A „négyzetérték" fogalma és az ún. „geometriai közép"

SZABÓ ÁRPÁD

E dolgozat az antik matematikatörténetnek egyik gazdag és még kiaknázatlan forrására, a *terminológiatörténetre* hívja fel a figyelmet. Konkrét példán mutatom be, hogyan világíthatja meg egy adott szakkifejezés eredetének vizsgálata a matematikatörténetnek egy olyan szakaszát, amelyet más forrásból nem ismerünk.

Induljunk ki a magyar matematikai szaknyelv „*hatvány*" szavából. Nem kell hozzá különösebb nyelvtörténeti tájékozottság, hogy akárki rögtön rájöjjön: bizonyára a nyelvújítás korában nevezték el ezzel a magyar szóval — „*hatvány*" — a latinul „*potentia*" néven ismert fogalmat. Csakugyan, SZILY KÁLMÁN szerint[1] e szavunk először GYŐRY SÁNDORnál bukkan föl 1833-ban, kéziszótárainkba pedig csak 1846 körül veszik be. Régebben más fordításokkal kísérleteztek. Mint érdekességet megemlíti a szótár, hogy ugyanennek a fogalomnak *(potentia)* DUGONICSnál és BRESZTYENSZKYnél *kar*, PETHEnél *hatalom*, BOLYAInál pedig *emelet* volt a neve. — E kísérletek közül tulajdonképpen BOLYAI próbálkozása a legérdekesebb. Mert BOLYAI, amikor „emelet"-nek mondja a *potentia*-t, elkerüli nemcsak azt, hogy egyszerűen a latin szót fordítsa magyarra — amint ezt azok tették, akik a „*potentia*" helyett a „*hatalom*" vagy „*hatvány*" szót használták —, hanem ugyanakkor elkerüli azt is, hogy magyar megfelelőt keressen egy olyan feltételezett elgondolásra, amelyet legfeljebb csak gyanítani lehet a latin „*potentia*" mögött; ezt az utóbbit tették ti. azok, akik a „*potentia*"-t a magyar „*kar*" szóval tolmácsolták.

[1] SZILY KÁLMÁN, A magyar nyelvújítás szótára (Első rész), Budapest, 1902, 125.

Ha mármost összehasonlításul megnézzük az ismertebb európai nyelveket, akkor azt látjuk, hogy ezek a *hatvány* megnevezésére mind a latin „*potentia*" szó fordításait használják (pl. olasz *potenza*, német *Potenz*, orosz потенция, francia *puissance*, angol *power*, holland *macht* stb.). De fordítás tulajdonképpen már a latin megjelölés, a „*potentia*" név maga is. Mert ez meg nem egyéb, mint a görög *δύναμις* latin formája. A kérdés csak az, hogy vajon a görög *δύναμις* — mint matematikai terminus — csakugyan „*hatalmat*" jelentett-e?

Az alábbiakból kiderül majd, hogy a *δύναμις* szó, mint a görög matematika terminusa, igazában nem „*hatalmat*", hanem valami egyebet jelentett. Minthogy azonban a köznapi görög nyelv ezt a szót (*δύναμις*) „*erő, hatalom, képesség*" jelentésben ismerte, az a valaki, aki először fordította le ezt a matematikai kifejezést latinra,[2] félreértvén a görög terminus konkrét szaknyelvi jelentését, ugyanennek a szónak a mindennapi használatból ismert jelentésére gondolt; így lett a matematikai *δύναμις* = „*potentia*" = „*hatalom*", ill. „*hatvány*".

Az itt következő első fejezetben mindenekelőtt olyan matematikai tartalmú görög szöveghelyekből indulok ki, amelyek félreérthetetlenül megvilágítják e szó matematikai jelentését. Megtalálja az olvasó a legfontosabb ilyen antik szöveghelyek gyűjteményét összeállítva az ismert matematikatörténésznek, HEATHnek műveiben.[3]

I.

A legfontosabb matematikai tárgyú antik szöveghelyek áttekintése a következő két megállapítást teszi lehetővé a *δύναμις* szó használatát illetően:

1. Legrégibb forrásunk, amelynek alapján kimutathatjuk, hogy ez a szó csakugyan a matematikai szaknyelv terminus technicusa volt: PLATÓN (i. e. 427—347). De úgy látszik, közismert matematikai szakkifejezés volt ugyanez a szó már a PLATÓNt megelőző időkben is. PLATÓNtól kezdve mindenesetre konkréten is láthatjuk a *δύναμις* kifejezés

[2] Nem sikerült eddig megállapítanom, hogy vajon a görög „dynamis"-nak, mint matematikai terminusnak a latin *potentia* szóval való fordítása megvolt-e már az ókorban is. Kétségtelen azonban, hogy az arisztotelészi „dynamis"-t, mint az „energeia" vagy „entelecheia" ellentétét — *amely szóhasználat véleményem szerint valószínűleg éppen a matematikai „dynamis" terminusból fejlődött ki* — már BOETIUS *potentia*-nak fordítja. Erre az utóbbira lásd: „Boetius, De inst. arith. et De inst. mus. ed. G. FRIEDLEIN, 1867. Index s. v. és „Boetius, Commentarii in librum Aristoteleis *Peri hermeneias*" ed. C. MEISER, I—II. 1877—1880 Index s. v.

[3] TH. L. HEATH, „Archimedes" (1. ed. 1897; 2. ed. with Supplement 1912; Dover Publication, év nélkül). — The Thirteen Books of Euclid's Elements I., II., III." (1. ed. 1908; 2. ed. 1926; Dover Publication é. n.). — „A History of Greek Mathematics I—II." Oxford 1921.

használatát az antik görög matematika bármelyik korszakában. Az antikvitás késői századaiban pedig — pl. az alexandriai DIOPHANTOS-nál[4] — már olyan újabb szakkifejezésekkel is találkozunk, amelyeket nyilvánvalóan a régi *δύναμις* terminusból képeztek tovább, pl. *δυναμοδύναμις*, *δυναμόκυβος* stb.[5]

2. Másik megállapításunk viszont, amelyet azonnal igazolhat az antik szöveghelyek vizsgálata, a következő: Feltűnő, hogy ókori matematikai tárgyú szövegeinkben *a δύναμις kifejezés mindig csak második hatványt jelöl, de sohasem fordul elő az, hogy a δύναμις elnevezésen harmadik, negyedik vagy magasabb hatványt értenének.*[6] A szónak ez a jelentése — *δύναμις* = *„második hatvány"* tulajdonképpen mindig érvényben maradt az ókori matematikában. Ezt igazolják azok az újabb keletű kifejezések is, amelyekre DIOPHANTOSszal kapcsolatban épp az előbb utaltam. Mert DIOPHANTOSnál a *δυναμο δύναμις* kifejezés pl. valamely mennyiségnek a „negyedik hatványát" jelenti. Nyilvánvaló, hogy a *δύναμις* szót azért kellett ebben az esetben megduplázni, mert a „dynamis" önmagában nem jelent többet, mint „második hatvány"; a negyedik hatvány viszont: $x^4 = x^2 \cdot x^2$ („dynamis" szorozva „dynamis"-szal). Ugyanígy értendő az előbb idézett másik diophantoszi terminus, a *δυναμόκυβος* is: $x^5 = x^2 \cdot x^3$, „második hatvány" szorozva „harmadik hatvánnyal"; a görög *κύβος* szó ti. ugyanúgy a *„harmadik hatványt"* — azaz tkp. a *„kockát"* — jelenti, mint ugyanennek a szónak latin és magyar formája, a *cubus*, ill. a *köb*.

Ha ezek után gondosan mérlegeljük az utóbbi megállapítást — ti. azt, hogy a görög *δύναμις* mindig csak a „második hatványt" jelenthette —, akkor mindjárt be kell látnunk azt is, hogy *a görög matematika „dynamis" fogalma igazában nem is azonos a mi „potentia" fogalmunkkal.* Mert bár úgy látszik, mintha a latin *„potentia"*, mint szakkifejezés, jelentésében pontos tükörképe volna a görög *δύναμις*-nak, mégis a matematikai *„potentia"* fogalma sokkal tágabb, mint a görög matema-

[4] Reá vonatkozóan lásd B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft, Basel—Stuttgart 1956, 457 sk.

[5] TH. L. HEATH, A History... II. 457—458.

[6] Az „Elemek" X. könyvéven a 2. definíció a következő szavakkal kezdődik: *εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν κτλ.* Magyarra ezt a következőképpen fordíthatnánk: „Négyzetesen összemérhetők az egyenes szakaszok akkor, ha stb.". EUKLIDÉS szövegének modern kiadója, J. L. HEIBERG latin nyelvű parafrázisában az idézett görög mondatot így fordítja: „Rectae *potentia* commensurabiles sunt, ubi etc.". Félrevezető ebben a fordításban a *„potentia"* szó használata. Helyesen jegyezte meg éppen az ilyen fordításokra TH. L. HEATH: „*Commensurable in square* is in the Greek *δυνάμει σύμμετρος*. In earlier translations (e. g. Wiliamson's) *δυνάμει* has been translated „*in power*", but as the particular *power* represented by *δύναμις* in Greek geometry is *square*, I have thought it best to use the latter word throughout" („The Thirteen Books..." III 11.

tikában a *δύναμις* fogalma. Akkor, amikor a görög *δύναμις*-t latinra a „*potentia*" szóval fordították, egyszersmind ki is bővítették az eredeti fogalmat olyan mértékben, amilyenre a görög matematikából nem ismerek példát. Mert megtaláljuk ugyan a görög matematikában a következő hatványformák neveit: „második hatvány" = *δύναμις*, „harmadik hatvány" = *κύβος*, „negyedik hatvány" = *δυναμοδύναμις*, „ötödik hatvány" = *δυναμόκυβος*, „hatodik hatvány" = *κυβόκυβος*,[7] de úgy látszik, *nem volt* a görög matematikában olyan általánosan használt összefoglaló terminus magának a *hatvány* fogalmának a megnevezésére, mint amilyen a mi latin eredetű „*potentia*" szavunk.[8]

Miután megállapítottuk a matematikai *δύναμις* terminus jelentésére vonatkozóan az első fontos tényt — *a δύναμις szó csak „második hatványt" jelölhet* — érdemes lesz jobban megfigyelnünk ugyanennek a terminusnak egy olyan jelentésbeli árnyalatát is, amely azonnal szembeötlik, pl. akkor, ha összehasonlítjuk PLATÓN dialógusaiból az alább tárgyalandó két szövegrészletet.

Az egyik platóni szövegrészlet, amely a matematikai *δύναμις* kifejezés használatát illusztrálhatja, az „Állam" c. dialógusban olvasható.[9] PLATÓN a kérdéses helyen két számról beszél, a 81-ről és a 729-ről. Mint látjuk, mind a kettő 9-nek a hatványa, mert $81 = 9^2$ és $729 = 9^3$. Ezért használja PLATÓN az előbbire azt a görög megjelölést, hogy *κατὰ δύναμιν*, az utóbbira pedig azt, hogy *κατὰ τρίτην αὔξην*. A két görög kifejezés az adott összefüggésben ugyanazt jelenti, mint amit a magyar „*második hatvány szerint*", illetőleg: „*harmadik hatvány szerint*" kifejezések jelentenének.[10] — Könnyen azt hihetnénk tehát e platóni szövegrészlet vizsgálata alapján, hogy a magyar „második hatvány" formula megfelel a görög *δύναμις* terminusnak. De némileg módosítja ezt a megállapításunkat egy másik platóni szövegrész közelebbi vizsgálata. Ezt a másik szövegrészt a „Politikos" c. dialógusban találjuk.[11]

E másik helyen PLATÓN egy olyan négyzetről beszél, amelynek oldala *1 láb hosszú*. Az ilyen négyzet átlójáról mondja a következő görög szavakat: a *ἡ διάμετρος ἡ δυνάμει δίπους*. E szavak — a görög eredetinek megfelelő sorrendben — a következőt jelentik: „*az átló, amely dynamis-ával kétláb*". Jobban megértjük ezeknek az első pillantásra kissé talán különös szavaknak a jelentését akkor, ha arra gondolunk: *milyen hosszú az egységnyi oldalú négyzet átlója?* — Mi ezt a

[7] Lásd föntebb az 5. jegyzetet.

[8] PLATÓN használja ugyan a mi „hatvány" fogalmunk értelmében az *αὔξη* szót — lásd erre vonatkozóan fönt a dolgozat szövegét —, de, úgy látszik, ez mégsem volt általánosan elfogadott matematikai terminus.

[9] Resp. 587 D.

[10] Vö. TH. L. HEATH, A History . . . I. 297.

[11] Politikos 266 B 3.

hosszúságot $\sqrt{2}$-nek mondjuk. De nem így gondolkoztak a görög matematikusok. Ők ti. a $\sqrt{2}$-t egyáltalán nem ismerték el számnak. Azt állították, hogy az egységnyi oldalú négyzet átlójának hosszát *nem mérhetjük meg*, mert ez „nem mérhető az egységgel", inkommenzurábilis mennyiség, de könnyen megmérhetünk ebben az esetben a hosszúság helyett valami mást. Hiszen az a másik négyzet, amelyet az egységnyi oldalú négyzet átlójára emelünk, éppen kétszerese az eredeti négyzetnek.[12] Ezért mondja PLATÓN az egységnyi oldalú négyzettel kapcsolatban — amint ezt az előbb görögül is idéztem: „*az átló, amely a reá emelt négyzettel* — ezt jelenti görögül az a kifejezés, hogy : „*dynamis*"-ával — *kétláb*". — Azt hiszem, elég világosan kitűnhetik e bemutatott magyarázatból legalább annyi, hogy a most tárgyalt platóni szövegrészlet a *δύναμις* szót „*négyzet*" értelemben használja.

Módosítanunk kell tehát e másodjára vizsgált platóni szövegrész alapján a *δύναμις* terminus jelentésére vonatkozó korábbi megállípításunkat. Mert igaz ugyan, hogy ez a szakkifejezés mindig csak „második hatványt" jelöl, és nem lehet ez a szó valamely más, magasabb fokú hatvány neve, de mégis jobban megközelítjük a görög szó értelmét akkor, ha azt állítjuk, hogy ez a matematikai terminus egyszerűen a négyzet-et jelenti. Természetesen adekvátabb ez a szójelentés a görög eredetivel még azokban az esetekben is, amelyekben megnyugtatónak érezzük a szöveg értelmét úgy is, ha a *δύναμις* terminust nem „négyzet"-nek, hanem modern algebrai szokás szerint „második hatványnak" fordíthatjuk.

II.

Miután sikerült megállapítanunk e dolgozat első fejezetében a *δύναμις* terminus pontos matematikai értelmét: „négyzet", tulajdonképpen már át is térhetnénk annak a másik, sokkal fontosabb kérdésnek a tárgyalására: vajon mi lehetett az oka annak, hogy a görög matematikusok nem elégedtek meg a közismert *τετράγωνον* terminussal, hanem bevezettek még egy másik terminust is (*δύναμις*) ugyanannak a fogalomnak, a „négyzet"-nek a megnevezésére? — De mielőtt áttérnénk ennek a másik kérdésnek a tárgyalására, közbe kell itt még iktatnom egy egész fejezetet a platóni „Theaitétos" c. dialógus egyik részletéről. Foglalkoznom kell ebben az összefüggésben e platóni szövegrésszel főként azért, mert PLATÓN e helyen[13] több ízben használja a *δύναμις* szót, mint matematikai terminust. Előrebocsáthatom, hogy e szó jelentése a most megbeszélendő platóni szövegösszefüggésben is

[12] Vö. PLATÓN, „Menón" 82 B — 85 E, és dolgozatomat: ANTIK TANULMÁNYOK (STUDIA ANTIQUA) V 1958, 25—43.

[13] „Theaitetos" 147 D — 148 B.

ugyanaz lesz, mint amit e dolgozat első fejezete után várhatunk: *„négyzet"*. De mégis újra kell itt bizonyítanom ezt a szójelentést, mivel a matematikatörténészek általában nem úgy magyarázzák a kérdéses platóni szöveget, mint ahogy én fogom. — Mielőtt rátérnék a kérdéses dialógus-részlet ismertetésére, összefoglalom itt három pontban azokat a legismertebb és széles körben elterjedt *téves nézeteket*, amelyeket — a megbeszélendő platóni dialógus-résszel kapcsolatban — szinte bármelyik olyan történeti kézikönyvben megtalálhat az olvasó, amely részletesebben kitér az antik matematikára.

1. *Tévesen* azt állítják, hogy PLATÓN a „Theaitétos" c. dialógusban a *δύναμις* terminust „négyzetgyök" értelemben használta volna.

2. Főként e részletesen megtárgyalandó platóni szöveg *téves magyrázata* vezetett arra az elképzelésre, amely szerint a kyrénéi THEODÓROS nevű matematikus továbbfejlesztette az irracionalitás elméletét, *bebizonyítván*, hogy nemcsak a már régebben ismert $\sqrt{2}$, hanem a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ stb. is mind irracionális szám egészen $\sqrt{17}$-ig.

3. THEODÓROSnak az előbbi pontban említett „félbenmaradt" elméletét építette volna tovább a „nagy matematikus" THEAITETOS.

Ki fogom mutatni, hogy e három pontban összefoglalt állítások a platóni szöveg félreértésén alapulnak, s mint ilyenek, tévesek. — Mellékesen megjegyzem még, hogy a 3. pontban említett állítás része az ún. „Theaitétos-legendának".[14] „Theaitétos-legenda" néven foglaljuk össze azt a történeti problémát, hogy vajon csakugyan élt-e PLATÓN korában egy olyan THEAITÉTOS nevű nagy matematikus, akiről PLATÓN ugyanilyen nevű dialógusát elnevezte? — Ezt az utóbbi kérdést dolgozatom igazában *nem dönti el még.* Csak annyi fog kiderülni az alábbiakból minden kétséget kizáróan, hogy az a részlete a platóni „Theaitétos" c. dialógusnak, amelyet tárgyalni fogok, *semmi esetre sem lehet pozitív értelmű bizonyíték a „Theaitétos-legenda" kérdésében.* — Ezek után pedig lássuk a problematikus dialógus-részletet.

Ha meg akarjuk érteni a „Theaitétos" c. dialógusnak azokat a részeit, amelyekben a *δύναμις* szó egymásután többször is előfordul mint matematikai terminus, a következőkre kell visszaemlékeznünk a szöveg előzményeiből:

A dialógus SÓKRATÉS beszélgetése az ifjú THEAITÉTOSszal arról a kérdésről, hogy mi a tudás. THEAITÉTOSra a szintén jelenlevő matematikus, THEODÓROS hívta fel SÓKRATÉS figyelmét, mint olyan fiatalemberre, aki rendkívül tehetségesnek bizonyult a matematika tanulásá-

[14] Ez a megjelölés K. REIDEMEISTERtől származik. Ő írta „Das exakte Denken der Griechen" c. könyvében (Hamburg 1949, 24): „. . . ich kann mich des Verdachts nicht erwehren, dass THEÄTET der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den THEÄTET des Platonischen Dialogs krsitallisiert hat".

ban. Ilyen előzmények után teszi fel Sókratés Theaitétosnak a kérdést: „mi a tudás?" (*τί σοι δοκεῖ εἶναι ἐπιστήμη*, 146 C 3). De Theaitétos nem tud felelni erre a kérdésre, illetőleg válasza meglepően gyerekes, primitív. Ahelyett ugyanis, hogy megpróbálná definiálni a kérdezett fogalmat, egyszerűen felsorolásba kezd, felsorolja azokat a dolgokat, amelyeket tudásnak tart: először is mindazt, amit Theodórostól tanulhat az ember (geometria, asztronómia, zene, számolás stb.); de tudás ezeken kívül még a cipőkészítő meg a többi kézműves mestersége is, stb. stb. Sókratés természetesen nincs megelégedve ezzel a válasszal. Mert ő nem felsorolást akart, hanem általános, összefoglaló meghatározást szeretett volna hallani arról, hogy mi a tudás. Mindjárt példán is illusztrálja a Theaitétos által elkövetett hibát. Theaitétos válasza a feltett kérdésre éppenolyan nevetséges (147 B 10—11), mint pl. az volna, ha arra a kérdésre, hogy „mi a sár," ilyenfajta felsorolásba kezdenénk: van kőműves-sár, fazekas-sár, vályogvető-sár stb. A helyes válasz ezzel szemben valami ilyesmi volna: a sár egyfajta vízzel kevert föld. — Theaitétos igazában csak ez után a magyarázat után érti meg, mit is kérdezett voltaképpen Sókratés az előbb. Igen, most már tudja, miről van szó. Hiszen ugyanilyen feladat előtt álltak, ő, Theaitétos, meg szintén jelenlevő egykorú barátja — akit ugyanúgy Sókratésnek hívnak, mint a dialógus vezetőjét — mesterüknek, Theodórosnak egyik matematika-órája után. — Erre a dialógus vezetője, Sókratés, természetesen elmeséltteti Theaitétosszal, miből is állott matematikai tapasztalata, amelyre célzott, mert igazában csak ebből derülhet ki most, érti-e már Theaitétos Sókratés kérdését.[15] — Nagyjából ez a kerete annak a szövegrésznek, amellyel a következőkben részletesebben foglalkozom. Theaitétos ugyanis így folytatja elbeszélését:

„Theodóros, akit itt látsz, rajzolt elénk valamit a négyzetekre vonatkozóan (*περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν ... ἔγραφε* 147 D 2 kk.) a három négyzetlábnyi meg az öt négyzetlábnyi területűről (*τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος*), megvilágítván előttünk, hogy ezek oldalaikat tekintve nem összemérhetőek az egységlábnyi négyzet oldalával (*ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ*); így vette sorba a négyzeteket egymásután mind egészen a 17 négyzetláb területűig. Ennél aztán abbahagyta." — Álljunk meg e mondatnál egy pillanatra, mert

[15] Arra vonatkozóan, hogyan magyarázták a matematika történetírói a dialógus egészét, jellemző lehet pl. a következő: „Platon gibt im Dialog auch ein Beispiel *einer mathematischen Untersuchung des Jungen* Theaitetos (?). Das Beispiel ist ziemlich *an den Haaren herbeigezogen* (?): Es sollte als Einleitung zu einer philosophischen Diskussion dienen, *passt aber nicht recht dazu* (?)" (B. L. v. d. Waerden, o. c. 272). — Kiemeltem és megkérdőjeleztem ebből az idézetből azokat az állításokat, amelyeket dolgozatom az alábbiakban cáfolni fog.

fordításomat — legalább egyik-másik részletében — közelebbről is meg kell okolnom.

Idézetem első mondatában a *δύναμις* szót természetesen „négyzet"-nek fordítottam, minthogy véleményem szerint ez az egyetlen lehetséges és helyes fordítás. De nem így fordítják ugyanezt a mondatot a matematika történetírói.[16] Ők ugyanis úgy gondolják, hogy THEODÓROS igazában mégsem az említett négyzetekről, hanem e négyzetek *oldalairól* tanított valamit, és hogy éppen ezért az idézett szövegben a *δύναμις* szó nem is magát a négyzetet, hanem a négyzet *oldalát* jelentené. — Rá fogok mutatni később arra, miért téves ez az állítás. (A *δύναμις* szó *nem jelentheti* természetesen ebben a szövegben sem a négyzet *oldalát*.) Mielőtt azonban rátérnék ennek a bizonyítására, nem lesz talán fölösleges visszapillantanom arra a másik kérdésre: mi lehet az oka annak, hogy a legutóbbi száz év során a matematika legkiválóbb történetírói úgyszólván mind, kivétel nélkül, következetesen félreértették ezt a platóni szövegrészt.

Tudomásom szerint az első, aki szövegünket a legújabb korban félreértette, P. TANNERY volt. Neki támadt még 1876-ban az a téves ötlete, hogy a *δύναμις* szó a „Theiatétos" c. dialógusban a „négyzetgyök"-öt jelenti.[17] Nyolc évvel később TANNERY egy másik dolgozatában[18] belátta ugyan már tévedését — a *δύναμις* szó *nem jelenthet* „négyzetgyök"-öt — és ezúttal inkább azt javasolta már: javítsuk ki a tárgyalt szövegrészben a *δύναμις* szót mindenütt *δυναμένη*-re, mert így könnyebben érthető mindaz, amit THEAITÉTOS elmond. De ezzel az újabb tévedésével nem volt már olyan „szerencséje" TANNERYnak, mint a megelőzővel; a történészek nem fogadták el javaslatát.[19] Ami viszont korábbi ötletét illeti, hiába tagadta meg ezt TANNERY még

[16] Az általam ismert helytelen fordítások közül megemlítem egyelőre a következőket: B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234; TH. L. HEATH, A History ... I 203; A. FRAJESE, La matematica nel mondo antico, Roma 108—109; M. T. CARDINI, Pitagorici, Testimonianze e Frammenti, Firenze 1962 75 kk. stb. — Ezekkel szemben nyomatékosan fel kell hívnom a figyelmet O. APELT hibátlan fordítására: „Platons Dialog Theätet, übers. u. erl. von O. A., Leipzig 1911, zweite der neuen Übersetzung erste Auflage". — A gyűjteményes magyar Platón-fordítás („Platón Összes Művei I—II. Magyar Filozófiai Társaság, Budapest 1943) HALASY—NAGY J. Theaitétos-fordítását publikálta. Úgy látszik, a magyar fordító O. APELT német szövegét követhette, mert bár a magyar fordítás egésze bosszantóan rossz, a bennünket érdeklő rész mégis *több szempontból* feltűnően jól sikerült.

[17] „Le nombre nuptial dans Platon", Revue Philosophique 1876, I 170—188- -Mémoires Scientifiques (J. L. HEIBERG—H. G. ZEUTHEN, Toulouse—Paris 1912 I 12—38. — A mellékes megjegyzés, amelyre fönt utalok: Mém. Scient. I 33 not. 2.

[18] „Sur la langue mathématique de Platon", Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux 1884, I. 95—105=Mém. Scient. II. 91—104.

[19] Vö. pl. B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234: „es ist nicht nötig, mit TANNERY das Wort *δύναμις* durch *δυναμένη* (Erzeugende) zu ersetzen".

később is újra (pl. 1899-ben[20]), az egyszer leírt téves gondolat halhatatlannak bizonyult szinte mind e mai napig.[21] Sőt, annyira szívós életű volt TANNERYnek e többször visszavont tévedése, hogy később *öntudatlanul* még ő maga is újra megismételte, pl. egyik 1902-ben közölt dolgozatában.[22]

Lássuk ezek után mindenekelőtt azt a kérdést: miért *nem* jelentheti a *δύναμις* szó a vizsgált platóni szövegben a négyzet *oldalát* (vagy más szóval: a „négyzetgyök"-öt). Két érvem erre a következő.

1. Tudomásom szerint a *δύναμις* kifejezés az ókori matematikai irodalomban soha mást nem jelentett, mint *„négyzet"*-et.

2. Mind a grammatika, mind pedig a szöveg tartalma (Theait. 147 D 3 kk.) egyformán amellett szólnak, hogy a *δύναμις* kifejezés a most vizsgált összefüggésben is csak „négyzet"-et jelenthet. Mert ha megpróbálnánk a kérdéses mondatban a *δύναμις*-t „négyzet*oldal*"-nak fordítani, egyszerre értelmetlenné (hamissá) válnék a mondanivaló maga. A kérdéses mondatrészek ugyanis görögül így hangzanak: *περὶ δυνάμεων... Θεόδωρος ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος καὶ πεντέποδος...* Azt kell mármost eldöntenünk, hogy vajon a többes genitivusban álló szót (*δυνάμεων*) „négyzet"-nek vagy „négyzet*oldal*"-nak fordítsuk-e? De mielőtt lefordítanánk ezt a kifejezést, vegyük észre azt is, hogy van ennek a problematikus szónak két appositioja. Hiszen a másik két szó mellette azért áll egyes genitivusban — *τρίποδο*: és *πεντέποδος* — mert ezek az előrebocsátott többes genitivusnak az appositioi. Ebből viszont az következik, hogy ha „négyzet*oldal*"-nak fordítjuk a többes genitivusban álló szót, akkor „négyzet*oldal*"-ra kell vonatkoznia a két appositionak is. Csakhogy mit jelent ebben az esetben az egész mondat? — Nyilván a következőt: „THEODÓROS rajzolt elénk valamit a négyzet*oldalakról*, ti. *a három- és ötláb hosszú négyzetoldalról, megvilágítván előttünk, hogy ezek (az oldalak) összemérhetetlenek az egységlábnyi négyzetoldallal*". — Mint látjuk, a mondat így értelmetlen, sőt hamis, hisz olyasmit állít, ami nem igaz! *Ugyan miért volna összemérhetetlen a három- és ötláb hosszú négyzetoldal az egyláb hosszúval?* Pedig más értelemben a szöveget — ha csakugyan „négyzet*oldal*"-t jelent a *δύναμις* szó, és ha tekintettel vagyunk a grammatikára[23] — egyáltalán nem is

[20] „L'hypothése géométrique du Ménon du Platon", Archiv f. Gesch. d. Philosophie II. 509—514 = Mém. Scient. II. 400—406.

[21] Vö. pl. TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... II. 288; A History ... I. 209 n. 2; vagy B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234, 272 stb.

[22] „Du rôle de la musique Grecque dans le développement de la mathématique pure", Bibliotheca Mathematica, 3. Folge III. 1902. 161—175 = Mém. Scient. III. 68—69. (Lásd alább a 39, 40 és 41. jegyzetekhez kapcsolódó szövegrészt is!)

[23] Természetesen észrevették a matematikatörténészek is, hogy a *δύναμις* szó általuk adott téves értelmezése az adott helyen tönkreteszi a görög szöveget. Ezért túltéve magukat a grammatikán, úgy fordították PLATÓN szövegét, hogy az

fordíthatjuk. — A félreértésre nyilván az adta az okot, hogy a τρίπους és πεντέπους szavak egyformán jelölhetnek hosszúságot is meg területmértéket is. Hogy e két szó az adott mondatban területmértéket és *nem* hosszúságmértéket jelöl, az következik egyszerűen abból, hogy a mondat a „háromlábnyi és ötlábnyi" *valamiknek* az inkommenzurábilitásáról beszél. Világos, hogy azok a „három- és ötlábnyi *valamik*", amikről itt szó van, csak a *négyzetek* maguk lehetnek, de összemérhetetlenek *nem* e „három és ötlábnyi valamik", hanem oldalaik. Ha viszont a τρίποις és πεντέπους szavak az adott összefüggésben *nem* hosszúság-, hanem területmértéket jelölnek, akkor ebből szükségszerűen következik, hogy az a szó, amelyre e két appositio vonatkozik, a δύναμις maga az adott mondatban csak „*négyzet*"-et jelenthet, és semmi esetre sem lehet: „négyzet*oldal*".

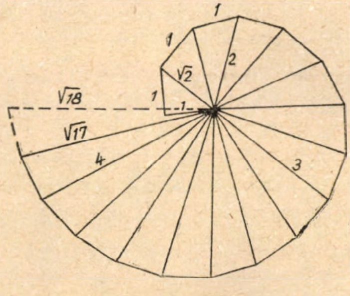
Túlságosan messzire vezetne, ha kitérnék itt még annak a megmutatására is, milyen károsan befolyásolta a platóni szövegkiadást az a körülmény, hogy nem értették meg világosan az éppen most interpretált mondat matematikai tartalmát.[24] Megelégedhetünk ebben az összefüggésben annak a ténynek a leszögezésével, hogy a δύναμις szó ezen a helyen is egyértelműen „négyzet"-et jelent. — Fontos azonban, hogy világosan megértsük: miről is beszélt tulajdonképpen THEODÓROS a tanítványai előtt?

Mindenekelőtt állapítsuk meg: úgy látszik, olyan négyzetekkel foglalkozott, amelyeknek területe *egész számú négyzetlábakban* kifejezhető, hiszen szövegünk a három- és öt négyzetlábnyi területű négyzeteket említi példaként, és azt mondja, hogy THEODÓROS ez után a két négyzet után a többit is mind sorra vette a 17 négyzetláb területű négyzetig. Világos tehát, hogy csupa olyan négyzetről beszélt THEODÓROS, amelyeknek területe egész számú négyzetlábakban megadható. — Érdemes lesz talán megemlítenünk azt is — bár PLATÓN szövege erre a kérdésre *nem* tér ki — hogyan szerkeszthetünk ilyen négyzeteket. Legkézenfekvőbbnek az látszik, hogy az ún. Pythagoras-tételből induljunk ki és olyan derékszögű háromszögeket konstruáljunk, amelyeknél a befogók négyzetösszege a kívánt számot adja. Ha pl. azt a négyzetet keressük, amelynek területe *öt négyzetláb*, akkor kiindulhatunk abból a derékszögű háromszögből, amelynek egyik befogója 1, másik befo-

— matematikai tartalmát tekintve — nagyjából helyes maradt ugyan, de nyelvi szempontból egyszerűen hajmeresztő. Ilyen nyelvi szempontból elfogadhatatlan fordítás pl. a következő: „THEODORUS was proving to us a certain thing about *square roots* (δυνάμεις), I mean *(the square roots i. e. sides)* of *three square feet and five square feet*, namely that these roots are not commensurable in length with the footlength etc." (TH. L. HEATH, A History ... I. 203).

[24] Erre vonatkozóan inkább utalok dolgozatomra a MAIA c. folyóiratban: XV. 1963. 219—256

gója pedig 2 láb; az ilyen derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet öt négyzetláb területű lesz, mert $1^2+2^2=5$. — Vagy egy másik módja volna a Pythagoras-tétel alkalmazásának — amellyel mindjárt sorozatosan is előállíthatjuk azokat a négyzeteket, amelyekről THEODÓROS beszélt — a következő: Induljunk ki abból a négyzetből, amelynek oldala 1 láb hosszú. Ennek a négyzetnek az átlója adja azt a második négyzetet, amelynek területe 2 négyzetláb. (Azaz modern terminológiával élve: a kiindulásul vett négyzet átlója a $\sqrt{2}$.) Ha viszont utána a felhasznált második derékszögű háromszög átfogóját tekintem egy olyan újabb derékszögű háromszög hosszabb befogójának, amelynek rövidebb befogója újra az egység, akkor e harmadik derékszögű háromszög átfogója megadja a harmadik négyzetnek az oldalát, azét, amelynek területe 3 négyzetláb $(1^2+(\sqrt{2})^2=3)$, illetőleg oldala: $\sqrt{3}$. — Ezt a műveletet — amint az alábbi ábra mutatja — éppen a 17. négyzetig (a $\sqrt{17}$-ig) folytathatjuk. Ezért volt feltehető, hogy talán éppen ilyen ábrán illusztrálta THEODÓROS a tanítását THEAITÉTOS és tanulótársai előtt.[25]



Érdekesek mármost a THEODÓROS által bemutatott négyzetek a következő szempontból. Vegyük pl. a *három* és az *öt* négyzetláb területűt, tehát éppen azt a kettőt, amelyet THEAITÉTOS is kiemel beszámolójában. E két négyzet, területét tekintve, többszöröse a négyzetegységnek, azaz minden további nélkül összemérhető a területmérés egységével. Ugyanakkor azonban e két négyzet oldala nem mérhető a hosszúság egységével, vagyis görög felfogás szerint nincs olyan két szám, amellyel meg lehetne határozni e két négyzet oldalának hosszát. — Minthogy a beszámoló szerint THEODÓROS ezután sorra vette a négyzeteket mind a 17 négyzetláb területűig, nyilvánvaló, hogy az előbbi kettőn kívül még további tíz olyan négyzetet tudott bemutatni, amelyeknek oldala hasonlóképpen inkommenzurábilis a hosszúság egységével. (Ezek ti. a következő négyzetláb területű négyzetek: 6, 7, 8, 10, 11, 12,

[25] Vö. B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 235.

13, 14, 15, 17.) Kérdés azonban: *vajon* THEODÓROS *kihagyta-e közben a 4, a 9 és a 16 négyzetláb területű négyzeteket?* — Természetesen: *nem!* Hiszen demonstrációjának célja — mint majd látni fogjuk — igazában csak az lehetett, hogy felhívja a figyelmet a kétféle négyzet különbségére: arra, amelynek csak a területe kommenzurábilis, de nem kommenzurábilis az oldala, és arra a másikra, amelynek mind a területe, mind pedig az oldala kommenzurábilis.

De mielőtt továbbfolytatnám a Platón-szöveg interpretációját, érdemes lesz itt közbevetőleg emlékeztetnem arra, hogyan magyarázzák ugyanezt a szöveget a matematika történetírói általában.

Súlyos tévedés volt TANNERY részéről még 1884-ben a következő magyarázat: „Nem kétséges, hogy PLATÓN ezen a helyen két értekezésre céloz. Az egyik, a régebbi, a kyrénéi THEODÓROSÉ, a másik, az újabb, barátjáé, THEAITÉTOSÉ. Éppen azt meséli el, hogyan született meg az utóbbi értekezés egyik alapvető gondolata. Minthogy pedig ennek az alapvető gondolatnak a megtalálásában segítségére volt THEAITÉTOSnak — az elbeszélés szerint — egy ifjú barátja is, akit SÓKRATÉSnek hívnak, eléggé kézenfekvő arra gondolnunk, hogy ezzel az utóbbi személlyel, az „ifjú SÓKRATÉS"-szel PLATÓN tkp. önmagára céloz."[26] — Szinte azt mondhatnám: TANNERYnek ezekkel a szavaival kezdődött a „Theaitétos-legenda" modern változata.

Mert világos, hogy TANNERY hatása alatt állnak azok a történészek, akik még ma is azt hiszik, hogy a vizsgált Platón-szöveg igazában két dologról szól:

1. THEODÓROS *bebizonyította* a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ irracionalitását, anélkül, hogy általános tételt tudott volna fölállítani és *bebizonyítani* magáról az irracionalitásról.[27] (Jóllehet PLATÓN egyáltalán nem említi THEODÓROS bizonyításait, mégis, mint az előbbi ábrán láttuk, szellemes sejtéseket állíthatunk fel arra vonatkozóan is, hogyan demonstrálhatott THEODÓROS.[28])

2. Úgy gondolják, hogy THEODÓROS félbemaradt elméletét THEAITÉTOS tökéletesítette. Sőt azt hiszik, PLATÓN szövegéből rekonstruálhatjuk azt a tételt is, amelyben THEAITÉTOS elmélete kulminált; ez az utóbbi valahogy így hangzott volna: *„Azok a szakaszok, amelyek olyan négyzetet alkotnak, hogy a felület kifejezhető ugyan egész számban, de nem négyzetszámban, nem mérhetők a hosszúság egységével."*[29]

[26] Lásd föntebb a 18. jegyzetet. Mém. Scient. II. 93.

[27] TH. L. HEATH, A History ... I 203: "It does not appear, however, that he had reached any definition of a surd in general or proved any general proposition about all surds etc."

[28] Lásd föntebb a 25. jegyzetet.

[29] B. L. v. d. WAERDEN (o. c. 273) így rekonstruálja THEAITÉTOS tételét: „Strecken, die ein Quadrat erzeugen, dessen Flächeninhalt wohl eine ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, haben kein gemeinsames Mass mit der Längeneinheit."

Az éppen felsorolt két ponttal szemben a következőkre kell felhívnom a figyelmet:

a) Valószínű ugyan, hogy THEODÓROS be is tudta bizonyítani az általa vizsgált négyzetoldalak inkommenzurábilitását. Hiszen, ha arra gondolunk, hogy a görög matematikusok ebben az időben már nagyon is tisztában voltak a matematikai bizonyítás jelentőségével, minden további nélkül feltehető, hogy THEODÓROS csakugyan bizonyítással adta elő tételeit. De PLATÓN szövege mégsem említi egy szóval sem THEODÓROS *bizonyításait.* (A matematikai *bizonyítás* terminus technicusa — a *δείκνυμι* szó — egyáltalán elő sem fordul vizsgált szövegünkben.) Ha tehát az 1. pontban említett interpretáció mégis THEODÓROS *bizonyításait* állítja az érdeklődés középpontjába, ezzel máris elősegíti egy olyan szövegnek a félreértését, amely a *bizonyítás* kérdését egyáltalán nem említi, hanem valami egészen mást állít előtérbe.

b) Még kevésbé lehet szó arról, hogy a platóni dialógusban szereplő THEAITÉTOS — függetlenül attól a kérdéstől, hogy csakugyan élt-e ez idő tájt egy THEAITÉTOS nevű matematikus, akinek emlékét PLATÓN a dialógusában meg akarta volna örökíteni — *továbbfejlesztette vagy tökéletesítette volna* THEODÓROS *elméletét.* Aki ilyesmit olvas ki PLATÓN művéből, az egyszerűen *félreérti a görög szöveget.* Mert ebben semmi többről nincs szó, mint arról, hogy THEAITÉTOS *megértette* THEODÓROS tanítását. Figyeljük csak meg jól, mit is mond a platóni THEAITÉTOS. — Miután megemlítette, hogy THEODÓROS a 17 lábnyi területű négyzetnél abbahagyta demonstrációját, így folytatja:

„Mi mármost a következőre gondoltunk *(ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον).* Miután nyilván végtelen sok négyzet van *(ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο),* meg kellene kísérelnünk, hogy ezeket mind egybefogjuk *(πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν)*; mi szerint nevezhetnénk el az összes négyzeteket mind *(ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις)*?"

Úgy látszik tehát: THEAITÉTOS és barátja tudják, hogy *végtelen* sok olyan négyzet van, amelyek közül THEODÓROS csak egynéhányat mutatott be. Mert THEODÓROS tulajdonképpen a *számokat* vette elő 3-tól 17-ig, hozzárendelvén minden számhoz egy-egy négyzetet oly módon, hogy bármelyik szám ne csak a hozzárendelt négyzet sorszámát jelölje, hanem megadja egyszersmind ennek a négyzetnek a területét is. Minthogy viszont a számok sora végtelen, nyilván végtelen lesz azoknak a négyzeteknek a sora is, amelyek a számokhoz az előbbi módon hozzárendelhetők. THEAITÉTOS és barátja tehát e végtelen sok (egész számban kifejezhető területű) négyzetre keres összefoglaló nevet. (Közben hallgatólagosan magától értetődőnek tartják — THEAITÉTOS és barátja —, hogy e végtelen sok négyzet mindegyikének meglesz a kettő közül az egyik olyan tulajdonsága, amely két tulajdonságot THEODÓROS a 3-tól

17-ig terjedő négyzeteken illusztrált!) — Mellékesen megjegyzem még, hogy a görög szöveg alapján az első pillantásra az lehetne talán a benyomásunk, mintha THEAITÉTOS és társa *egy* ilyen összefoglaló nevet keresnének. A valóságban, természetesen, nem *egy*, hanem *két* ilyen nevet kell találniok — és fognak is találni —, mint ahogy THEODÓROS is a 3-tól 17-ig terjedő négyzeteknek *kétféle* tulajdonságát mutatta be.

Közbevetőleg fel kell azonban tennünk a kérdést: mi köze THEAITÉTOS egész elbeszélésének SÓKRATÉS eredeti kérdéséhez? Hogyan függ össze ez a „matematikai kitérés" a dialógus egészével? Vagy talán azoknak volna igazuk, akik azt állítják, hogy ennek az exkurzusnak alig van valami köze a dialógus igazi témájához, SÓKRATÉS ismeretelméleti kérdéséhez?[30] — Azt hiszem, ezt az utóbbi elméletet határozottan vissza kell utasítanunk. Az összefüggés nyilván a következő: SÓKRATÉSnek arra a kérdésére, hogy „mi a tudás?" — THEAITÉTOS *felsorolással* válaszolt; megpróbálta felsorolni mindazt, amit tudásnak tart. De SÓKRATÉS nem volt megelégedve a válasszal, a *felsorolás* helyett *összefoglaló jellemzést* kívánt. (Arra a kérdésre, hogy „mi a sár?" — szintén nem felelhetünk *felsorolással;* ebben az esetben is *összefoglaló jellemzésre* kell törekednünk.) — Nagyjából ugyanez történt THEODÓROS matematika-óráján is. THEODÓROS ugyanis egész számokban megadható területű négyzeteket mutatott be tanítványainak, 3-tól 17-ig — miközben felhívta figyelmüket e négyzetek egyik érdekes tulajdonságára (kommenzurábilis, illetőleg inkommenzurábilis négyzetoldalak). E négyzetek bemutatása alig volt több, mint puszta *felsorolás*. Mivel azonban THEODÓROS felsorolás közben utalt is a bemutatott négyzetek egyik tulajdonságára, a tanítványoknak — bizonyos számú példa után — a bemutatott négyzetek *összefoglaló jellemzésével* kellett dokumentálniok, hogy csakugyan megértették a mester tanítását.

Kétségtelen, hogy van PLATÓN szövegében egy olyan kitétel, amely az első pillantásra azt a gyanút ébresztheti bennünk, hátha mégis volt THEODÓROS tanítványaiban némi *önálló kezdeményezés:* „mi mármost arra gondoltunk, hogy *(ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε . . .)* stb." Mintha ezek a fiatalok mégiscsak *kiegészítették volna* bizonyos értelemben THEODÓROS tanítását a kétfajta négyzetoldalról — legalább annyiban, hogy találó neveket adtak e négyzetoldalaknak. De ha jobban meggondoljuk, be kell látnunk: THEODÓROS tanítása olyan szorosan összefügg azzal, ami a THEAITÉTOS által „megtalált" elnevezésekben jut kifejezésre, hogy a kyrénéi tanítómester nyilván előre, magától is tisztában lehetett azzal, amit jó pedagógus módjára tanítványaival fedeztetett fel.[31]

[30] Lásd föntebb a 15. jegyzetet.

[31] Jellemző egyébként, hogy maga TANNERY is érezte a „THEAITÉTOS felfedezéséről" szóló elméletének a gyengéjét. Erre mutatnak következő szavai: „le singulier, à nos yeux, est que cette généralisation (vagyis a platóni THEAITÉTOS állítólagos

THEAITÉTOS így folytatja beszámolóját:

„A számokat mind két csoportra osztottuk. Azokat, amelyek felfoghatók két egyenlő tényező szorzataként, a geometriai négyzetalakhoz hasonlítottuk és elneveztük őket *egyenlő oldalú és négyzetszámoknak*. . . Azokat a számokat viszont, amelyek az előbb említettek közé esnek — mint a 3, az 5, és általában mindazok a számok, amelyek nem bonthatók fel két egyenlő, hanem csak két egyenlőtlen tényező szorzatára —, ezeket a téglalaphoz hasonlítottuk és elneveztük őket *egyenlőtlen oldalú (oblongum) számoknak*."

A számoknak ezzel a két csoportra osztásával párhuzamos a hozzájuk rendelt négyzeteknek (illetőleg pontosabban: e négyzetek *oldalainak*) két csoportra osztása. Mint folytatólag olvassuk:

„Azokat a szakaszokat, amelyek az egyenlő oldalú négyzetszámoknak megfelelő négyzeteket határolják, a „*hosszúság*" (*μῆκος*) szóval jelöltük meg; azoknak a szakaszoknak viszont, amelyek az egyenlőtlen oldalú számoknak megfelelő négyzeteket határolják, a „*négyzet*" (*δύναμις*) nevet adtuk, minthogy ezek az utóbbi szakaszok hosszúságukat tekintve inkommenzurábilis mennyiségek ugyan, de mégis mérhető, kommenzurábilis mennyiségek ugyanezek a szakaszok azok szerint a *négyzetfelületek* szerint, amelyeket határolnak."[32]

Ezzel tulajdonképpen már le is zárhatnám a szöveg parafrázisát. (THEAITÉTOSnak az a kiegészítő megjegyzése, hogy ő és társa, az ifjabb SÓKRATÉS, hasonló elnevezéseket vezettek be a *testekkel* kapcsolatban is, számunkra e dolgozat szempontjából nem lényeges most.) Valójában csak egy pontban kell még jobban megvilágítanom az előbbi parafrázist.

Amint a fordításból látható: THEAITÉTOS a *δύναμις* szót egyfajta négyzet*oldal* megjelölésére is használja. Mert azoknak a négyzeteknek az oldalait, amelyek a 4, 9, 16, 25, 36, . . . négyzetlábnyi felületeket határolják, a *hosszúság* (*μῆκος*) szóval jelölték meg THEODÓROS tanítványai; a másikfajta négyzetek oldalai viszont — tehát pl. a 12 vagy 13 négyzetlábnyi négyzet oldala, vagyis azoknak a négyzeteknek az oldalai, amelyeknek területe egész számban kifejezhető ugyan, de ez az egész szám *nem négyzetszám* — az ilyen négyzetek oldalai a „*δύναμις*" elnevezést kapták. — Ezt a tényt a matematika történetírói eddig a következő-

---

műve), *qui n'offrait aucune difficulté sérieuse, n'ait pas été faite par* THÉODORE *de Cyrène, que celui ci se soit borné á montrer, sur un grand nombre de cas particuliers, comment se traitait la question de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité d'une racine* etc." (Mém. Scient. II. 96).

[32] Nyomatékosan hangsúlyoznom kell, hogy e fordítás, tartalmát tekintve, *kínosan pontos*. Egy hajszállal sem mond többet vagy kevesebbet, mint PLATÓN szövege. De fordításom *mégsem szó szerinti*. A szó szerinti fordításból ugyanis — ebben az adott esetben — a mai olvasó egyszerűen semmit sem érthetett volna meg.

képpen értékelték: íme, a konkrét bizonyíték arra, hogy a *δύναμις* szó, mint matematikai terminus, „négyzet*oldalt*" is jelenthet![33] — Végtelen sajnálatomra a leghatározottabban el kell utasítanom ezt az elhamarkodott következtetést. Ha jobban megnézzük a görög szöveget, mindjárt belátjuk majd, hogy a *δύναμις* szó ebben az esetben sem „négyzet*oldalt*", hanem — minden kétséget kizáróan — „*négyzet*"-et jelent. (Hangsúlyoznom kell itt azt is, hogy a szöveg pontos megértéséhez való ragaszkodás távolról sem „filológus szőrszálhasogatás" részemről. Hiszen látni fogjuk majd, hogy többek között éppen a szónak felületes, csak nagyjából való megértése volt az egyik oka annak is, hogy azok a kiváló matematikusok és történészek, akik már többször foglalkoztak ugyanezzel a platóni szövegrésszel, nem érthették meg a görög matematika *δύναμις* fogalmát!)

Mindenekelőtt döntsük el a következő kérdést: vajon miért jelöli Theaitétos és társa az egyik fajta négyzetek (4, 9, 16, 25,...) oldalait a *hosszúság* (*μῆκος*) szóval? — Nyilván azért, mert ezek a négyzetoldalak (2, 3, 4, 5,...) hosszúságuk szerint is (*μήκει*) mérhetők a hosszúság egységével. Helyesen jegyezték meg a történészek, hogy az itt használt theatétoszi megjelölés (*μῆκος*) nyilván ugyanaz, mint az euklidészi „Elemek" X. könyvének közismert terminusa: *μήκει σύμμετρος* = „mérhető a hosszúság egységével" (lineárisan kommenzurábilis).[34] Valóban, a theaitétoszi név — *μῆκος* = „*hosszúság*" — egyszerűen csak rövidített formája az idézett euklidészi terminusnak. — De hiszen akkor ugyanez a megállapítás érvényes kell hogy legyen a Theaitétos és társa által használt másik megjelölésre is! A másikfajta négyzetek oldalai nyilván azért kapják a „*négyzet*" = *δύναμις* elnevezést, mert ezek a négyzetoldalak nem mérhetőek ugyan a hosszúság egységével, de mérhetőek ebben az esetben nem maguk a szakaszok, hanem az általuk határolt *négyzetek* (a „dynamis"-ok és nem a „mékos"-ok) a területmérés egységével. Theaitétos megjelölése ezúttal sem lehet más, mint rövidített formája ennek a másik terminusnak: *δυνάμει σύμμετρος* = „*mérhető (kommenzurábilis) aszerint a négyzet szerint, amelyet határol, illetőleg: amelyet reá emelünk*". Csakugyan, az éppen rekonstruált matematikai terminust megtaláljuk — ugyanúgy mint az előbbit — az „Elemek" X. könyvében; pl. a 2. definíció ebben a könyvben így kezdődik: *εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν κτλ.* = „*Négyzetesen összemérhetők az egyenes szakaszok akkor, ha* stb."[35]

[33] Th. L. Heath, A History ... I 209 n 2: „... the *δύναμις* of Theaetetus's definition is undoubtedly *the square root of a non-square number, a surd*". — Ugyanebben az értelemben ír B. L. v. d. Waerden is (o. c. 234).

[34] Vö. B. L. v. d. Waerden, o. c. 234.

[35] Helyesen fordítja C. Thaer (Die Elemente von Euklid, I—V. Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften, Leipzig 1933—1937) az idézett görög kifejezést németül a „*quadriert kommensurabel*" terminussal.

Azt hiszem, a bemutatott gondolatmenet bárkit meggyőzhet arról, hogy a δύναμις szó, mint matematikai terminus, a „Theaitétos" c. diálógus megvizsgált részében is egyértelműen „*négyzet*"-et jelent.

III.

Miután az eddigiek többé-kevésbé meggyőzhették már az olvasót arról, hogy a δύναμις kifejezés, mint matematikai terminus, úgy látszik, csakugyan mindig „*négyzet*"-et jelentett, vizsgáljuk meg most azt a másik kérdést: vajon mi lehetett az oka annak, hogy a görög matematikusok bevezették, illetőleg: *megteremtették* ezt a különös szakkifejezést? Hiszen van a görög matematikának világos, mindenki számára azonnal érthető szava, terminus technicusa a „négyzet" megnevezésére; ez a másik közönséges, jólismert terminus a τετράγωνον szó. E mellett a gyakran használt geometriai kifejezés mellett — τετράγωνον — a δύναμις megjelölés, amely sokkal ritkábban és — talán — *csak bizonyos esetekben* (?) használatos „négyzet" jelentésben, akárhogy is vesszük, kissé meglepő, sőt *érthetetlen* valami. Hogyan lehetséges, hogy ugyanaz a szó, amely a köznapi beszédben „*erő*, *hatalom*, *képesség*" jelentésben volt ismeretes, mint matematikai szakkifejezés, a „*négyzet*" neve lett? — Tudomásom szerint erre a kérdésre a történeti kutatás eddig még nem adott elfogadható választ. Bár többször megkísérelték már, hogy megvilágítsák a δύναμις terminus eredetét, azt hiszem, e korábbi kísérleteket nem vehetjük komolyan. Az alábbiakban — mielőtt bemutatnám a probléma megoldását — inkább csak kuriózumként regisztrálok néhány régebbi magyarázó kísérletet.

A legrégibb általam ismert magyarázó kísérlet P. TANNERYnek abban a már föntebb is említett dolgozatában[36] olvasható, amelyben a szerző először korrigálta régebbi tévedését, ti. azt a feltevést, hogy a δύναμις szó a platóni „Theaitétos" c. dialógusban a „négyze*tgyököt*" jelentené. Ugyanebben a cikkében TANNERY emlékeztet arra, hogy nemcsak a δύναμις főnév volt a görögöknél matematikai terminus, hanem ugyanígy a δύνασθαι ige és a δυναμένη participium is. Bár a megfigyelés helyes, sőt — mint később látni fogjuk — csakugyan ebből a tényből kell a magyarázatnak is kiindulnia, mégis: az a következtetés, ill. „magyarázat", amelyet TANNERY megfigyeléséhez fűz, számomra annyira érthetetlen, hogy nem is vállalkozhatom szavainak magyar nyelven való tolmácsolására. TANNERY ugyanis szó szerint a következőket írja:

„Soit un carré dont l'aire soit déterminée, de *trois pieds* par exemple, le côté de ce carré est, dans la langue mathématique classique, la

[36] Lásd föntebb a 18. jegyzetet.

δυναμένη (la ligne qui peut) cette aire de trois pieds. *Pouvoir une aire* (*δύνασθαί τι χωρίον*) c'est, de même, pour une ligne droite limitée, être telle que le carré construit sur elle ait précisément cette aire."[37]

Kétségtelenül igaza volt ugyan TANNERYnek akkor, amikor azt állította, hogy valamely meghatározott területű négyzetnek az oldalát görögül a *δυναμένη* szóval jelölhették. Nagy egészében jól körvonalazta a *δύνασθαί τι χωρίον* görög kifejezés matematikai jelentését is. — De mégis van az előbbi francia idézetben két olyan kitétel, amelyet egyszerűen nem értek; mert sejtelmem sincs róla, mit jelent franciául: „*la ligne qui peut*" és „*pouvoir une aire*"? — Lehet azonban, hogy a kiváló matematikus és történész, B. L. v. d. WAERDEN, egy alkalommal éppen az én számomra érthetetlen francia szavakat tolmácsolta németül. Ő ugyanis már többször idézett könyvének egyik helyén[38] éppen TANNERY szóban forgó cikkére hívatkozik, miközben a görög *δυναμένη* kifejezést a német „*Erzeugende*" főnévvel fordítja és ennek megfelelően a *δύναμις*-t mint „*erzeugende Kraft*"-ot írja körül. (Lehetségesnek tartom tehát, hogy a német „*Erzeugende*" a francia „*la ligne qui peut*" kifejezés fordítása!) — Bár e magyarázat németül is elhibázott, de talán érthető — legalábbis némi fejtörés után. Miért lehet ugyanis a görög *δυναμένη*-t a német „*Erzeugende*" szóval fordítani? — Az, aki ezt a fordítást megkockáztatta, feltehetően így gondolkozott: ha igaz az, hogy *δύναμις* = „*potentia*", akkor a participium *δυναμένη* csak „*potens*" (femininum) lehet. A „*potens*" pedig — mint mindenki tudja — ellentéte az „*impotens*"-nek. Ezért lesz *δυναμένη* = „*Erzeugende*", és *δύναμις* = „*erzeugende Kraft*". — Kár, hogy ezzel a magyarázattal szemben a következő két súlyos kifogást kell bejelentenem: Egyrészt nem értem: mi köze a „*nemző erő*"-nek a „*négyzet*"-hez? Hogyan lehet *δύναμις* egyszerre „*erzeugende Kraft*" és „*négyzet*"? Hogyan tud valamely egyenes szakasz „*négyzetet nemzeni*", azaz: hogyan lehet *δυναμένη* egyszerre „*die Erzeugende*" és „*négyzetoldal*"? — Másrészt viszont biztosan tudom, hogy a görög *δύνασθαι*, *δυναμένη* és *δύναμις* szavak a klasszikus korban soha ilyesmit — „*erzeugen*", „*die Erzeugende*" és „*die erzeugende Kraft*" — *nem* jelentettek. Az, aki ebbe a gondolatkörbe tévedt, nem a görög terminusokból indult ki, hanem a latin *potens* és *potentia* szavak *nem-matematikai értelmét* vetítette vissza tévesen a görög matematika kifejezéseibe.

De volt TANNERYnek egy másik kísérlete is a matematikai *δύναμις* megmagyarázására. Ennek az utóbbinak legfőbb hibáját a *következetlenségben* látom. — Említettem föntebb, hogy TANNERY 1884 óta mindenesetre tudta már: a matematikai *δύναμις* terminus *nem jelenthet* „négyzet-

[37] Mém. Scient. II. 93.
[38] B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 234.

gyököt".[39] Mégis egyik későbbi, 1902-ben publikált dolgozata[40] tulajdonképpen azt magyarázná meg: miért hívhatták (?) görögül a „négyzetgyököt" δύναμις-nak. TANNERY ezt a másik magyarázatát tudomásom szerint sohasem fejtette ki részletesen, inkább csak célzott rá alkalomadtán, ugyanúgy mint az előbbire. (Ezért kell majd szövegét újra franciául idéznem!) Hogy érthető legyen a gondolatmenet, emlékeztetnem kell arra: a cikk valójában arról szól: hogyan számították ki a görögök valamely nem-négyzetszámnak a közelítő négyzetgyökét. Ennek a módszernek a leírásában olvassuk a következő szavakat:[41]

„... en exprimant de plus en plus près la valeur de cette moyenne, si l'on ne peut la construire que géométriquement, si elle n'existe pas qu'en *puissance*, non en *acte*, pour employer le langage des Grecs."

Bennünket ebből az idézetből most csak a két kiemelt szó érdekel. Mint a francia szövegből kiderül: TANNERY azt hitte, hogy e két szó használatával sikerül felvillantania a speciálisan „görög észjárást". Fordítsuk hát vissza e két szót görögre, s mindjárt világosabban megértjük majd TANNERY gondolatmenetét — amelynek egyébként a „görög észjáráshoz" ezúttal édes-kevés köze volt. A francia *puissance* görög eredetije: *δύναμις*, az *acte* pedig görögül: *ἐνέργεια* vagy *ἐντελέχεια*. TANNERY e két fogalmat ARISTOTELÉS nyomán állítja szembe egymással és nyilván azt hiszi: a görögök azért nevezték *δύναμις*-nak az irracionális négyzetgyököt (pl. a $\sqrt{2}$-öt vagy a $\sqrt{3}$-at), mert az ilyen szám csak mint „lehetőség" (*δύναμις*) és nem mint „megvalósulás" (*ἐντελέχεια*) létezik, mert ezt csak megközelíteni tudjuk, de teljes egészében mindig elérhetetlen marad. (Legfeljebb geometriailag lehet még megkonstruálni — mondja tovább TANNERY.) — Szinte fölösleges volna részleteiben is cáfolnom ezt az elgondolást, hiszen ennek már a kiindulása is téves. Mert mielőtt megmagyaráznánk, hogy miért nevezték a görögök *δύναμις*-nak a „négyzetgyököt", *előbb ismernünk kellene legalább egy olyan antik szöveghelyet, amelyik azt mutatná, hogy csakugyan volt ilyen jelentése a görög δύναμις szónak.* Én ilyen antik szöveghelyet nem ismerek. Az a „Theaitétos"-részlet pedig, amelyre ezzel kapcsolatban hivatkozni szoktak, mint az előbbi fejezetben kimutattam: *nem bizonyíték a feltételezett szójelentésre.* — De elhibázott TANNERYnek ez a másik magyarázó kísérlete még egy további okból is. TANNERY ugyanis a matematikai szóhasználatot az arisztotelészi ellentétpárral (*δύναμις* ~ *ἐντελέχεια*) akarná megmagyarázni, és nem veszi észre azt — amit e dolgozat elolvasása után talán magától is megállapíthat majd az olvasó —, hogy éppen megfordítva: az előbbi arisztotelészi ellentétpár csak akkor

[39] Lásd föntebb a 18. jegyzetet.
[40] Lásd föntebb a 22. jegyzetet.
[41] Mém. Scient. III. 82.

lesz igazán érthető, ha teljes egészében értjük már a matematika *δύναμις* fogalmát.[42]

Természetesen nyomot hagyott a későbbi tudománytörténeti irodalomban P. TANNERYnek ez az utóbbi téves magyarázó kísérlete is. Ezért írhatta pl. TH. L. HEATH egy alkalommal szó szerint a következőket: "In geometrical language it is the dative singular *δυνάμει* which is mostly used; thus a straight line is said to be *potentially equal, δυνάμει ἴσα* to a certain rectangle where the meaning is that *the square on the straight line is equal* to a rectangle etc."[43] Angolul kellett idéznem e szavakat, hogy az olvasó is azonnal meggyőződhessék róla: a "*potentially equal*" kifejezésnek — amelyet egyébként a szerző, HEATH maga emelt ki — az idézett kontextusban *nyilván semmi elfogadható értelme sincs!* Valóban, a „*potentially*" szó az adott esetben csak arra jó, hogy elárulja: HEATH is átvette TANNERY előbb említett konfúzus elméletét[44] a matematikai *δύναμις* összefüggéséről az arisztotelészi *δύναμις—ἐντελέχεια* ellentétpárral. (Csak mellékesen említem meg: ha kihagyjuk a két értelmetlen szót ["*potentially equal*"] az előbbi angol idézetből, HEATH leírása hibátlan megállapítás!)

*

A matematikai *δύναμις* terminus eredetének helyes magyarázata — véleményem szerint — a következő:

Mindenekelőtt nem a *δύναμις* főnévnek, hanem a *δύνασθαι* igének matematikai használatából kell kiindulnunk. Mert, ha sikerül megértenünk ennek az igének a jelentésfejlődését, egyszerre, világos lesz előttünk a vele párhuzamos főnévnek a jelentésfejlődése is. Azokat a legfontosabb antik szöveghelyeket viszont, amelyekből a keresett jelentésfejlődés kiolvasható, megtaláljuk készen, összegyűjtve a következő három kézikönyvben:

F. RUDIO: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig 1907 (Index s. v.).

[42] Nem térek ki ebben a dolgozatban az említett arisztotelészi ellentétpárnak a megmagyarázására, mert ez már nem matematika-, hanem filozófia-történeti és filológiai kérdés. Csak mellékesen jegyzem meg — annak a föltételezett érdeklődő olvasónak a kedvéért, aki az egész dolgozat áttanulmányozása *után* esetleg visszalapoz majd erre jegyzetre: Véleményem szerint az arisztotelészi ellentétpárban a „dynamis" szó jelentése a következőképpen fejlődött: „dynamis" = „négyzetérték" → → „négyzet*lehetőség*" (tehát nem valóságos, hanem csak *lehetséges* négyzet, amelynek értékét pontosan kiszámíthatjuk) stb.

[43] „Archimedes" p. CLXI.

[44] Szeretném legalább e jegyzetben félreérthetetlenül leszögezni: bármennyire gyakran és bármilyen keményen kritizálom is P. TANNERYt, tisztában vagyok *rendkívüli érdemeivel.* Tudom azt is, hogy különösen az antik tudománytörténet ma is — csaknem 60 évvel TANNERY halála után — még mindig az általa elhullatott morzsákból éldegél.

TH. L. HEATH: „Archimedes" p. CLXI,

és

TH. L. HEATH: A History of Greek Mathematics (Index s. v.).

F. RUDIO pl. így magyarázza az említett ige matematikai jelentését: „In der mathematischen Sprache bedeutet *δύνασθαι gelten, wert sein, ausmachen, betragen,* und geiment ist wieder: *im Quadrate*". Nem kellett egyebet tennem, mint hogy kiemeljem e szómagyarázatból a lényeget: „im Quadrate wert sein" = „négyzetben érni valamennyit". Ugyanígy olvassuk HEATHnél is: „*δύνασθαι,* to be equivalent *in square* to . . . etc."

Az említett három kézikönyv több antik szöveghelyet sorol fel az előbbi szómagyarázatra. A példák közül csak a következő stilisztikai fordulatra kell nyomatékosan felhívnom a figyelmet: *ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ* . . . TH. L. HEATH ezt a stilisztikai fordulatot „Archimedes" c. könyvében a következő szavakkal magyarázza: „The verb *δύνασθαι* (with or without *ἴσον*) has the sense of being *δυνάμει ἴσα,* and, when *δύνασθαι* is used alone, it is followed by the accusative: thus *the square (on a straight line) is equal to the rectangle contained by*. . . is: *(εὐθεῖα) ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ*. . ."

Úgy látszik, TH. L. HEATH magyarázata pontosan írja le a tényeket. A *δύναθαι* igét akkor használják, amikor azt akarják kifejezni, hogy „valamely egyenes szakasz *(εὐθεῖα)*, ha négyzetet emelünk reá, *ugyanannyit ér (ἴσον δύναται)*, mint valamely *téglalap (τῷ περιεχομένῳ...)*". Eszerint tehát a *δύνασθαι* ige matematikai jelentése: *„négyzetben ugyanannyit érni, mint valamely téglalap*".

A következőkben egyelőre elfogadjuk munkahipotézisként azt az állítást, hogy a *δύναμις* szó éppen az előbbi stilisztikai fordulatból kiindulva lett matematikai terminus technicus-szá: *„négyzetben annyit érni, mint valamely téglalap*". (A következő fejezetben igyekszem majd azt is megvilágítani: hogyan függött össze a matematika fejlődésével ennek a stilisztikai fordulatnak a felbukkanása?) További kérdésünk pedig így hangzik: milyen konkrét tárgyi összefüggésben használhatták ezt a stilisztikai fordulatot? — A keresett konkrét tárgyi összefüggés nyilván csak ez lehetett: valamely téglalapot átalakították vele egyenlő területű négyzetté, és a megtalált négyzet oldaláról azt mondták, hogy ez a szakasz „négyzetben ugyanannyit ér" *(ἴσον δύναται)*, mint az előbbi téglalap. — De hogyan tett szert a *δύνασθαι* ige, amely a mindennapi nyelvben annyit jelentett, mint *„erősnek lenni, képesnek lenni valamire*", erre a különös geometriai jelentésre: *„négyzetben ugyanannyit érni, mint*. . ."? Vagy volt talán egy olyan szféra, amelyen belül ennek az igének a jelentése már nagyon közel állt az éppen most tárgyalt geometriai jelentéshez?

Azt hiszem, a *δύνασθαι* ige matematikai jelentésfejlődése e szónak olyan köznapi jelentéseiből indult ki, amelyekre az alábbiakban emlékeztetek.

XENOPHONnál egy alkalommal a következő görög mondatot olvassuk[45] *ὁ σίγλος δύναται ἕπτα ὀβολοὺς καί ἡμιωβέλιον Ἀττικούς* = „a: *σίγλος* (egy ázsiai pénznem, ugyanaz mint a héber *sékel*) hét és fél attikai oboloszt *ér*". Pontosan ugyanezt a szójelentést találjuk DÉMOSTHENÉS következő mondatában is:[46] a *ὁ κυζικηνὸς ἐδύνατο ἐκεῖ κη' δραχμάς* = „a kyzikoszi sztatér ott 28 drachmát *ért*". — Hasonlóképpen sorolhatnánk föl még számos példát ugyanerre a szójelentésre a klasszikus ókor mindennapi nyelvéből. De megállapíthatjuk már e két legutóbbi idézet alapján is: a *δύνασθαι* igét a görög pénzügyi nyelvben az *érték* kifejezésére használták. (Csak mellékesen említem meg, hogy kimutatható hasonló jelentésfejlődés a latin *valeo*, „erősnek lenni", ige esetében is; hiszen ebből az utóbbiból származik a közismert *valuta* szó.)

Természetesen volt a görögök pénzügyi nyelvében nemcsak a *δύνασθαι* igének, hanem a vele párhuzamos *δύναμις* főnévnek is az előbbihez hasonló speciális jelentése. PLUTARCHOSnál pl. azt olvassuk LYKURGOSról:[47] *δύναμιν ὀλίγην τῷ νομίσματι ἔδωκε* = „a pénznek kevés *értéket* engedélyezett". — Ugyanakkor ez a szójelentés nem is korlátozódott csak a pénzügyi nyelvre. Már HÉRODOTOS ugyanebben az értelemben használja a *δύνασθαι* igét, amikor ezt mondja:[48] *τριηκόσιαι ἀνδρῶν γενεαὶ δυνέαται μύρια ἔτη* = „300 emberöltő 10 000 évet *ér*". Nyilván ebben az esetben is olyan kifejezéssel van dolgunk, amelyet a pénzügyi nyelvből kölcsönöztek: ugyanúgy számították át az emberöltőket évekre, mint ahogy az egyik valutát átszámítják a másikra.

Magyarázatom szerint a görög geometerek a *δύνασθαι* ige speciális jelentését a *pénzügyi nyelvből* vették át. Amiképpen ezt az igét használták általában az *érték* megjelölésére akkor, amikor az egyik pénznemet átszámították valamely más pénznemre, ugyanúgy a *δύνασθαι* igét használták a geometerek is akkor, amikor valamely téglalap területét számították át a vele egyenlő területű négyzetére. Ezért lett a matematikában a *δύνασθαι* ige jelentése: „*négyzetben ugyanannyit érni mint valamely téglalap*".

Tulajdonképpen csak egyetlenegy lényeges különbségre kell még felhívnom a figyelmet ezzel a szómagyarázattal kapcsolatban. — Amint az előbbi példákból is láthatjuk: a *δύνασθαι* és *δύναμις* kifejezések a görög pénzügyi nyelvben *csak általában* jelölték az „érték"-et — anél-

[45] Anab. I. 5, 6.
[46] Dem. 34, 24.
[47] Plut., Lyc. 9; vö. Solon 15.
[48] Her. II. 142.

kül, hogy egyszersmind azt is kifejezték volna, *melyik pénznemben kifejezett értékről van szó.* Ezzel szemben ugyanez a két szó a matematika nyelvén mindig ugyanazt a pontosan megjelölt értéket, a „*négyzet*-értéket" jelenti. Mi lehet mármost az oka annak, hogy a szójelentés a matematikán belül így tovább specializálódott? — Azt hiszem, a magyarázat kézenfekvő. Nem specializálódhatott a vizsgált kifejezés jelentése a pénzügyi nyelvben, egyszerűen azért nem, mert a görög társadalmi és gazdasági élet fejlettségi fokán *nem volt még olyan egységes valuta,* amelyre a különféle pénznemeket mindig átszámították volna; illetőleg: az a valuta, amelyre a különböző pénznemeket átszámították, városonként, gazdasági egységenként mindig más és más volt. Ezért a *δύνασθαι* szó az ilyen átszámításoknál *csak általában az értéket jelölhette,* de mindig külön meg kellett mondani az ilyen esetekben azt is: milyen pénznemben kifejezett értékről van szó. — A geometriában viszont a területet — úgy látszik — mindig négyzetértékre számították át, azaz pontosabban: *igyekeztek minden egyenes és görbe vonalú idomot átalakítani vele egyenlő területű négyzetté.* Minthogy pedig az egyes felületeknek (téglalap, sokszög, kör stb.) mindig csak a „négyzetérték"-ére voltak kíváncsiak, a mellé a szó mellé, amely az átszámított terület „érték"-ét jelölte, nem kellett már külön kitenniök azt is, hogy ez az „érték", *négyzetben* értendő. Így specializálódhatott a területszámítással kapcsolatban az a kifejezés, amely különben csak „érték"-et jelentett, a matematika nyelvén a „*négyzetérték*" (*δύναμις*) jelentésre.

Összefoglalva az előbbi szómagyarázatot, megállapíthatjuk, hogy a matematikai *δύναμις* terminus pontos jelentése tulajdonképpen nem is „négyzet", hanem: „*négyzetérték*". Minthogy pedig a négyzet területét úgy számítjuk ki, hogy oldalát szorozzuk önmagával, a „dynamis" terminus idővel az „*önmagával való szorzás*" értelem felé közeledhetett. Így alakulhatott ki *később* a görög matematika „dynamis" fogalmából a mi *potencia* fogalmunk. — Láttuk már egy korábbi fejezetben, hogy akkor, amikor a görög „dynamis" terminust a latin „potentia" szóval fordították, igazában kibővítették az eredeti fogalmat, mert a „potentia" a későbbi szóhasználat szerint már nemcsak „*négyzet*"-et (= „*második hatvány*"-t), hanem magasabb hatványt is jelölhet. Kiegészíthetjük ezt a régebbi megállapításunkat most azzal: a „dynamis" terminusnak a latin „potentia" szóval való fordítása nemcsak az eredeti fogalom kibővítésével, hanem egyszersmind a régi görög szójelentés félreértésével is járt. Hiszen a görög *δύναμις* a matematika használatában nem „hatalmat", hanem „*négyzetérték*"-et jelentett. Az a valaki viszont, aki a görög matematika *δύναμις*-át először tolmácsolta a latin „potentia"-val, nem ismerte már a szónak ezt a speciális matematikai értelmét, ő a *δύναμις* szónak már csak a köznapi jelentésére gondolt. Ezért lett a *δύναμις* latinul „*potentia*".

Lezárván a szómagyarázatot, megjegyezhetjük még, hogy az itt vázolt történeti fejlődés pontos és megnyugtató magyarázatot ad arra a *δυναμένη* terminusra is, amelyet P. TANNERY franciául a „*ligne qui peut*" kifejezéssel, B. L. v. d. WAERDEN pedig németül az „*Erzeugende*" szóval próbált tolmácsolni. Minthogy a *δύνασθαι* matematikai kifejezés pontos értelme: „*négyzetben ugyanannyit érni mint valamely téglalap*", a *δύναμις* pedig: „*négyzetérték*", a *δυναμένη* nem lehet más, mint „*a keresett négyzetértéket megadó szakasz*". Csakugyan EUKLIDÉS „Elemei" X. könyvének 4. definíciójában szószerint ezt olvassuk: *αἱ δυναμέναι..., εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραὶ, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.* Fordítás helyett ezúttal inkább pontosan tolmácsolom az idézett görög szavak értelmét: „*a δυναμένη-k. . ., ha négyzetekről van szó, maguk az oldalak, ha pedig más egyenes vonalú idomokról beszélünk, a velük egyenlő területű négyzeteket megadó szakaszok*".

IV.

Az előbbi fejezetben a „dynamis" terminus történeti magyarázata abból a munka-hipotézisből indult ki, hogy az *eredeti* stilisztikai fordulatban — amelyből levezethető a terminus fejlődése — a *δύνασθαι* ige jelentése így hangzott: „*négyzetben ugyanannyit érni, mint valamely téglalap*". Csakugyan, számos példát idézhetnénk arra, hogy ezt a stilisztikai fordulatot — pontosan ebben a jelentésben — később is gyakran használták a görög matematikusok. De egyelőre továbbra is csak munkahipotézis még az a feltevésem, hogy éppen ez a fordulat volt az *eredeti.* Bár véleményem szerint a bemutatott szómagyarázat önmagában is meggyőző lehet, mégis azt hiszem: a matematikus-olvasó kívánatosnak fogja tartani annak a kimutatását is, hogy az idézett stilisztikai fordulat a tudomány fejlődésének egy bizonyos szakaszában valóban annyira fontos és gyakran alkalmazott műveletet írt körül, hogy joggal feltehető: ebből a műveletből indult ki a vázolt szófejlődés. Ez más szóval azt jelenti: meg kell világítanom még azt is, miért volt a görög matematikában a téglalapnak négyzetté való átalakítása olyan fontos művelet, hogy ezzel kapcsolatban kialakult a „*négyzetérték*" fogalma? — Mielőtt rátérnék a feltett kérdés tárgyalására, a teljesség kedvéért közbevetőleg két példán bemutatom a *δύνασθαι* terminus olyan matematikai használatát, amely magyarázatom szerint már nem az eredeti, hanem a *későbbi szóhasználatot* illusztrálja.

Első példám az ún. Pythagoras-tételnek ATHÉNAIOSnál olvasható megfogalmazása.[49] Ez görögül így hangzik: *τριγώνου ὀρθογωνίου ἡ*

[49] Ath. X. 418 sk.

τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις, azaz: „a derékszögű háromszög átfogója *négyzetben ugyanannyit ér* (ἴσον δύναται), mint a két befogó ⟨négyzetben!⟩". Mint látjuk, itt már nincs szó területátalakításról, hanem két négyzetnek — a befogók négyzeteinek — az összegezéséről. De a δύνασθαι ige akkor, amikor így is megfogalmazhatták a Pythagoras-tételt, már annyira közismert volt a *„négyzetben ugyanannyit érni, mint...*" jelentésben, hogy minden további nélkül használhatták ezt ebben az esetben is. Hogy ebből a viszonylag *késői* szóhasználatból mennyire nem derül már ki a szó régebbi jelentése, azt láthatjuk abból is, ahogyan a szótárak — éppen az idézett Athénaios-helyre hívatkozva — próbálják megállapítani a δύνασθαι jelentését: *ein Quadrat ergeben*". Az a szótáríró,[50] aki így határozta meg a szójelentést, nyilván ismerte a Pythagoras-tételt és innen tudta, hogy a kérdéses szónak ezen a helyen ezt *kell* jelenteníe, de ugyanakkor fogalma sem volt a jelentésfejlődésről.

Másik példám a δύνασθαι igének *későbbi eredetű* matematikai használatára SIMPLICIUSnak a chioszi HIPPOKRATÉS quadraturáiról szóló beszámolójában olvasható.[51] Itt ugyanis egy alkalommal ezt olvassuk: *ἡ διάμετρος τετράπλασιον δύναται τῆς τοῦ ἑξαγωνίου (πλευρᾶς).* Ennek a görög mondatnak grammatikailag pontos (szó szerinti) fordításából a matematikus-olvasó legfeljebb csak sejthetné a valóságos értelmet; mert ez a fordítás így hangzanék: „az átmérő a *négyszeresét éri négyzetben (τετράπλασιον δύναται)* a hatszög oldalának". De ebből a fordításból valóban már csak értelem szerint következik az, hogy a hatszög oldalát is „négyzetben" kell értenünk, azaz arra a másik négyzetre kell gondolnunk, amely a hatszög oldalára emelhető, valamint hogy a kör átmérőjéről és az *ugyanabba a körbe írt* szabályos hatszög oldaláról van szó, vagyis hogy az idézett görög szavak a mi matematikánk nyelvén tulajdonképpen csak ezt jelentik: $(2r)^2 = 4r^2$. — Ez az utóbbi példa is azt mutatja tehát, hogy a δύνασθαι igét matematikai értelemben *később* — ez a „később" pedig már a chioszi HIPPOKRATÉS kora, az i. e. 5 század második fele is lehet! — nemcsak a téglalapnak négyzetté való átalakításakor, hanem bármilyen „négyzetérték"-ben való számolásnál is használhatták.

Dehát hol van nyoma annak, hogy az EUKLIDÉS *előtti* görög matematikában a négyzetté való átalakítás, az ún. „négyzetérték" meghatározása csakugyan olyan fontos művelet volt, mint amilyennek azt az előbb feltettem? Hiszen erre eddig csak egyetlenegy nyelvi formulából, abból a stilisztikai fordulatból következtettem, amelyből sikerült levezetnem a δύναμις terminus plauzibilis történeti magyarázatát.

[50] Pl. PAPE, Griechisch—Deutsches Wörterbuch. Erster Band, Braunschweig 1849, 577 lap.

[51] F. RUDIO, op. cit. 70, 15.

A négyzetté való átalakítás, azaz a „négyzetérték" megállapítása — véleményem szerint — olyan geometriai művelet, amelyet részletesen tárgyal EUKLIDÉS is. Legfeljebb csak arról lehet szó, hogy erre eddig sem a történeti sem a kommentár irodalom nem figyelt föl még eléggé. Emlékeztetek itt EUKLIDÉS „Elemei" II. könyvének 14. tételére. Ez a tétel ugyanis azt a feladatot tűzi ki:

„Szerkesszünk valamely adott egyenes vonalú idommal egyenlő területű négyzetet."

Amint látjuk, ez a tétel éppen azt a négyzetté való átalakítást tárgyalja, amelynek célja előbbi magyarázatom szerint a „négyzetérték" megállapítása volt. Kitűnik a tétel euklideszi tárgyalásából az is, hogy azt a „tetszőleges egyenes vonalúi domot", amellyel egyenlő területű négyzetet kell szerkeszteni, előbb *téglalappá* alakították át, és csak *azután keresték azt a négyzetet, amely egyenlő területű a talált téglalappal.* Az a művelet tehát, amelyet az előbbi fejezetben egy stilisztikai fordulatból kiindulva rekonstruáltam, ismeretes magából EUKLIDÉSből is.

Még tovább vezet bennünket — történeti szempontból — a következő megfigyelés.

Tagadhatatlan, hogy az imént említett euklideszi tétel (Elemek II. 14), amelyet a tudománytörténeti irodalom eddig egyszerűen csak mint „területátalakítási problémát" tartott számon,[52] igazában az egyenes vonalú idomoknak négyzetté való átalakítását tárgyalja. A „négyzetté való átalakítás" neve görögül: *τετραγωνισμός*, latinul pedig: *quadratura*. Közismert, hogy milyen nagy szerepet játszott a korai görög tudományban a *quadratura*, közelebbről pedig: *a kör quadraturája*[53]. Feltehető, hogy ez a probléma még a chioszi HIPPOKRATÉSt *megelőző* időkből származik. Hiszen HIPPOKRATÉS már sikerrel oldja meg, ha nem is éppen a kör, hanem a holdacskák quadraturáját. De vajon elképzelhető-e történeti szempontból, hogy a görögök mindjárt kezdetben a megoldhatatlan problémát, a kör quadraturáját fedezték volna fel és ezen kezdték volna törni a fejüket? Nem sokkal valószínűbb-e, hogy mielőtt egyáltalán fölmerült volna a kör quadrálhatóságának vagy quadrálhatatlanságának a kérdése, jól kellett már ismerniök az egyenes vonalú idomok quadrálhatóságának problémakörét?

Azt hiszem, előbbi kérdésemből önként adódik egy nagyon valószínű kronológiai következtetés. EUKLIDÉS „Elemei" II. könyvének 14. tétele, amely az egyenes vonalú idomoknak téglalappá, illetőleg ezen keresztül négyzetté való átalakítását, quadraturáját tárgyalja — valamint mindazok az euklideszi tételek, amelyek éppen ezt készítik elő —, fel-

[52] TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... I 410.
[53] B. L. v. d. WAERDEN, o. c. 214 sk.

tehetően még az i. e. 5. század első felében, mindenesetre még a chioszi HIPPOKRATÉS korát megelőző időben keletkezhettek. De ugyanebben az időben kellett hogy kialakuljon már a „négyzetérték", a δύναμις fogalma is.

V.

A „négyzetérték" *(δύναμις)* fogalmának történeti vizsgálata elvezetett bennünket az egyenes vonalú idomok quadraturájának problémájához, amelyet az euklideszi „Elemek" II. könyvének 14. tétele tárgyal. Még tovább jutunk a δύναμις fogalom eredetének megértésében akkor, ha figyelembe vesszük azokat a tényeket is, amelyeket sikerült megállapítania már a régebbi történeti kutatásnak az említett euklidészi tétellel kapcsolatban. Ezért ezt az új fejezetet azzal kezdem, hogy összefoglalom az „Elemek" II. könyvének 14. tételére vonatkozó eddigi történeti ismereteinket.

A II. 14. tétel a kitűzött feladatot — valamely egyenes vonalú idom átalakítását vele egyenlő területű négyzetté — két lépésben oldja meg. Előbb átalakítjuk az adott egyenes vonalú idomot téglalappá, majd pedig a kapott téglalapot vele egyenlő területű négyzetté. A téglalapnak négyzetté való átalakításakor EUKLIDÉS egy olyan konstrukciót alkalmaz, amellyel nemcsak itt (II. 14) találkozunk az „Elemek"-ben, hanem később még egyszer, egy másik helyen is (VI. 13), amikor ti. két adott szakasznak a geometriai középarányosát kell megtalálnunk. Ismétlem: a konstrukció mind a két esetben — II. 14 és VI. 13 — azonos, de különböző e két esetben a bizonyítás, a konstrukció helyességének a megokolása. EUKLIDÉS ugyanis a VI. könyvben az *arányelmélettel* okolja meg a konstrukciót, a II. könyvben viszont még nem hivatkozik az arányelméletre. Fölmerült mármost ezzel kapcsolatban az a történeti kérdés, hogy vajon a két bizonyítás közül melyik a régebbi?

Megkönnyíti a legutóbbi kérdésre adandó választ az a körülmény, hogy találunk ARISTOTELÉS műveiben két ízben is[54] egy olyan kijelentést a quadraturára vonatkozóan, amelyből egyértelműen kiderül, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását régebben az arányelmélettel okolták meg. Éppen erre a két Aristotelés-helyre hivatkozott J. L. HEIBERG,[55] amikor meggyőzően kimutatta, hogy az euklidészi „Elemek" II. könyve 14. tételének *régebbi* bizonyítása az volt, amelyet mai szövegünkben a VI. 13. tétel bizonyításában olvasunk. Minthogy azonban véleményem szerint az említett arisztotelészi kijelentésből még további történeti következtetéseket is levonhatunk, az alábbiakban közelebbről ismertetem a kérdéses arisztotelészi helyet.

[54] De anima II. 2, 413 a 19 és Metaph. 996 b 21.
[55] J. L. HEIBERG, Mathematisches bei Aristoteles 20; vö. TH. L. HEATH, The Thirteen Books ... I. 410.

ARISTOTELÉS a „De anima" c. munkájában egy alkalommal arról beszél, hogy a definíciók általában ún. *zárótételek*. Ilyen „zárótétel" pl. az, ha arra a kérdésre, hogy mi a quadratura *(τετραγωνισμός)* azt feleljük, hogy ez a téglalapnak négyzetté való átalakítása. Az viszont, aki azt állítja, hogy a quadratura a geometriai középarányos megtalálása — folytatja ARISTOTELÉS — a dolog lényegét is megmondja *(ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστιν ὁ τετραγωνισμός μέσης εὕρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον)*. Nagyjából ugyanezt az állítást olvassuk ARISTOTELÉSnél egy másik alkalommal is, a Metaphysikában.

Kiderül tehát ARISTOTELÉS szövegéből egyrészt az, hogy a görögök quadraturán főként a téglalapnak négyzetté való átalakítását értették — említettem már, hogy a kör quadraturája csak viszonylag *később* fölmerült probléma lehetett —, másrészt pedig az, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását a geometriai középarányos megszerkesztésével érték el (mert ha valamely téglalap oldalai a és b szakaszok, akkor e két mennyiség középarányosának a négyzete (x^2) egyenlő a téglalappal, azaz ha $a{:}x = x{:}b$, akkor $x^2 = ab$). — Ez az utóbbi megállapítás — tehát az, hogy a téglalapnak négyzetté való átalakítását eredetileg a geometriai középarányos megszerkesztésével érték el — érdekes fényt vet az euklidészi II. 14. tétel eredeti történeti jelentőségére is. Mielőtt megpróbálnék reávilágítani erre, nézzük meg, milyen összefüggésben tárgyalja EUKLIDÉS a II. 14. tételt.

A II. 14. tétel euklidészi összefüggését legegyszerűbben úgy állapíthatjuk meg, ha összeállítjuk mindazokat a tételeket, amelyeket EUKLIDÉS mai szövegében a II. 14. tétel előkészítésének, „előzményének" tekinthetünk. Ilyen előkészítő tétel pl. az I. 45: „*Szerkesszünk valamely adott egyenes vonalú idom területével egyenlő területű parallelogrammát*"; vagy: I. 42: „*Szerkesszünk valamely adott háromszöggel egyenlő területű parallelogrammát*". — Nem sok értelme volna, ha össze akarnám itt állítani a II. 14. tétel minden ilyen euklidészi „előzményét", inkább csak összefoglalóan jellemzem őket.

A II. 14. tétel euklidészi előzményei mind olyan tételek, amelyek területátalakítási problémákat oldanak meg, illetőleg amelyek bizonyos idomok között a területek egyenlőségét mondják ki. Könnyű volna megállapítanunk azt is, hogy ezek a tételek a *gyakorlatban* nyilván a területmérés szempontjából voltak fontosak. A különféle egyenes vonalú idomokat bizonyára azért alakították át velük egyenlő területű téglalapokká, mert így állapíthatták meg legkönnyebben a vizsgált idomok területét. — De mi szükségük volt arra, hogy az ily módon nyert téglalapokat még tovább átalakítsák *négyzetekké?* — A gyakorlati területmérés szempontjából ennek az utóbbinak már aligha lehetett jelentősége. A quadratura, már az egyenes vonalú idomok esetében is, olyan geometriai probléma, amely túlmutat a pusztán gyakorlati területszámításon. Talán jobban megértjük ennek a jelentőségét akkor, ha a következőkre gondolunk.

Úgy látszik, az egészen korai görög, az ún. pythagoreus tudományban nem vált még el élesen egymástól az *aritmetika* és a *geometria.* Nemcsak az aritmetikai alapműveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) végezték ún. számoló kövekkel *(ψῆφοι)*, hanem ugyanilyen egyforma nagyságú és alakú kövekből rakták ki a geometriai idomokat is, különösen a síkidomokat.[56] Fennmaradt ennek a kezdetleges szemléletnek az emléke nemcsak az olyan későbbi korból hagyományozott pythagoreus szám-elnevezésekben, mint *háromszög-*, *négyzet-*, *oblongum-*, *ötszög-*, *hatszög-* stb. *számok*, hanem még az euklidészi aritmetika terminológiájában is. Hiszen a *„tényező”* (faktor) neve EUKLIDÉSnél is *πλευρά* (vö. „Elemek” VII. 17. definíció), márpedig ez a szó tulajdonképpen valamely geometriai síkidomnak (különösen a *téglalapnak*) az *„oldalát”* jelenti. Valamely szorzat két *tényezőjét* nyilván azért nevezhették *πλευρά*-knak, mert a szorzatot mint *téglalapot* ábrázolták. Ebben az értelemben beszél EUKLIDÉS *síkszámokról* is. *Síkszám* az olyan, amely felbontható két tényező szorzatára, vagyis az 1-en kívül tulajdonképpen bármely szám. (Ennek megfelelően *testszám* viszont az olyan, amely felbontható három tényező szorzatára.)

Induljunk ki mármost abból, hogy így ábrázolván a szorzást „geometrikusan”, nagyon hamar észre kellett venniök a következőt is: ugyanaz a szám gyakran többféleképpen is ábrázolható téglalap-formában. A *12* számból pl. három különböző téglalapot készíthettek: 1×12 (egy olyan hosszú téglalap, amelynek egyik oldala 1, másik oldala pedig 12!), vagy $12=2\times6=3\times4$. Még több ábrázolási lehetőséget adott a 36 szám, mert $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$. Különösen érdekes volt ebből a legutóbbi ábrázolás: 6×6, egy olyan téglalap, amelynek mind a két oldala egyenlő, tehát egy négyzet. Ezek után mármost csak azt kellett kérdezniök: minthogy minden egész szám ábrázolható mint téglalap, vajon minden téglalap (illetőleg pontosabban: minden téglalap-formában ábrázolt szám) ábrázolható-e egyszersmind négyzet-formában is? — Világos, hogy erre a kérdésre *nem*-mel kellett válaszolniok — mindaddig, amíg pusztán az aritmetika körében maradtak. De egyszerre megváltozott a helyzet akkor, *amikor a téglalap két oldalát már nem mint két számot, hanem egyszerűen mint két szakaszt kezdtek kezelni.* Most már a geometriai középarányos segítségével bármely téglalap átalakítható volt négyzetté. De mikortól fogva kezdték a téglalap 2 oldalát már nem mint két számot, hanem mint két szakaszt kezelni? — Ezt nyilván csak azóta tehették, amióta tudták már, hogy *vannak inkommenzurábilis szakaszok is.* Erre, úgy

[56] O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1957 40 sk.

látszik, éppen a négyzet átlójával kapcsolatban jöttek rá, amikor ti. a négyzet oldalára és átlójára alkalmazták az ún. páros és páratlan elméletét.[57] Ez más szóval azt jelenti, hogy a *geometriai középarányos* felfedezése és a *téglalap quadraturájának a problémája*, illetőleg a „*téglalap négyzetértéke*" (*δύναμις*) fogalom megalkotása nagyjából egykorú kell hogy legyen az inkommenzurábilis mennyiségek létezésének a felismerésével.

ПОНЯТИЕ „ЗНАЧЕНИЯ КВАДРАТА" И ТАК НАЗ. „ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ"

A. Сабо

THE NOTION „QUADRATIC VALUE" AND THE „GEOMETRIC MEAN"

Á. Szabó

[57] Vö. Matematikai Lapok VIII 1957 8—36, 232—247 és X 1959 72—121.