudomány fejlődésére. Részben ez a hatás egyes területeken gátolta is a tudomány továbbfejlődését. Már B. L. v. d. WAERDEN is utalt arra, milyen feltűnő pl. éppen a matematikában a görögök logikus merevsége. Közismert az is, hogy a görögség előtti kultúrákban milyen fejlett volt a törtekkel való számolás. A görög deduktív matematika viszont nem tudott mihez kezdeni a törtekkel; sőt éppen merev logikus megfontolás alapján kénytelen volt kirekeszteni a törteket a matematikából. Mint Platón Sokratese fejtegeti egy alkalommal: „Hiszen tudod, hogy a matematikusok, ha valaki az *egy*et megpróbálná felosztani, kinevetnék és nem járulnának hozzá kísérletéhez: hanem ha te darabokra tördelnéd az egyet, ők ehelyett inkább megszoroznák, mert mindenképpen el akarnák kerülni, hogy *az egy bármikor is ne egy, hanem több részből álló legyen...*“ (Platón, Állam, VII, 525 D kk.). A törteket tehát azért kellett kiküszöbölni a görög matematikából, bármilyen fejlett volt is a törtekkel való számolás régebbi gyakorlata, hogy *ellentmondásmentes* maradjon az „egység“ definiciója: *„egység az, ami szerint bármely dolgot egynek mondunk“* (Eucl. VII, def. 1.). — Ezért nem fejlődhetett tovább a görögöknél a törtekkel való számolás gyakorlata sem; még a bizánci időkben is az maradt, ami volt az ókori Egyiptomban. (Vö. ezzel A. FRENKIANnak föntebb a 7. jegyzetben említett dolgozatát.). Egyébként a görög matematika éppen azért fejlesztette olyan magas fokra az arányról szóló tanítást, mert deduktív matematikájukban az arány helyettesítette a törtet.

[9] Érdemes egyébként O. NEUGEBAUER és B. L. v. d. WAERDEN szavait összevetnünk abból a szempontból, hogyan ítéli meg ez a két kutató a görögöknek ugyanazt a matematikai felismerését, ti. azt, hogy megismerkedtek az irracionális mennyiségekkel. O. NEUGEBAUER a legutóbb idézett helyen ezt írja: „In der Mathematik wurde die Einsicht in das Wesen der Irrationalzahlen erkauft mit dem abrupten Abbrechen eines bereits zu einem algebraischen Formalismus gelangten Systems, das sich in allen Punkten direkt in die Algebra der Renaissance hätte fortentwickeln können — *ohne* die tiefsten mathematischen Leistungen der Griechen wären vielleicht 2000 Jahre zu

Azóta tehát, hogy jobban ismerjük a görögség előtti matematikát, másképp ítéljük meg a görögöket, mint régebben. De módosították újabb ismereteink a matematika kezdeteiről alkotott elképzeléseinket sok egyéb szempontból is. Régebben pl. úgy gondolták, hogy a matematika fejlődésének kezdeti szakaszán túlnyomórészt *geometria* volt; azt hitték, ez így is kellett hogy legyen, mert a geometria „kevésbé elvont“, „szemléletesebb“, mint az algebra. Szinte észre sem vették, hogy ez a téves elgondolás tulajdonképpen csak Euklidés és a görög matematika szemléletéből indult ki; azért tartották a geometriát a legrégibb matematikai diszciplínának, mert a görögöknél — a „legrégibb“ ismert ókori kultúrnépnél — a matematika úgyszólván egyértelmű volt a geometriával. Ezért feledkeztek meg a közelmúlt tudósai arról, hogy a valóságos fejlődés lépten-nyomon ellentmond a geometria történeti elsőbbségéről felállított posztulátumnak. Hiszen a geometria újabb eredményei a fejlődés minden szakaszán más matematikai diszciplinák fejlődésével szorosan összefonódva születnek meg, úgyhogy az, ami tisztán geometriai jellegű, csak utólag bontakozhatik ki ebből az összefonódottságból.[10] Mint a közelmúltban folytatott történeti vizsgálatok igazolták, érvényes ez a megfigyelés a matematika őstörténetére is. A „tiszta“ („szintetikus“) geometria ebben a korai szakaszban még túlságosan nehéz lenne. Ezért a görögöket megelőző 2000 éves fejlődés során mindaz, ami geometria, még csak másodlagos jellegű.[11] A geometria előtérbe nyomulása csak jóval később, a görögöknél következett be.

gewinnen gewesen“. — B. L. v. d. WAERDEN viszont éppen az irracionális számok fölismeréséből adódó logikai konzekvenciákról írván (hogy ti. *Strekken nicht universell durch Zahlen darstellbar sind und daher auch nicht ohne weiteres wie Zahlen behandelt werden dürfen),* rendkívül nagyra értékeli a görögök teljesítményét és összehasonlítja őket a modern európai tudomány képviselőivel a következőképpen: „Die meisten Vertreter der abendländischen Wissenschaft z. B. haben die Darstellbarkeit von geometrischen Größen durch Zahlen nie bezweifelt, obwohl sie mit der Existenz von irrationalen Verhältnissen bekannt waren und obwohl man vor Dedekind und Cantor nicht über den exakten Begriff der reellen Zahl verfügte. *Die griechische Kultur ist meines Wissens die einzige, die diese logische Konsequenz wirklich vollzogen hat*“ (az én kiemelésem — Sz. Á.)

[10] O. NEUGEBAUER, Quellen und Studien, i. h. 246. lap: „Die großen Fortschritte der Geometrie sind in allen Phasen immer unlösbar mit der Entwicklung anderer Disziplinen verknüpft (analytische Geometrie und elementare Algebra, Differentialgeometrie und Analysis, Topologie und Riemannsche Flächen + abstrakte Algebra), So daß das Geometrische an sich immer erst nachträglich wieder aus dieser Verknüpfung gelöst werden mußte.“

[11] O. NEUGEBAUER uo. 247. lap: „in den 2000 Jahren vorangehender Entwicklung ist alles 'geometrische' nur ein sekundäres Objekt zunächst der Rechentechnik mit den rationalen Zahlen in beiden vorgriechischen Kulturen, dann der Algebra in Babylonien.“

Ez a felismerés lehetővé tette azt is, hogy teljesebb magyarázatot találjunk egy olyan jelenségre a görög matematikán belül, amelyet ugyan már régebben észrevettek, de megmagyarázni alig tudtak. Már ZEUTHEN észrevette ugyanis,[12] hogy Euklidés II. és VI. könyvében tulajdonképpen geometriai formába öltöztetett *algebrai* problémákról van szó. De arra a kérdésre, hogy igazában miért is geometrizálták a görögök az algebrát, régebben nem tudtunk kielégítő magyarázatot; legfeljebb csak a geometria nagyobb „szemléletességére“ hivatkozhattunk. Ma viszont tudjuk már, hogy a görögöknek azért kellett geometrizálniok az algebrát, mert az irracionális mennyiségek felfedezése után csak ezen az úton biztosíthatták továbbra is a matematika általános érvényűségét, áttérvén a racionális számok területéről az általános mennyiségi viszonyok területére; és ezért kellett az egész görögség előtti „algebrikus“ algebra eredményeit is a „geometrikus“ algebra nyelvére lefordítaniuk.[13] — Ebben a megvilágításban egyszerre megértettük azt is, miért tartotta az i. e. 4. század legelején ARCHYTAS még többre a „logisztikát“ (a görögök *algebráját*) mint a geometriát;[14] ARCHYTAS ugyanis még nem érvényesítette olyan messzemenően az irracionalitás felfedezéséből adódó logikai következményeket, mint

[12] H. G. ZEUTHENNEK (Die Mathematik im Altertum und Mittelalter) erre a régi felismerésére utal O. NEUGEBAUER, Quellen und Studien, i. h. 249. lap és B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 117, 1940 158. lap.

[13] O. NEUGEBAUER i. m. 250. lap: „Die Antwort auf die Frage nach der geschichtlichen Ursache der Grundaufgabe der gesamten geometrischen Algebra kann man heute vollständig geben: sie liegt einerseits in der aus der Entdekkung der irrationalen Größen folgenden Forderung der Griechen, der Mathematik ihre Allgemeingültigkeit zu sichern durch Übergang vom Bereich der rationalen Zahlen zum Bereich der allgemeinen Größenverhältnisse, andrerseits in der daraus resultierenden Notwendigkeit, auch die Ergebnisse der vorgriechischen algebraischen Algebra in eine geometrische Algebra zu übersetzen.“

[14] ARCHYTAS, H. DIELS, Fragmente der Vorsokratiker 35 B 4: „a logisztika mint tudomány messze felülmúlja a többit, különösen a geometriát, mert ez világosabban kezeli tárgyát, mint amazok . . . és ahol a geometria már nem boldogul, a logisztika még tovább bizonyít.“ — A „logisztika“ terminus ebben az összefüggésben arithmetikát *és* logisztikát együtt jelöl; vö. J. KLEINnek föntebb a 7. jegyzetben idézett dolgozatával (32. lap 1. j.). Érdemes lesz megemlíteni, hogy ennek az Archytas-fragmentumnak az értelmét mindaddig nem is foghattuk fel, amíg O. NEUGEBAUER (Quellen und Studien, i. h. 245) rá nem mutatott igazi matematikai-történeti jelentőségére. Mint NEUGEBAUER írja: „Die Prägnanz dieses Ausspruchs ist umso interessanter, als er ja nur um wenige Jahre älter ist, als die Geometrisierung der griechischen Mathematik, die wir als ihre 'klassische' Form anzusehen gewöhnt sind“. Ezzel szemben DIELS szöveggyűjteménye nem tudván még erről az összefüggésről, megjegyzi: „Sinn und Herstellung des Fragments unsicher . . .“.

közvetlen utána THEAITÉTOS és PLATÓN.[15] Ez más szóval azt jelenti, hogy ma már pontosan meg tudjuk jelölni azt az időszakaszt, amikor a görögöknél a régebbi „logisztikát" háttérbe szorítja a geometria;[16] tudjuk azt is, hogy a geometria előtérbe nyomulása egy logikai felismerésnek — az irracionális mennyiségek felfedezésének a szükségszerű következménye volt.[17] — Az a régebbi elgondolás tehát, amely a görög geometria „szemléletességét" hangsúlyozta, erősen módosult. Sőt, az újonnan föltáruló történeti perspektívában fel kellett merülnie a kérdésnek: vajon egyáltalán a szemléletesség-e a görög matematika legjellemzőbb vonása?[18] Egyszerre igazat kellett adnunk Platónnak, aki a görög matematikáról szólva már az i. e. 4. század első felében hangsúlyozta, hogy a geometria szemléletessége távolról sem *konkrét* szemléletesség, mert ez a szemléletesség tulajdonképpen csak *emlékeztet* valamire, ami másképp, mint gondolati úton egyáltalában nem hozzáférhető.[19]

A felsorolt példák tehát azt mutatják, hogy a görögség előtti matematika jobb megismerése csakugyan módosította és elmélyítette a görögökre vonatkozó ismereteinket is. Ma már ugyan nem tekinthetjük a görögöket a matematikai tudomány megteremtőinek abban az értelemben, ahogy ezt régebben gondolták, de ma már

[15] B. L. v. d. WAERDEN, Zenon und die Grundlagenkrise der griech. Math. c. dolgozatában (Math. Ann. 117. 1940. 141 kk.) az előbbi Archytas-idézettel kapcsolatban a következőket írja: „Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: Theaitetos entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei Platon ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt. Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei Euklid ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gevande, als Flächenrechnung oder 'geometrische Algebra', ihr Dasein fristen.

[16] Lásd O. NEUGEBAUER és B. L. v. D. WAERDEN szavait a megelőző két jegyzetben.

[17] Vö. B. L. v. d. WAERDEN Science awakening 125. lap k.: „It is therefore *logical necessity*, not the mere delight in the visible, which compelled the Pythagoreans to transmute their algebra into a geometric form."

[18] K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 51. lap; „Es ist ein weitverbreitetes Vorurteil, das wesentliche Merkmal der griechischen Mathematik sei ihre Anschaulichkeit . . . Richtig ist es vielmehr, daß sich in der pythagoreischen Mathematik die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht."

[19] PLATON, Állam, VII, 526 (amikor a matematikusok számokról beszélnek, akkor számon valami olyasmit értenek, ami *csak a gondolkozás számára* megközelíthető) és uo. 527 (amikor a geometriában valamit szemléltetnek, úgy beszélnek, mintha valami konkrét dologról lenne szó, holott igazában *nem* a láthatóra, hanem a *csak elgondolhatóra* akarják irányítani a figyelmet.

annál konkrétebben tudunk rámutatni arra, hogy mit jelentett a görögség a matematika történeti fejlődésében. Egyértelműen kiderült pl., hogy a görögség előtti matematika még egyáltalán nem ismeri a *tétel*, a *bizonyítás*, a *definíció*, a *posztulátum* és az *axióma* fogalmát.[20] Ez a régebbi matematika tulajdonképpen még csak empirikus ismerethalmaz, amely ad ugyan bizonyos szabályokat matematikai jellegű feladatok megoldására, de a tételeket nem fogalmazza meg általános érvényű formában és a tételek bizonyítására még csak kísérletet sem tesz, legfeljebb bemutatja egy-egy numerikus példán az eredmény kiszámításának a menetét. Rendszeres deduktív tudománnyá csak a görögöknél lett a matematika. Az empirikus ismerethalmaznak ez az átalakulása egzakttudománnyá természetesen óriási jelentőségű lépés volt a további fejlődés szempontjából. Érthető tehát, hogy a történeti kutatás figyelme e felé a kérdés felé fordult: *hogyan, mikor* és *miért* lett a görögöknél a matematika deduktív tudománnyá? — Dolgozatom, amely ezeknek a kérdéseknek a tisztázására törekszik, a következő fejezetben mindenekelőtt három pontban ismerteti azokat az elgondolásokat, amelyek a fölvetett problémával kapcsolatban a közelmúltban napvilágot láttak.

II.

A matematikának mint deduktív tudománynak a kibontakozását általában a logika elméletének a kibontakozásával szokták összehasonlítani. Lássuk pl. az 1. pontban annak a K. v. FRITZnek az elgondolását, aki legutóbb egyik dolgozatában[21] utalt arra, hogy a matematika a görögöknél tulajdonképpen azért „válhatott egzakt tudománnyá, mert definíciós-axiomatikus megalapozást nyert". Bár a szerző arra a kérdésre, hogy ez a folyamat hogyan és mikor ment végbe, nem ad közvetlen választ, mégis érdemes lesz átte-

[20] O. BECKER, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg München 1954 22. lap: „Nicht einmal die Formulierung allgemeiner Sätze ist für Babylonien gesichert. (Dagegen kommen solche in der traditionellen Form des dogmatischen Kurzsatzes (sūtra) in der altindischen Sakralgeometrie vor.) Von Beweisen ist in den erhaltenen altorientalischen Dokumenten erst recht nichts zu finden; höchstens kommen zahlenmäßig ausgerechnete Proben vor." — ALEXITS GY. és FENYŐ I. könyve (Matematika és dialektikus materializmus, 1948) több ízben beszél az egyiptomi és babylóni matematika „bizonyításairól" (pl. a 40. és 41. lapon). Tudomásom szerint a görögség előtti matematikában egyáltalán nincsenek bizonyítások.

[21] K. v. FRITZ, Die Ἀπξαι in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte, Bd. 1, Bonn 1955 13—103.

kintenünk — helyenként kiegészítve és korrigálva! — a gondolatmenetét, mert szempontjai közelebb vihetnek bennünket a probléma megoldásához.

1. pont EUKLIDÉS klasszikus művében, az Elemekben, amely i. e. 300 körül keletkezett, külön csoportokba foglalva ismerteti előbb a definíciókat, posztulátumokat, axiómákat, és csak ezek után tér át az egyes tételek (theorémák) ismertetésére, ill. bizonyítására. Arra nézve, hogy mi ennek a beosztásnak az értelme, EUKLIDÉS maga egyáltalán nem ad magyarázatot. De világosan megmagyarázza ezt Euklidés kommentátora, PROKLOS az i. sz. 5. században: „Minthogy azt állítjuk, hogy ez a tudomány, a geometria (= matematika) feltevésekből indul ki és meghatározott principiumokból bizonyítja levezetett következtetéseit — mert ezek közül csak az egyik csoport feltevés nélküli, a másik azonban éppen az előbbiből nyeri principiumait —, annak, aki geometriai kézikönyvet állít össze, külön kell tárgyalnia tudományának alapjait (= principiumait), és külön azokat a dolgokat, amelyeket az alapokból vezet le. Az alapokról nem kell számot adnia, ezeket nem kell bizonyítania, de mindazt, ami ezekből következik, bizonyítania kell."[22]

PROKLOS félreérthetetlenül megmagyarázza művében más alkalommal azt is, hogy mi a különbség az euklidési definíciók, posztulátumok és axiómák között: ezeket együttvéve nevezi *alapoknak*, principiumoknak, ill. görög szóval *arché*knek. Magyarázatából bennünket most leginkább az érdekel, hogy szerinte az axiómák és posztulátumok esetében *nem szükséges*, sőt *nem is lehetséges* a bizonyítás vagy geometriai megokolás;[23] ezeket ismerteknek tételezzük fel és a definíciókkal együtt ezek az alapjai (principiumai) mindannak, ami utánuk következik.

PROKLOS magyarázata csakugyan jól megvilágítja EUKLIDÉS művének a szerkezetét. EUKLIDÉS nyilván azért sorolja fel mindjárt az első könyv elején, mielőtt még rátérne az egyes tételek ismertetésére és bizonyítására, a definíciókat, posztulátumokat és

[22] PROCLI DIADOCHI in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ed. G. Friedlein. Lipsiae 1873 p. 75.

[23] PROCLUS (ed. G. Friedlein) 178. lap: „Közös az axiómák és posztulátumok esetében az, hogy ezeket nem kell bizonyítanunk vagy geometriailag megokolnunk, hanem föltesszük, hogy ezek ismertek és principiumai mindannak, ami utánuk jön. (Egymás között azonban ezek éppen úgy különböző dolgok, mint ahogy más a tétel és más a feladat.)" — Más alkalommal viszont (76. lap) így ír Proclus: „Ha olyan állítással van dolgunk, amely önmagában nem evidens ugyan, de amely mégis fölállítható, és az, aki hallja, elfogadja, akkor *definíció*ról beszélünk."

axiómákat,[24] mert ezek azok a „principiumok“, amelyekből a theórémák levezethetők. Ebben az összefüggésben most nem lényeges az a kérdés, vajon az egyes definíciók, posztulátumok és axiómák csakugyan *mind* magától EUKLIDÉStől származnak-e.[25] (Lehet, hogy ezek közül egyiket-másikat EUKLIDÉS már készen vette át; mások viszont később, az EUKLIDÉS utáni korban is belekerülhettek az „Elemek“-be.) Kétségtelen, hogy magának az euklidési műnek a szerkezete bizonyítja: EUKLIDÉSnek már nagyon is jól kellett tudnia, hogy egész matematikai tudásunk be-nem-bizonyított principiumokból és olyan tételekből áll, amelyek az előbbi principiumokból következnek. Ez viszont más szóval azt jelenti, hogy a görögök EUKLIDÉS korában, i. e. 300 körül már pontosan tudták: miben áll a matematikai bizonyítás, és meddig folytatható.

ARISTOTELÉS volt az, aki már egy generációval EUKLIDÉS előtt, a 4. században, egyik logikai munkájában, az *Analytica posteriora*ban rendszeresen tárgyalta az ún. bizonyító (apodeiktikus) tudományok módszerét. ARISTOTELÉS erre vonatkozó fejtegetései nagyjából összeegyeztethetők azzal, amit EUKLIDÉS kommentátora, PROKLOS mond a matematikai bizonyításról, bár kétségtelen, hogy EUKLIDÉS és az antik matematikusok nem mindenben értettek egyet ARISTOTELÉS véleményével; ARISTOTELÉSnek még a terminológiája sem mindenben azonos a matematikusok terminológiájával.[26] A lényeg azonban számunkra az, hogy a bizonyító tudomány módszerét ARISTOTELÉS is a matematikán illusztrálja, és ő is úgy gondolkozik a principiumokról, mint EUKLIDÉS, illetőleg PROKLOS; mint írja; „Principiumnak nevezem minden műfajban azt, amelyről nem lehet bebizonyítani, hogy *van*, illetőleg hogy *érvényes*“[27]. — Világos, hogy ebben az értelemben tekintik principiumnak a definíciókat, posztulátumokat és axiómákat EUKLIDÉS és PROKLOS is.

Hasonló volt a véleménye a matematikai principiumokról (vagy legalábbis egy részükről: a *definíciókról*) már ARISTOTELÉS

[24] Posztulátumokat és axiómákat Euklidés csak az első könyv elején sorol fel; definíciót viszont a VIII., IX., XII. és XIII. könyvtől eltekintve minden könyv elején találunk. — Minthogy az axiómák és posztulátumok általánosabb jellegűek, mint a definíciók, valószínű, hogy ezeknek, az axiómáknak és posztulátumoknak a fogalmát csak később teremtették meg a matematikusok. A definíciók lehetnek a legkorábban fölismert euklidési principiumok.

[25] Az euklidési definíciók, posztulátumok és axiómák különböző eredetére vonatkozóan lásd: P. TANNERY, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide (Mém. scient. 1912, 48—63) és A. M. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940, 21—24.

[26] Találóan jegyzi meg ezzel kapcsolatban K. v. FRITZ i. m. 103. lap: „Die mathematische Entwicklung ist weitgehend an Aristoteles vorbeigegangen.“

[27] Aristoteles, An. Post. I. 10.

előtt a 4. század első felében PLATÓNnak is. Mint az Állam c. dialógusban PLATÓN SÓKRATÉSe mondja: „azok, akik geometriával, számokkal és más ehhez hasonló tudománnyal foglalkoznak, alapul veszik a páratlant, a párost, a háromféle szöget és más ehhez hasonló fogalmat; ezeket teszik meg alapnak abban a feltevésben, hogy ezeket tudják már; nem is adnak róluk számot sem maguknak, sem másnak, hanem ezekből mint principiumokból kiindulva az utánuk következő dolgok bizonyításához látnak (VI 510 C—D); az alapul választott feltevések mögé azonban már nem hatolhatnak" (VI 511 A).

Ebből láthatjuk tehát, hogy jóval EUKLIDÉS előtt, már PLATÓN korában tudtak a görögök a matematikai bizonyításról két rendkívül fontos dolgot:

a) a bizonyítás nem folytatható végtelenül, nincs *regressus ad infinitum*

és

b) a matematikának kell hogy legyenek tovább már nem bizonyítható alapjai.

Úgy látszik tehát, a matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának — részben mindenesetre — azért kellett bekövetkeznie, mert a görögök nyilván szükségesnek érezték, hogy összeállítsák azokat a tovább már nem bizonyítható, de önmagukban is evidensnek érzett matematikai jellegű megállapításokat, amelyekre fölépíthető volt egész matematikai tudásuk.

Ennek a definíciós-axiomatikus megalapozásnak a létrejöttét K. v. FRITZ az aristotelési logika keletkezésével hasonlítja össze: mint írja: az aristotelési logika a dialektikából bontakozott ki. (Dialektikán értsük ezúttal a platóni „dialektiké techné"-t, a vitatkozás művészetét.) A párbeszéd, a dialógus két résztvevőjének, *A*-nak és *B*-nek a szerepe beszélgetés közben a következőképpen oszlik meg. *A*-nak valamely állítását *B* nem fogadja el. *A* pedig be akarván bizonyítani ezt az állítást, olyan praemissákat keres, amelyeket *B* is helyesnek tart és elfogad. Utána *A* megmutatja, hogy állítása, amelyet *B* kezdetben nem tartott helyesnek, logikus szükségszerűséggel következik azokból a praemissákból, amelyeket *B* is elismert.

Kétségtelen, hogy ez a schéma csakugyan alkalmazható az euklidési matematikára. EUKLIDÉS bármelyik „bonyolult" tételéről megállapíthatjuk, hogy a bizonyítás ezt a tételt „egyszerűbb" tételekre, az egyszerűbb tételeket pedig általánosan elfogadott praemissákra, definíciókra, posztulátumokra vagy axiómákra vezeti viszsza.[28] Hiszen a matematika éppen ezért *deduktív* tudomány, mert minden állítását (tételét) *levezeti* ilyen praemissákból, illetőleg az állítást *visszavezeti* az elfogadott praemissákra.

Tanulságos a definíciós-axiomatikus megalapozás létrejöttének ez az összehasonlítása az aristotelési logika kibontakozásával azért is, mert felhívja a figyelmet egy nagyon lényeges körülményre. A vita folyamán az, aki be akar valamit bizonyítani, magából a bebizonyítandó állításból indul ki és csak *utólag* keresi ehhez az állításhoz azokat a praemissákat, amelyeket ellenfele is elfogad; de egyáltalán nem bizonyos az, hogy a bebizonyítandó tétel ismeretéhez csakugyan a bizonyításnál felhasznált praemissák ismerete alapján jutottak el. Éppen ellenkezőleg: nagyon könnyen elképzelhető, hogy valamely igaznak tapasztalt vagy plauzibilis állítás logikus praemissáit csak utólag, akkor tudatosították magukban a vitatkozó partnerek, amikor egyikük megkísérelte állítását a másikkal is elfogadtatni, bebizonyítani. Egészen bizonyos, hogy így volt ez az euklidési matematikai tételek nagy részével is. Ezeknek a tételeknek nagy részét is régesrégen ismerték már a gyakorlatból az ókori keleti népek, amikor később a görögök keresni kezdték azokat az „egyszerűbb" tételeket, amelyekből levezethetők a „bonyolultabbak". Hiszen a matematika, mint kész rendszer, szisztematikus deduktív tudomány ugyan, de keletkezése során még csak gyakorlatból származó induktív tudás.[29]

Minthogy K. v. FRITZ magyarázata szerint a görögök a matematika definíciós-axiomatikus megalapozása során csak *utólag* keresték a tételeik bizonyításához szükséges praemissákat, érthető az is, hogy a görög matematikusoknak aligha sikerült mindjárt kezdetben tisztázniok azt a kérdést: melyek a „legegyszerűbb" matematikai jellegű állítások, a legáltalánosabb praemissák, mit tekintsenek be-nem-bizonyítható axiómának, posztulátumnak vagy definíciónak? — Valószínű, hogy mindaz, amit EUKLIDÉS ezeken a címeken összefoglal, csak hosszabb fejlődés eredményeként kristályosodhatott ki. Hiszen az előbbi schéma értelmében kezdetben

[28] Jellemző a görögök naiv empirizmusára, hogy csakugyan megkülönböztettek „egyszerűbb" és bonyolultabb tételeket. Arra, hogy az „egyszerűbb" és „bonyolultabb" mennyire szubjektív kategória, úgy látszik, nem jöttek rá. Aristotelés mindenesetre hosszasan fejtegeti, milyeneknek kell lenniök azoknak a praemissáknak, amelyekre a bizonyító tudomány fölépülhet; ezért írhatja K. v. FRITZ (i. m. 23. lap) Aristotelés nyomán: „Das als Prinzip angenommene muß in sich *einsichtiger* (?), *einfacher* (?) und abstrakter sein als das, was daraus abgeleitet wird".

[29] Vö. G. PÓLYA, Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme, Bern, 1949. 9. lap: „Nach Euklid dargestellt erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft, aber die Mathematik im Entstehen erscheint als eine experimentelle induktive Wissenschaft".

csak arra törekedhettek a matematikusok, hogy a „bonyolultabb“ állításokat „egyszerűbb“ praemissákra, az ellenfél által is elfogadott tételekre vezessék vissza. Ha pedig valóban így ment végbe a fejlődés, akkor aligha képzelhető, hogy már a legelső kísérletek során megtalálták volna a „legegyszerűbb“ praemissákat, az axiómákat, posztulátumokat és definíciókat. Hogy milyen hosszú időn át folytak ilyen természetű kísérletek, arra jellemző lehet PROKLOS állítása,[30] aki elmondja, hogy a pergéi APOLLÓNIOS még az EUKLIDÉS utáni korban is megkísérelte pl. bebizonyítani azt az axiómát, amely szerint: ha két mennyiség külön külön egyenlő valamely harmadikkal, akkor a két mennyiség egymással is egyenlő.[31] APOLLÓNIOSnak ez a kísérlete PROKLOS szerint azért nem sikerülhetett, mert „kevésbé evidens“ praemissákkal akarta megokolni azt, ami „evidensebb“ a praemissáinál.[32]

Jóllehet K. v. FRITZ magyarázata — tehát a görök matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának összehasonlítása az aristotelési logika kibontakozásával — olyan elgondolás, amely részben *helyesen* világítja meg a görög tudomány keletkezésének a körülményeit, mégis a szerző nem veti fel elég élesen azt a kérdést: *mikor*, *hogyan* és *miért* következett be a görög matematika története során az a fordulat, amely a deduktív tudomány megszületésére vezetett? — K. v. FRITZ dolgozata erre a kérdésre csak a következő három — tartalmában ugyan helyes, de kissé elmosódó körvonalú — állítással felel:

1) Megállapítja a dolgozat, hogy a definíciós-axiomatikus megalapozás első lépéseinek már Aristotelés előtt meg kellett történniök, mert különben ARISTOTELÉS nem hivatkozhatott volna éppen a matematikára azokban a fejtegetésekben, amelyekben az apodeiktikus (bizonyító) tudományokról beszél.[33]

30 PROCLUS, ed Friedlein p. 183.

31 Eucl. I. koinai ennoiai 1. (Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα Καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.) O. BECKER (Grundlagen der Mathematik 90. lap) fordítása szerint: „Was demselben gleich ist, ist untereinander gleich.“ Euklidés szövege nem használja a „mennyiség“ fogalmát.

32 Apollónios kísérletével kapcsolatban érdemes megemlíteni: a mai tudásunk szerint *nem* lenne valószínű az a feltevés, hogy Apollónios „tudatosan axiomatizált volna“ — ti. a szónak abban az értelmében, hogy fölismerte volna: valamely nem-euklidési axióma-rendszerben csakugyan fölbukkanhatnak Euklidés axiómái mint levezetett tételek.

33 Vö. K. v. FRITZ i. m. 43. lap: „Es ist deutlich zu sehen, daß Aristoteles nicht in der Weise hätte mit konkreten Beispielen aus der Mathematik operieren können, wenn Ansätze zu einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik . . . nicht schon vor ihm vorhanden gewesen wären“.

2) Utal arra, hogy — úgy látszik — a régebbi görög matematika (különösen THALÉS) még empirikusabb jellegű lehetett és a szemléletesség evidenciájára törekedett; később — EUKLIDÉS korában — az empiria és a szemléletességre törekvés már háttérbe szorult; a matematika ebben a későbbi korban már sokkal inkább absztrakt jellegűvé lett.[34]

3) Egy alkalommal megállapítja K. v. FRITZ azt is, hogy az a matematika, amely az i. e. 5. század pythagoreusaival kezdődött, már más jellegű volt, mint a 6. századi THALÉSnek a szemléletesség evidenciájára törekvő geometriája.[35]

További hiányossága ennek az elgondolásnak az, hogy szinte teljesen nyitva hagyja a következő kérdéseket: Vajon a deduktív matematika megszületése összefüggött-e és milyen mértékben a logika elméletének a kibontakozásával? Csak párhuzamosan, egymást helyenként befolyásolva ment-e végbe a két jelenség — a logika és a deduktív matematika kibontakozása —, vagy pedig feltétlenül megelőzte-é közülök az egyik a másikat?

Lássuk ezekután a következő pontban azt az elgondolást, amely már nemcsak párhuzamba állítja a deduktív matematika keletkezését a logika kibontakozásával, hanem amely megkísérli a választ arra a kérdésre is: hogyan és miért ment végbe ez a folyamat?

2. pont. A deduktív matematika keletkezését ALEXITS GY. és FENYŐ I. a következő elgondolással magyarázza:

„A szigorú bizonyítás szükségességének felfedezése jelenti tulajdonképpen a tudományos matematika kezdetét (Pythagoras). De a bizonyítás szükségességének felfedezése is a társadalmi viszonyokban leli a magyarázatát. Magja közvetlenül a korabeli filozófiában keresendő; nevezetesen a szofistáknak minden ellentmondást felszínre hozó vitatkozásmódja ráterelte a hellén kutatók figyelmét a logikai bizonyítás szükségességére. Ha tovább megyünk, úgy azt kell konstatálni, hogy a filozófiának ez a nagyfokú fejlettsége és főleg elterjedtsége a politikai, tehát *társadalmi* vitákból fejlődött ki és ezek hatása a matematikában is — éspedig korszak-

[34] K. v. FRITZnek azokra a fejtegetéseire, amelyek Thalés geometriájára vonatkoznak, visszatérünk még e dolgozat III. fejezetében.

[35] Az a gondolat, hogy az i. e. 5. század pythagoreusaival tulajdonképpen új korszak kezdődik a görög matematika történetében, igazában nagyon régi. De ennek a gondolatnak a jelentőségét csak legutóbb kezdte hangsúlyozni K. REIDEMEISTER; lásd erre vonatkozóan e dolgozat III. és IV. fejezetét.

alkotó módon — a szigorú bizonyítások felfedezésében nyilvánult meg. A többi ókori birodalom matematikai ismereteiből éppen ez a döntően fontos elem hiányzott, ezért nem lehetett azokat az athéni, alexandriai stb. matematikusok tudományával összehasonlítani".[36]

Mielőtt részleteiben vizsgálnánk ALEXITSnek és FENYŐnek ebben az idézetben összefoglalt gondolatmenetét, fel kell hívnunk a figyelmet egy olyan gondolatra, amely a szerzők véleményének a kialakításában nagy szerepet játszott. A szerzők ugyanis igyekeztek az ókori görögség esetére is alkalmazni azt a tételt, hogy a matematika fejlődése *általában* párhuzamos a termelés fejlődésével, és hogy a matematika problémái a történelem folyamán *sokszor* a termelés szükségleteiből fakadtak.[37] Ez a nagy egészében helyes gondolat azonban könnyen félrevezethet, ha elsietetten általánosítjuk. A görög matematika esetében pl. a PYTHAGORAStól EUKLIDÉSig terjedő időszakaszra vonatkozóan egyáltalán nem tudunk kimutatni konkrét kapcsolatot egyfelől a deduktív matematika problémái, másfelől pedig az egykorú termelés problémái között.[38] Az is hiba lenne, ha megfeledkeznénk arról, hogy a görög matematikusok tudományukat általában nem a termelés, a gyakorlat eszközének vagy eredményének tartották; éppen ellenkezőleg: ők a matematikában a gyakorlattól való *elfordulást*, a tiszta *szemlélődést*, a spekulációt látták.[39] Tekintet nélkül arra, hogy helyes-e ez az ókori felfogás, nem szabad figyelmen kívül hagynunk az antik matematikusoknak ezt a véleményét, mert különben lehetetlenné tesszük, azt, hogy megértsük a deduktív tudomány létrejöttének a körülményeit.

[36] ALEXITS GY. és FENYŐ I., Matematika és dialektikus materializmus, Budapest 1948. 39. lap.

[37] I. m. 36—37.

[38] Tévedés lenne ezt a megállapítást azzal cáfolni, amit ALEXITS—FENYŐ könyve a 37. lapon ír. Az említett helyen ti. ezt olvassuk: „A Kr. e. V. és IV. századbeli görög geometriai problémák nagyrésze az arányosságokkal foglalkozik (Eudoxos), vagy azokból indul ki. *Ezek elé a problémák elé az emberi test ábrázolása (vázákon) és építészeti feladatok állították a kor gondolkodóit.*" Ez az utóbbi, általunk kiemelt állítás csak önkényes hipotézis. Mert igaz ugyan, hogy az arányosság problémái először a mindennapi gyakorlatban merültek fel, de a görög deduktív matematika képviselői az i. e. 5. és 4. században arány-elméleteikkel *nem* gyakorlati jellegű feladatok megoldására törekedtek. Éppen ellenkezőleg, tisztára elméleti meggondolásból kiindulva a *tört* fogalmát akarták megkerülni.

[39] Jellemző pl., hogy Platón Állam c. dialógusában Sokratés nagyon határozottan megállapítja: a geometriának és általában a matematikának csak *igen kis része az,* ami tökéletesen elegendő a gyakorlati szükségletek kielégítésére; ezeknek a tudományoknak nagyobb és jelentősebb része *nem* gyakorlati, hanem egyéb szükségleteket elégít ki (VII, 526 D).

Az az elgondolás tehát, hogy a görög matematika fejlődése párhuzamos a termelés fejlődésével, a PYTHAGORAStól EUKLIDÉSig terjedő szakaszra *nem igazolható.* Még kevésbé igazolható az előbbi idézet gondolatmenete, ti. a szerzőknek arra a kérdésre adott válasza: hogyan lett a matematika a görögöknél deduktív tudománnyá? — Ők ugyanis ebben a nagyjelentőségű lépésben a termelés fejlődésének *közvetett hatását* szeretnék kimutatni. Elgondolásuk a következő.

A termelési mód fejlődése egy adott pillanatban lehetővé teszi a rabszolgatartó görög demokrácia kibontakozását. A demokrácia együtt jár a szólásszabadsággal, a vélemények nyílt harcával, a vitákkal. A viták során az ügyes vitatkozók, a szofisták reáirányítják a figyelmet a véleményekben rejlő ellentmondásokra. Így merül fel egy idő múlva a *logikai bizonyítás* igénye, és végül: éppen ennek az igénynek a kielégítésére törekszik a görög matematikus — már PYTHAGORAS is! — akkor, amikor bebizonyítja állításait, tételeit.

Elég ennek a gondolatmenetnek egymásba kapcsolódó láncszemeit közelebbről megvizsgálnunk ahhoz, hogy azonnal észrevegyünk egy chronológiai tévedést. Mert jóllehet mi is helyeseljük ugyan a szerzőknek azt az elgondolását, hogy a tudományos matematika kezdetei az egykorú filozófiában keresendők, mégis a szerzők elképzelése szerint a demokrácia-adta szólásszabadságban az ügyesen vitatkozó *szofisták* azok, akik reáirányítják a figyelmet az ellentmondásokra, és az ő működésük nyomán merül fel a logikai bizonyítás igénye; a matematikus pedig éppen ennek a logikai igénynek tesz eleget mintaszerű formában akkor, amikor megteremti a deduktív tudományt. — A baj csak az, hogy a deduktív matematika — a szerzők szerint is — az *i. e. 6. századi* PYTHAGORASszal (vagy tanítványaival) kezdődik, ügyesen vitatkozó szofisták pedig az i. e. *5. század közepe előtt* semmi esetre sem voltak. — A konstrukció tehát csak abban az esetben állhatná meg a helyét, ha egyrészt be tudnánk bizonyítani, hogy a logika mint tudomány csakugyan a mindennapi élet vitáiból született meg,[40] másrészt

[40] Az a gondolat, hogy a logika mint tudomány a mindennapi élet vitáiból született meg, felmerül — feltevés formájában — O. GIGONnál is (Der Ursprung der griechischen Philosophie, Basel 1945, 251. lap): „Das Verfahren des Parmenides, durch Elimination der Möglichkeiten zum Wahren zu gelangen, setzt voraus, daß Parmenides eine bestimmte formale Methode des Beweisens schon kennt, ehe er sich daran macht, nun das Sein zu beweisen. Die Frage stellt sich dann nach dem Ursprung dieser Methode. Er wird schwerlich in der ionischen Kosmologie oder in der pythagoreischen Verkündigung zu suchen sein. Mit allen Vorbehalten sei bemerkt, daß *eine solche*

pedig, ha már bizonyosak lehetnénk afelöl, hogy logika valóban volt már abban az időben, amikor a deduktív tudomány kezdetei jelentkeznek.

De még ha korrigálhatnánk is az előbbi konstrukció chronológiai tévedését, van ennek az elgondolásnak egyéb gyengéje is. Hiszen az előbbi idézet szerzői a szigorú matematikai bizonyítás *szükségességéről* beszélnek, de nem teszik fel azt a történeti kérdést: vajon mit jelenthetett a szigorú matematikai bizonyítás „szükségessége" az ókorban? — Ahelyett, hogy ezt a kérdést feltennék, saját *modern* elgondolásukat a matematikai bizonyítás „szükségességéről" úgy tüntetik föl, mintha ez csakugyan az ókori görög matematikusok „felismerése" lett volna. Mert nézzük csak meg közelebbről, mit mond ALEXITS és FENYŐ a matematikai bizonyítás szükségességének a felfedezéséről? — Miután megemlítették azt a régi, csak approximatív értékű egyiptomi geometriai szabályt, hogy az egyenlőszárú háromszög területe egyenlő az alap és az *oldal* félszorzatával,[41] így folytatják:

„Ez elegendő pontosságú volt az egyiptomiaknak, mert a Nilus áradásai többnyire olyan hosszú egyenlőszárú háromszög alakú területeket öntöttek el, hogy ezek felmérésére ez a területképlet az akkori mérések pontossága mellett a tapasztalattal megegyező eredményre vezetett. *De a görögök ugyanezt a képletet építészeti feladatok megoldására akarták felhasználni, ahol már nem vált be*".[42]

Technik des Beweisens am leichtesten in der Welt der politischen und juristischen Argumentation, in der sogenannten Gerichtsrhetorik sich bilden konnte. Die konkrete Frage des Advokaten nach einem ungeklärten Tatbestand oder einer ungewissen Täterschaft konnte ohne Zweifel am ehesten zu solchen Beweismethoden führen, wie sie hier Parmenides an einem ganz anderen Objekt übt. Was wir wissen, ist daß Sizilien zur Zeit des Parmenides die Gerichtsrhetorik geschaffen haben soll. Was uns fehlt, sind die äußeren Beweisstücke, die von der sizilischen Rhetorik zum 'Wege der Forschung' des Parmenides hinüberführen. So muß dies lediglich eine nur zögernd angedeutete Hypothese bleiben."

41 Ehhez az approximatios formulához lásd O. NEUGEBAUER, Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften Bd. 1. Berlin 1934, 123. lap: „Eine Anzahl von Feldern (scil.: in Aegypten) sind dreieckig. Die Angabe der Größe erfolgt dann etwa nach dem folgenden Schema: Die westliche Seite ist *a*, die östliche *b*, die südliche *c*, die nördliche *nichts*. Die Fläche ist dann wieder aus $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c}{2}$ zu erhalten. Hier hat man es also immer mit Näherungsrechnungen zu tun, die sich auf ganz bestimmte Felder beziehen und mit einer für praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit die Flächen angeben."

42 ALEXITS GY. és FENYŐ I. i. m. 37—38 lap.

Az utolsó, általunk kiemelt mondat alapján könnyen az lehet az olvasó benyomása, mintha csakugyan bármilyen forrásból tudomásunk lenne arról, hogy a görögök valaha is megpróbálták volna felhasználni a megközelítő pontosságú egyiptomi *képletet* építészeti problémák megoldására. A valóság ti. ezzel szemben az, hogy az idézett állítás csak szellemes, de ellenőrizhetetlen kombináció. Ugyanilyen joggal akár azt is kérdezhetnénk: hát az egyiptomiaknak vajon miért nem jutott eszükbe, hogy felhasználják empirikus eredetű „képletüket" saját építészeti problémáik megoldására? Vagy talán nekik egyáltalán nem lettek volna építészeti problémáik? Ők talán a geometriát *csak* földmérésre használták volna? — De mindez még megbocsátható volna, ha a szerzők nem fűznék tovább merész kombinációikat. A következő lapon ti. már így folytatják:

„Az előbb említett és még sok más empirikus úton felállított tétel alapján az athéni matematikusok arra a megállapításra jutottak, hogy a puszta tapasztalat elvont általánosítása még nem nyújt kellő biztonságot; ennek következtében az athéniek rájöttek a matematikai *bizonyítás* szükségességére és ezzel lerakták a mai értelemben vett matematikai tudomány alapjait."[43]

Nem kétséges, hogy ez a gondolatmenet a matematikai bizonyítás szükségességéről vallott *modern* felfogást vetíti vissza az ókorba. Mert a valóságban egyáltalán nincs bizonyítékunk arra, hogy a görögök a deduktív tudomány megteremtésével csakugyan a mindennapi gyakorlat érdekében törekedtek volna nagyobb pontosságra, bizonyosságra. Minden jel arra mutat, hogy a gyakorlatban ők is megelégedtek a pontosságnak azzal a fokával, amely empirikusan is elérhető. Inkább az lehet a benyomásunk, hogy a görögök *elfordultak* a gyakorlattól, sőt részben még a tapasztalattól is akkor, amikor megteremtették a deduktív, theoretikus tudományt. Egyelőre elégedjünk meg azzal a megállapítással, hogy a görög matematikusok — különösen a deduktív tudomány történetének legrégibb szakaszán — *szinte csupa olyan tételt bizonyítottak be, amelyet a gyakorlatból már úgyis réges-régen jól ismertek.* A gyakorlat szempontjából pedig az ily módon deduktív úton bebizonyított matematikai tétel egyáltalában nem lett értékesebb, mint amilyen a bizonyítás előtti empirikus ismeret volt. Az ókorban a deduktív bizonyításnak *nem volt* közvetlen gyakorlati haszna. Sőt, a jelek arra mutatnak, hogy az ókori matematikusok igazában nem is sejtették a deduktív bizonyítás gyakorlati felhasználhatóságát. Egy elterjedt anekdota szerint pl., amikor EUKLIDÉSTŐL

[43] Uo. 39. lap.

megkérdezte egyik tanítványa, hogy vajon mit nyer azzal, ha megtanulja a matematikai levezetéseket, EUKLIDÉS odaszólt a rabszolgájának: adjon egy obolost a kérdezőnek, mert az illetőnek — úgy látszik — feltétlenül nyernie kell valamit abból, amit tanul.[44] — Aligha születhetett volna meg ez az ókori anekdota, ha a görög matematikusok egyáltalán sejtették volna az egzakt matematikai bizonyítás közvetlen gyakorlati felhasználhatóságát. — Félrevezető tehát arról beszélni, hogy a görögök „felfedezték a szigorú matematikai bizonyítás szükségességét". Mert igaz ugyan, hogy ezek az ókori görög matematikusok rendkívül szigorú bizonyításokra törekedtek, de arra a kérdésre, hogy mi szükség van ezekre a bizonyításokra, ők maguk egyáltalán nem tudtak volna választ adni.

Egy másik gyöngéje ALEXITS és FENYŐ föntebb idézett magyarázatának abban áll, hogy a szerzők a deduktív matematikai bizonyítást a mindennapi bizonyításformákból akarják levezetni. Elgondolásuk szerint a régi görögök először a mindennapi élet vitái során lettek volna figyelmesek az érvelésben felbukkanó ellentmondásokra; így merült volna fel a logikai bizonyítás igénye, s aztán később ennek az igénynek a kielégítésére kezdtek törekedni a matematikusok is. A matematikai bizonyítás tehát eszerint a mindennapi bizonyításformák egyik továbbfejlődött változata lehetne. — De visszavezethető-e az egzakt matematikai bizonyítás eredete olyan bizonyításformákra, amelyek *minőségükben* különböznek a matematikai bizonyítástól? Mert a mindennapi élet bizonyításformái csak nagyon *távolról* emlékeztetnek a matematikai bizonyításra. A nem-matematikai bizonyítás legtöbbször csak arra törekedhetik, hogy feltárja valamely állítás *valószínűségét*; az igazság kritériuma azonban ezekben az esetekben mindig a *gyakorlat*, a *tapasztalat*, illetőleg *maguk a tények*. Az ókori matematikusnak viszont nagyon sokszor éppen az évszázadok óta jól ismert és empirikusan lépten-nyomon tapasztalt tényeket kellett általános érvénnyel bebizonyítania. Hiszen a matematika éppen ez által lett tudománnyá, hogy — a principiumoktól eltekintve — *nem* elégedett meg az empirikusan tapasztalt tényekkel. — Ha tehát a matematikai bizonyítás eredetét a jóval szerényebb igényű mindennapi bizonyításformákban keressük, akkor éppen azt kellene még megmagyaráznunk: hogyan és miért lett a matematikai bizonyítás a görögöknél olyan rendkívül szigorúvá, feltételezett eredetét meghazudtolva egyedülállóan igényessé? ALEXITS és FENYŐ elgondolása erre a döntően fontos kérdésre egyáltalán nem ad választ.

44 Vö. G. SARTON, Ancient Science and Modern Civilization, London 1954. 20. lap.

3. pont. Az egzakt görög matematika megszületését v. d. Waerden a következő elgondolással magyarázza.[45] A görögök sok empirikusan megismert matematikai tételt készen vettek át Egyiptomból és Babylónból. De a különböző eredetű keleti matematikai receptek nem mindig voltak összhangban egymással. A babylóniak szerint pl. a kör területe $3r^2$, az egyiptomiak szerint viszont $(8/9 \cdot 2r)^2$. A görögöknek már most, amikor megismerték ezeket az egymástól eltérő empirikus eredetű és pusztán gyakorlati célú szabályokat, dönteniök kellett, melyik a helyesebb, hogyan lehetne pontosabban kiszámítani a kör területét. Így jutottak volna el lassanként az egzakt levezetés, a bizonyítás gondolatához.

Ez az elgondolás szerényebb igényű, mint az előbbi kettő. Nem keresi az egzakt matematika eredetét valahol a logika közelében, vagy a logika kibontakozásával párhuzamosan haladó úton; nem is származtatja a matematikai bizonyítást mindennapi, a matematikán kívül eső bizonyításformákból. B. L. v. d. Waerden elgondolása az egzaktságra való törekvést egyszerű matematikai jellegű reflexiókra vezeti vissza. Csakugyan elképzelhető, hogy a matematikai bizonyítás gondolatának a megszületéséhez — különösen kezdetben, Thalés esetében — ilyen természetű reflexiók is hozzájárulhattak. Hiánya azonban ennek a plauzibilis elgondolásnak az, hogy nem veszi figyelembe azt a különös jelenséget, amelyet más összefüggésben maga v. d. Waerden is hangsúlyoz, hogy ti. a görög matematikusok már nagyon korán úgyszólván mindent, a legkézenfekvőbb tényeket is bizonyítani akarták. Ha összeállítjuk a legrégibb ismert görög matematikai bizonyításokat, egyáltalán nem az a benyomásunk, mintha a görök matematikusok azért teremtették volna meg a deduktív tudományt, hogy eldönthessenek olyan régebben „vitás kérdéseket", mint pl. a kör területének a kiszámítása. Éppen ellenkezőleg: a legrégibb matematikai bizonyítások szinte csupa vitathatatlan és közismert empirikus tényt bizonyítanak. Mi lehetett az oka ennek a mindenáron mindent bizonyítani-akarásnak már az i. e. 5. században? — B. L. v. d. Waerden elgondolása erre a kérdésre nem ad választ.

[45] B. L. v. d. Waerden, Science awakening. Groningen 1954. 89. lap; v. ö. O. Becker, Gnomon 23, 1951. 297. kk.: „Interessanter als alle Einzelheiten ist die Gesamtauffassung des Verf. von der frühgriechischen Mathematik. Die entscheidende Wendung sieht er mit Recht in dem Auftreten von Theoremen mit Beweisen. Das Motiv liegt nach ihm in der Übernahme einer nicht immer einheitlichen orientalischen Tradition (wie z. B. die verschiedene Bestimmung des Kreisinhalts durch Aegypter und Babylonier) und der sich daraus ergebenden Notwendigkeit einer kritischen Entscheidung zwischen ihnen."

Az a három különböző elgondolás tehát, amelyet ebben a fejezetben összefoglaltunk, bár használható szempontokat ad a további kutatáshoz, *nem* oldja meg problémánkat: hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?

Minthogy a tudománytörténetnek mindeddig nem sikerült elfogadható magyarázatot adnia az egzakt görög matematika keletkezéséről, a következő fejezetben megkíséreljük összefoglalni azt, amit erről a kérdésről mai tudásunk alapján elmondhatunk. Előbb áttekintjük az antik hagyománynak erre vonatkozó legfontosabb adatait *(A. pont)*, majd kiegészítjük ezt azzal, amit erről a kérdésről a jelenkori tudomány megállapíthat *(B. pont)*.

III.

A) Az antik matematika legrégibb, klasszikussá lett összefoglalása, *Euklidés Elemeinek 13 könyve, i. e. 300 körül* keletkezett. EUKLIDÉS műve — jóllehet a tudomány későbbi fejlődése során többször rámutattak már fogyatékosságaira — a maga nemében mind a mai napig úgyszólván mintaszerű.[46] Megállapíthatjuk pl., hogy a görögök egzakt matematikai bizonyítása EUKLIDÉS korában már elérte legmagasabb fejlettségi fokát. A deduktív tudomány kialakulásának tehát az EUKLIDÉSt *megelőző* korra kell esnie. Mit tud erről az EUKLIDÉS előtti korról a görög hagyomány?

A legrégibb görög matematika-történetet nem sokkal EUKLIDÉS előtt ARISTOTELÉS egyik tanítványa, EUDÉMOS írta az *i. e. 4. században.* Elveszett művének rövid kivonata belekerült az *i. sz. 5. században* élő PROKLOSnak EUKLIDÉS első könyvéhez írott kommentárjába. Ezt nevezik PROKLOS híres „matematikus jegyzékének". A jegyzék bennünket érintő legfontosabb megállapításai a következők.

(1) A görög matematika, illetőleg geometria megteremtője, az *i. e. 6. századi* THALÉS Egyiptomban gyűjtötte tudását és onnan hozta ezt a diszciplinát a görögök közé. A szöveg azt mondja róla, hogy „sok mindent feltalált ő maga, és sok másban megmutatta követőinek a principiumokhoz vezető utat azáltal, hogy egyes kérdéseket általánosabb, másokat viszont kézzelfoghatóbb (= érzékelhetőbb) formában vetett fel".[47]

[46] Lásd erre vonatkozóan G. PÓLYA idézett művének fejezeteit a 96. kk. és 225. kk. lapokon: „Durchführen eines Planes" és „Warum Beweise?"

[47] PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 65. — A matematikus-jegyzék egész szövegét lefordítja és részben kommentálja B. L. v. d. WAERDEN, Science awakening, 90. kk.

(2) A jegyzék következő, számunkra fontos megállapítását az ugyancsak *6. századi* PYTHAGORASszal kapcsolatban teszi. Azt állítja róla, hogy ő, PYTHAGORAS a geometriával való foglalkozást (= filozófiát) megváltoztatta, olyan formát adott neki, hogy ez a szabadember nevelésének része legyen. — Ezekkel a szavakkal írja körül forrásunk azt az állítását, hogy a geometria, illetőleg matematika PYTHAGORAS kezében többé már nem gyakorlati, hanem elméleti jellegű tudománnyá lett. Antik felfogás szerint ugyanis a gyakorlat, *praxis*, nem méltó a szabad emberhez; a szabad ember csak szemlélődéssel, *theóriával* foglalkozhatik. Rendkívül fontos lehet számunkra a matematikus-jegyzéknek ez a PYTHAGORASszal kapcsolatos megállapítása, ha meggondoljuk, hogy a matematikai „tételt" görögül *theórémának* hívják. A *theóréma* elnevezés maga is arra mutat, hogy itt már nem gyakorlatról, hanem öncélú szemlélődésről, *theóriáról* van szó. — PYTHAGORAS a jegyzék szavai szerint döntő változást hozott a matematikába azáltal, hogy a geometria alapjait, principiumait kutatta és tételeit a konkrét anyagtól függetlenül *(ἀΰλως)* tisztán intellektuális úton *(νοερῶς)* vizsgálta. Ő, PYTHAGORAS volt az — mondja még szövegünk —, aki felfedezte az irracionálisok (vagy inkább: arányok?) elméletét[48] és megszerkesztette a kozmikus (= szabályos) testeket.

(3) Elmondja még ezenkívül PROKLOS jegyzéke többek között azt is, hogy már jóval EUKLIDÉS előtt mások is írtak olyan rendszeres matematikai műveket, „Elemeket", mint amilyen később EUKLIDÉSÉ lett. Az első ilyen rendszerező matematikus a chiosi HIPPOKRATÉS volt az *i. e. 5. században*, majd a *4. század első felében* LEÓN, a *4. század második felében* pedig a magnésiai THEUDIOS.

Lássuk mármost, mennyiben egészíti ki vagy módosítja az ókori hagyományt a mai matematika-történet.

B) Vegyük előbb sorra a PROKLOS jegyzékéből kiemelt három pontot.

ad 1. THALÉST illetően a modern történeti kutatás megerősíteni látszik az ókori jegyzék állításait. Talán szabad kiolvasnunk a THALÉSről szóló adatokból annyit, hogy a görög hagyomány is számontartotta az empirikus matematikai tudásanyag keleti eredetét; ezért emlegethetik THALÉS egyiptomi utazásait.[49] A szövegből nem derül

[48] G. FRIEDLEIN olvasása szerint a szöveg az *irracionálisok* elméletéről szól; más olvasás szerint csak az *arányok* elméletéről lenne szó.

[49] Érdekes, hogy az antik hagyomány az empirikus, gyakorlati matematikai ismeretek keleti eredetéről szólva mindig csak Egyiptomot emlegeti és sohasem Babylont. Vö. O. BECKER (Grundlagen der Math. 22. lap): „Die Griechen übernahmen weithin altorientalisches, besonders wohl *babylonisches* Material, obwohl die griechische Tradition immer nur von *Aegypten* als dem

ugyan ki minden kétséget kizáróan, vajon egzakt tudomány volt-e már THALÉS geometriája, de talán még ebben a kérdésben is utbaigazíthat bennünket az imént összefoglalt rövid híradás. A szöveg ugyanis azt mondja, hogy THALÉS „megmutatta követőinek a principiumokhoz vezető utat"; mintha ezekkel a szavakkal éppen azt akarná kifejezésre juttatni az antik szerző, hogy THALÉS maga nem jutott ugyan el a principiumokhoz, a matematika igazi alapjaihoz, inkább csak egyengette feléjük az utat. Tette pedig ezt azáltal, hogy „egyes kérdéseket *általánosabb*, másokat viszont kézzelfoghatóbb (= érzékelhetőbb) formában vetett fel". Mintha még ez a mondat is igazolható lenne. A geometriai „szög" fogalmát pl. csakugyan THALÉS vagy legalábbbis THALÉS kora vezette be;[50] márpedig ez nagyfokú *általánosítás* volt. Az általánosításra törekvésnek tehát valóban érvényesülnie kellett már THALÉS tudományában. A szöveg azonban ugyanakkor azt is mondja, hogy THALÉS egyes kérdéseket „*érzékelhetőbb* formában vetett fel". Az érzékelhetőségnek ez a hangsúlyozása THALÉSszel kapcsolatban nem véletlen. Hiszen alig pár sorral alább PYTHAGORASról már éppen az ellenkezőjét halljuk. PROKLOS jegyzéke szerint PYTHAGORAS a matematika tételeit „a konkrét anyagtól függetlenül, tisztán intellektuális úton vizsgálta". THALÉSszel kapcsolatban tehát „érzékelhetőbb formáról", PYTHAGORASszal kapcsolatban pedig „tisztán intellektuális vizsgálódásról" hallunk. Ez a két megállapítás — úgy látszik — tudatosan utal egymásra.

Ursprungslande der Geometrie spricht." — Vajon mi lehet az oka annak, hogy a hagyomány ilyen egyoldalúvá torzult? Azt hisszük erre a kérdésre eléggé valószínű magyarázatot adhatunk akkor, ha figyelembe vesszük a következőket. Úgy látszik, a görög hagyomány is tudott arról, hogy a babylóni kultúra kisugárzási területén a számokkal való foglalkozás (az arithmetika) fejlett volt. Proklos pl. a görög tudomány eredetéről szólva megemlíti, hogy a phoinikoknál milyen magas színvonalú volt a számok ismerete éppen a kereskedelem és a számolással való gyakorlati foglalkozás következtében (Friedlein p. 65). — Abban az időben viszont, amikor Eudemos a 4. században megírta az első görög matematikatörténetet, a görög matematika már teljes egészében *geometrizálódott*. Amikor pedig a görögök a geometria eredetét kutatták, helyenként csakugyan magukhoz közelebb állónak érezhették az egyiptomi tudományt mintsem a babylónit. Hiszen láttuk már, hogy az egyiptomiak pl. a kör területét csakugyan „pontosabban" ki tudták számítani, mint a babylóniak. A görög hagyomány eltorzulásának tehát legalább részben oka lehet az is, hogy a görögök az egyiptomi geometriát közelebb érezték saját geometrizált tudományukhoz, mint a babylónit.

[50] Vö. O. BECKER, Gnomon 1951. 298. lap): „Im übrigen ist gerade die Einführung des Winkelbegriffs (statt des śqt) eine wesentliche neue Errungenschaft der frühgriechischen Geometer (Scheitelwinkel, Basiswinkel, Winkel im Halbkreis), die von weittragenden Folgen war (Winkelsumme im Dreieck, woraus vielerlei abgeleitet werden konnte).

De vajon miben állhatott a thalési geometria „érzékelhetősége"? — Erre a kérdésre is felelhetünk, ha azt vizsgáljuk előbb: vajon be tudta-e bizonyítani THALÉS a tételeit, és hogyan? — Az antik hagyomány csakugyan beszél THALÉS „bizonyításairól",[51] de nem mondja meg világosan, miből állott a bizonyítás. A modern interpretáció ezzel kapcsolatban két körülményre hívja fel a figyelmet; egyrészt utal arra, hogy a „bizonyítást" jelölő görög szó jelent egyszerű *megmutatást* is; másrészt pedig emlékeztet a modern tudománytörténet egy olyan megfigyelésre, amelynek alapján nagy valószínűséggel rekonstruálhatjuk THALÉS bizonyítási eljárásait.[52] EUKLIDÉS ugyanis az I. könyv elején megfogalmazza az ún. kongruencia-axiómát: „azok (a dolgok = síkidomok), amelyek *egymásra illeszthetőek*, egyenlők egymással".[53] Az „egymásra illesztés" *(ἐφαρμόζειν)* kifejezést azonban EUKLIDÉS soha egyetlen egy tételében sem használja, csak ebben az axiómában és csak nagyon ritkán (összesen kétszer!) egy-egy tétel bizonyításában, jóllehet az említett axióma használata sokszor megkönnyíthette volna munkáját.[54] Nyilvánvaló tehát, hogy EUKLIDÉS kerülni igyekszik a kongruencia-axióma használatát. Ugyanakkor azonban tudjuk PROKLOS szövegéből, hogy régebben olyan geometriai bizonyításokban is használták az „egymásra illesztés" empirikus módszerét, amelyeket EUKLIDÉS már egyáltalán nem említ. „Ezt a módszert tehát egykor sokkal gyakrabban használták, mint amennyire ez EUKLIDÉS szövege alapján elképzelhető volna. Úgy látszik, ez a módszer még a görög matematika történetének korai szakaszából származik. Nem lehet véletlen az sem, hogy a hagyomány által THALÉSnek tulajdonított öt tétel közül négy közvetlenül, az ötödik pedig közvetve csakugyan bebizonyítható az egymásra-illesztés módszerével".[55] Továbbá megtaláljuk PROKLOSnál egy olyan tételnek az

[51] Lásd PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 157.

[52] A következőkben K. v. FRITZ (lásd föntebb a 21. jegyzetet) megfigyeléseit foglalom össze; megállapításait részben kiegészítem.

[53] A kérdéses axióma I. L. HEIBERG szövegkiadásának latin fordításában: „quae inter se congruunt, aequalia sunt". „Was sich deckt, ist gleich" (O. Becker).

[54] K. v. FRITZ i. m. 77. lap: „Manche Unstimmigkeiten in den Gleichheitsdefinitionen hätten sich bei Euklid leicht vermeiden lassen, wenn von der Deckungsmethode ein etwas reichlicher Gebrauch gemacht worden wäre."

[55] K. v. FRITZ uo.: „Diese Methode muß also einmal in viel weiterem Umfang angewendet worden sein, als dies bei Euklid der Fall ist. Sie scheint auf den ersten Anfang der griechischen Mathematik zurückzugehen, und es ist dann nicht leicht, es als einen reinen Zufall zu betrachten, daß von den fünf Sätzen, die dem Thales in der antiken Überlieferung zugeschrieben werden, vier sich direkt und der fünfte indirekt mit der Deckungsmethode beweisen lassen."

empirikus bizonyítását is éppen az egymásra-illesztés módszerével, amely tételről egy másik alkalommal PROKLOS azt állította, hogy ezt már THALÉS is bebizonyította.[56] Föltehető tehát, hogy THALÉS bizonyítási eljárása éppen abból állott: alkalmazta az empirikus egymásra-illesztés módszerét, azt a módszert, amelyet régebben olyan gyakran használtak és csak később igyekeztek kerülni.[57] THALÉS valószínűleg úgy bizonyította be a tételeit, hogy a tárgyalt geometriai alakzatokat egymásra illesztette, és állításainak igazságát ily módon szemléltette, „megmutatta". A matematikai bizonyítás jelölésére használt görög szó, *ἀποδεικνύναι* eredetileg csakugyan „megmutatást" jelent. PROKLOSnak azt az állítását tehát, hogy THALÉS egyes geometriai kérdéseket még „érzékelhetőbb formában" tárgyalt, a következőképpen magyarázhatjuk: THALÉS számára az evidencia még egyszerűen csak a szemléletesség evidenciája volt. Az a fordulat a tudomány történetében, amelyet a matematikus-jegyzék PYTHAGORAS működésének tulajdonít, THALÉS korában még nem következett be.

ad 1. PYTHAGORASt illetően a tudomány rendkívül szkeptikus a matematikus-jegyzék állításaival szemben.[58] Legrégibb forrásaink ugyanis PYTHAGORASt egyáltalán nem tartják filozófusnak vagy matematikusnak. Úgy látszik, hogy az ő nevéhez fűződő antik legenda tulajdonképpen csak az i. e. 4. század *után* kezdett kialakulni.[59] PLATÓN és ARISTOTELÉS pl. még csak pythagoreusokról és nem magáról PYTHAGORASról beszél. A PYTHAGORASnak tulajdonított matematikai felfedezésekről is kiderült, hogy részint jóval régebbiek, részint pedig későbbiek, mint a 6. század.[60] Érthető, ha

[56] PROCLUS (ed. G. Friedlein) p. 157. — A kérdéses tétel kimondja, hogy „az átmérő felezi a kört". Euklidés ezt a megállapítást nem mint tételt tárgyalja, hanem beleépíti az I. könyv 17. definíciójába: ezáltal viszont túlterheli a definíciót.

[57] K. v. FRITZ i. m. 94. lap: „Daß im Anfang die *anschauliche* Evidenz eine nicht unbeträchtliche Rolle gespielt hat, zeigt die in einem frühen Stadium reichliche Verwendung der Deckungsmethode, während umgekehrt die fortschreitende, wenn auch bis auf Euklid nicht vollständige Ausschaltung dieser Methode und das sichtliche Bestreben Euklids, den letzten Überbleibseln der Methode, die er nicht vermeiden kann, ein axiomatisches Fundament zu geben und sie auch sonst ihres empirischen Charakters so sehr als möglich zu entkleiden, REIDEMEISTER Recht geben: das Charakteristische der griechischen Mathematik ist, daß sich in ihr die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht."

[58] Vö. E. FRANK, Plato und die sog. Phythagoreer, Halle (Saale) 1923. 67. lap és 166. jegyzet a 356. lapon.

[59] K. REINHARDT, Parmenides und die Gesch. der griech. Philosophie, Bonn 1916. 232. kk.

[60] Vö. K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949. 20. és 51—52. lapok; E. SACHS, Die fünf platonischen Körper, Berlin 1917.

ezekután sokan legendának minősítették azt is, amit PROKLOS jegyzéke PYTHAGORASról a matematika megváltoztatásával kapcsolatban mond. — Némi óvatosságra int azonban a következő meggondolás: több ízben beszélnek megbízható antik forrásaink az i. e. 5. században élő pythagoreusok arithmetikai jellegű tanulmányairól. ARISTOTELÉS pl. azt állítja, hogy a pythagoreusok voltak az elsők, akik *mathémákkal* foglalkoztak.[61] Platón szerint pedig a pythagoreusok tudományai — *mathémái* — közül az első és legfontosabb a számokkal való foglalkozás volt.[62] A modern történeti kutatásnak csakugyan sikerült is rekonstruálnia az i. e. 5. századi pythagoreus matematikának legalább egy részét. Ha mármost összevetjük ezt a rekonstruált pythagoreus matematikát azzal, amit PROKLOS jegyzéke magáról PYTHAGORASról mond, meglepődve tapasztaljuk, hogy a hagyománynak PYTHAGORASra vonatkozó állításai az 5. századi pythagoreus matematikára mindenesetre érvényesek. A gyakorlati, empirikus jellegű matematikai ismeret ezen a fokon már csakugyan elméletivé, intellektuális jellegűvé, theóretikussá lett. Ez a matematika már csakugyan a principiumokat keresi „a konkrét anyagtól függetlenül, tisztán intellektuális úton". Ezért jutott K. REIDEMEISTER arra a következtetésre, hogy az egzakt matematika megteremtői az 5. századi pythagoreusok voltak.[63] Úgy látszik, mintha PROKLOS jegyzéke ezt a modern megállapítást egyszerűen csak visszavetítené arra a legendás PYTHAGORASra, akiről a pythagoreusok szektája elnevezte magát. Ezzel természetesen még egyáltalán nem magyaráztuk meg a deduktív görög matematika létrejöttét, de mindenesetre jó lesz tudnunk, hogy az antik hagyomány legendás PYTHAGORASa és a modern tudomány által felfedezett pythagoreusok nem állnak túl messze egymástól.

ad 3. Abból, mit PROKLOS jegyzéke a legrégibb matematikai kézikönyv-szerzőkről elmond, bennünket leginkább az 5. századi HIPPOKRATÉSre vonatkozó adatok érdekelnek. A chiosi származású HIPPOKRATÉS i. e. 450—430 táján hosszabb ideig volt Athénben és ott abból élt, hogy geometriát tanított.[64] PROKLOS szerint ő volt az első, aki rendszeres matematikai kézikönyvet, „Elemeket" írt. Ezt a híra-

[61] Aristoteles, Met. 5. 985 b 23—24. — A pythagoreusok szemében a „mathéma" tételek és bizonyítások rendszere volt; a szó magyarázatához lásd K. REIDEMEISTER i. m. 52. lap: „Mathema = eine Zusammenstellung mathematischer Sätze und Beweise".

[62] Platón, Epinomis 990 C.

[63] K. REIDEMEISTER i. m. 52. lap. — Reidemeisternek ezzel a megállapításával részletesebben foglalkozunk a következő fejezetben.

[64] Jó összefoglaló tájékoztatást ad mind Heippokratesre mind pedig a görög tudomány korai történetére vonatkozólag G. HAUSER, Die Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid. Luzern 1955.

dást a mai tudomány nem vonja kétségbe; egyrészt azért nem, mert fennmaradt egy szó szerinti 4. századi beszámoló HIPPOKRATÉSnek egy másik matematikai művéről *(quadratura lunularum)*,[65] és ennek alapján olyannak ismerjük HIPPOKRATÉS matematikai tudását, hogy könnyen hihetjük róla: megkísérelte szigorú logikai rendbe foglalni korának matematikai ismereteit; másrészt támogatják PROKLOS adatát a legújabb kutatások eredményei is. A modern matematika-történet ugyanis függetlenül a HIPPOKRATÉSre vonatkozó antik híradástól arra az eredményre jutott, hogy csakugyan lennie kellett már az 5. században (i. e. 400 előtt) valamilyen rendszeres matematikai kézikönyvnek, amelynek anyaga később minden lényegesebb változtatás nélkül belekerült Euklidés Elemeinek VII. könyvébe.[66] — Tanulságos a mi szempontunkból a HIPPOKRATÉSre vonatkozó antik adat azért, mert ha HIPPOKRATÉS már az 5. század közepe táján vagy második felében megkísérelhette a matematika rendszeres összefoglalását, azt a munkát, amelyet klasszikus formában később EUKLIDÉS végzett el, akkor ebből nyilvánvaló, hogy a deduktív matematika kezdeteinek még a HIPPOKRATÉSt *megelőző* időre kell esniök.

Az antik matematikus-jegyzék gyér adatait némileg kiegészíthetjük azzal, amit a modern történeti kutatásnak sikerült rekonstruálnia az Euklidés-előtti, különösen pedig az 5. századi görög matematikából. Bennünket ebben az összefüggésben leginkább O. BECKERnek egy 1936-ban, és B. L. v. D. WAERDENnek egy másik 1947-ben megjelent dolgozata érdekel.

O. BECKER ugyanis észrevette, hogy EUKLIDÉS IX. könyvének utolsó 16 tétele (21—36), valamint a X. könyv végén a 27. Appendix, amely az említett tételekhez kapcsolódik, tulajdonképpen csak *függelék* EUKLIDÉS művében, amelyet vagy a szerző maga, vagy pedig még valamelyik ókori másolója meglehetősen lazán illesztett hozzá az Elemekhez.[67] Ezt az összesen 17 tételből álló sorozatot a szakirodalom O. BECKER felfedezése óta mint a párosról és páratlanról szóló pythagoreus tanítást emlegeti. A felfedezőnek sikerült kimutatnia, hogy ezek a tételek még az i. e. 5. század közepéről, vagy első feléből származnak. Bár a datálás csak hozzávetőleges, annyi mindenesetre bizonyos, hogy éppen ezt a tétel-

[65] Ez a beszámoló Aristotelés tanítványától, a 4. századi Eudemostól származik; fenmaradt Simplikiosnak, az i. sz. 6. század Aristotelés-kommentátorának a művében; vö. O. BECKER, Grundlagen der Mathematik, 29. kk.

[66] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, Math. Ann. 120 (1947/49) 145—146.

[67] O. BECKER, Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente. Quellen und Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3 (1936) 533—553.

sorozatot kell a jelenleg ismert legrégibb görög deduktív mathémának tartanunk.

Hasonlóképpen sikerült megállapítania B. L. v. D. WAERDENnek EUKLIDÉS VII. könyve első 36 tételéről, hogy ezek már az i. e. 5. században, tehát 400 előtt, valamilyen pythagoreus matematikai kézikönyvében összefoglalva készen állottak, és innen kerültek át minden lényeges változtatás nélkül EUKLIDÉS szövegébe.[68] Fennmaradt ugyanis a 430—360 között élő ARCHYTASnak egy matematikai bizonyítása BOETIUS (i. sz. 5. század) egyik művében;[69] v. D. WAERDEN elemezvén ezt a bizonyítást, kimutatta, hogy ebben ARCHYTAS olyan már bebizonyított tételekre hivatkozik, amelyeket mi EUKLIDÉS VII. és VIII. könyvében olvashatunk. Minthogy ARCHYTAS a bizonyítás során egyébként rendkívül gondosan, lépésről lépésre halad, az említett két esetben viszont csak röviden utal az alapul szolgáló tételekre, bizonyosra vehetjük, hogy a ki-nem-fejtett utalások olyasmire vonatkoznak, ami ARCHYTAS korában már közismert volt. Ezen a nyomon továbbhaladva sikerült v. D. WAERDENnek valószínűvé tennie, hogy EUKLIDÉS Elemeinek úgyszólván egész VII. könyve már ARCHYTAS *előtt* megvolt írásos formában rögzítve.

Ha mármost összevetjük a modern kutatásnak ezeket az eredményeit az antik hagyománnyal, akkor úgy látszik, figyelmünket a görög matematikának arra a legrégibb korszakára kell összpontosítanunk, amelynek legfontosabb adatait a következő 5 pontban foglalhatjuk össze.

1. A 6. századi THALÉS, úgy látszik, a bizonyításban mégcsak a szemléletesség evidenciájára törekedett. Az ő geometriája még többé-kevésbé empirikus jellegű volt.
2. Az 5. század közepén vagy még a század első felében keletkezett a páros és páratlanról szóló pythagoreus tanítás *(Eukl. IX 21—36 és X App. 27)*. Ez a legrégibb ismert görög deduktív tételsorozat.
3. Az 5. század közepe táján (i. e. 450—430) élt Athénben HIPPOKRATÉS a *quadratura lunularum* szerzője, az első matematikus, aki már logikai rendbe állított „Elemeket" írt.[70]

[68] B. L. v. d. WAERDEN, Die Arithmetik der Pythagoreer I., Math. Ann. 120 (1947/49) 127—153.
[69] BOETIUS, De inst. mus. III 11 (ed. G. Friedlein, 1867) p. 285.
[70] Azokat a matematikai tételeket, amelyeket a chiosi Hippokratésnek ismernie kellett, összeállítja G. HAUSER i. m. 105. kk.

4. Még az 5. században állították össze azoknak a tételeknek nagy részét, amelyeket *Euklidés VII. könyvéből* ismerünk.

5. 430—360 között élt ARCHYTAS, aki e régi kor szellemében még többre tartotta az arithmetikát, mint a geometriát. Ő utána következett be az algebra geometrizálása.

A matematikai bizonyítás szempontjából azokról a tételekről, amelyeket az utóbbi négy pontban állítottunk össze, a következőket állapították meg.

A pythagoreus matematikában a bizonyítás szigorúságával szemben támasztott igények már igen korán meglepően nagyok. A páros és páratlanról szóló tanításban pl. azok a tételek, amelyeket Euklidés IX. könyvének 21—29 pontjaiban olvashatunk, mindenki számára, aki jártas egy kissé a számolásban, maguktól értetődőek; mégis ezeket a természetesnek látszó tényeket tételekbe foglalják és bebizonyítják. Hasonlóképpen minden további nélkül érthetőek a IX 30—32 tételek is, de ezeket is levezetik még egyszerűbb tényekből.

A holdacskák quadraturájáról szóló Hippokratés-töredék még azokat az egyenlőtlenségeket is gondosan bizonyítja, amelyek bármely ábráról azonnal leolvashatók lennének.

Hasonló jelenséggel találkozunk Euklidés VII. könyvében is léptennyomon. ARCHYTAS bizonyítása pedig az egyes lépések kidolgozását már szinte pedáns túlzásba viszi.[71]

A feltűnő tehát az, hogy a 6. századi THALÉS bizonyításai még csak empirikus kísérletek voltak, amelyek megelégedtek a szemléletesség evidenciájával, az 5. századi pythagoreusok bizonyításai viszont már rendkívül szigorú egzakt bizonyítások. Arról, hogy ki tudnánk mutatni a pythagoreusok bizonyításainak a technikájában valamilyen fokozatos fejlődést vagy lassú kibontakozást, egyszerűen szó sem lehet. A deduktív matematika kezdetének a kezdetén egyszerre máris rendkívül szigorú, igényes bizonyításokat találunk. Abban az időszakaszban tehát, amely a 6. századi THALÉS és az 5. századi pythagoreusok közé esik, döntő változás történt: megszületett a deduktív görög matematika.

Ezzel sikerült legalább nagyjából meghatároznunk az egzakt tudomány létrejöttének a korát. Hátra van még a fontosabb kérdés: *hogyan* és *miért* lett a matematika deduktív tudománnyá?

[71] Lásd ezeknek a tételeknek és bizonyításaiknak a jellemzését B. L. v. d. WAERDENnél, Math. Ann. 120. 139—140.; ill. Hippokratesre vonatkozóan G. HAUSER i. m. 107.