Varga Gyula:

A Bairstow-féle eljárás általánositása trigonometrikus polinomok faktorizálására

A Bairstow-féle eljárás itt közlésre kerülő általánositása lehetővé teszi az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cos k\,x + q_k \sin kx$$ alaku trigonometrikus

polinomok $\alpha \cos x + \beta \sin x + 1$ alaku tényezőkre való felbontását.

Tekintsük a következő azonosságot:

$$f(x) = (\alpha \cos x + \beta \sin x + 1)\cdot g(x) + A(\alpha,\beta) \sin x + B(\alpha,\beta) \qquad /1/$$

ahol $g(x)$ n-1-edrendü trigonometrikus polinom. Ez a felirás a linearizálási képletek alapján lehetséges.

Az
$$\left.\begin{aligned} A(\alpha,\beta) &= 0 \\ B(\alpha,\beta) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad /2/$$

egyenletrendszert iteráció segitségével akarjuk megoldani α -ra és β -ra. Ehhez az

$$\begin{aligned} A + A_\alpha\, d\alpha + A_\beta\, d\beta &= 0 \\ B + B_\alpha\, d\alpha + B_\beta\, d\beta &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kell $d\alpha$ -ra és $d\beta$ -ra megoldanunk. Az egyenletrendszerben szereplő parciális deriváltakhoz a következőképpen jutunk:

Deriváljuk /1/-et α ill. β szerint. A következőket kapjuk:

$$g(x)\cos x = -(\alpha\cos x + \beta\sin x + 1)\, g_\beta(x) - \\ - A_\alpha(\alpha,\beta)\sin x - B_\alpha(\alpha,\beta) \qquad /3/$$

ill.

$$g(x)\sin x = -(\alpha\cos x + \beta\sin x + 1)\, g_\beta(x) - \\ - A_\beta(\alpha,\beta)\sin x - B_\beta(\alpha,\beta) \qquad /4/$$

Látható, hogy A-t, B-t, valamint összes elsőrendü parciális deriváltjait egy-egy n-edrendü trigonometrikus polinom $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$-gyel való osztásakor keletkezett maradék együtthatóiként kapjuk.

Kiindulva valamilyen kezdeti értékekből (α_0, β_0), most már felirhatjuk a /2/ egyenletrendszer megoldására szolgáló iterációt:

$$\alpha_{i+1} = \phi(\alpha_i, \beta_i)$$

$$\beta_{i+1} = \psi(\alpha_i, \beta_i) \qquad /5/$$

ahol

$$\phi(\alpha,\beta) = \alpha - \frac{BA_\beta - AB_\beta}{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha} \quad \text{és} \quad \psi(\alpha,\beta) = \beta + \frac{AB_\alpha - BA_\alpha}{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha}$$

A nevezőkben szereplő Jacobi-féle determináns 0-tól való különbözőségét a későbbiekben mutatjuk meg.

<u>Állitás:</u> Legyen $\bar{\alpha}\cos x + \bar{\beta}\sin x + 1$ $f(x)$ tényezője, és legyenek ennek gyökei ξ és η ; amennyiben $g(\xi)$ és $g(\eta)$, valamint $\bar{\alpha}$ zérustól különbözők, akkor az /5/ iterációs eljárás konvergenciája legalább másodrendü.

<u>Bizonyitás:</u> Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\phi_\alpha(\bar\alpha,\bar\beta) = \phi_\beta(\bar\alpha,\bar\beta) = \psi_\alpha(\bar\alpha,\bar\beta) = \psi_\beta(\bar\alpha,\bar\beta) = 0$$

Irjuk fel ezeket a parciális deriváltakat:

$$\phi_\alpha(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=\bar\alpha,\,\beta=\bar\beta} = \left[\frac{BA_{\alpha\beta}-AB_{\alpha\beta}}{D} - \frac{(BA_\beta - AB_\beta)D_\alpha}{D^2}\right]\Bigg|_{\substack{\alpha=\bar\alpha\\ \beta=\bar\beta}}$$

stb.

Ahol D a már emlitett Jacobi-féle determináns. Mivel $A(\bar\alpha,\bar\beta) = 0$ és $B(\bar\alpha,\bar\beta) = 0$, ezért elegendő megmutatni, hogy $D(\bar\alpha,\bar\beta) \neq 0$.

1./ $\xi \neq \eta$. Behelyettesitve ξ -t és η -t /3/-ba és /4/-be, a kapott egyenletrendszerből kifejezhetők a szükséges parciális deriváltak, amelyekből D képezhető:

$$D = g(\xi)\, g(\eta) \frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta - \sin\xi} \qquad /6/$$

mivel $\bar\alpha\cos\xi + \bar\beta\sin\xi + 1 = 0$ és
$\bar\alpha\cos\beta + \bar\beta\sin\eta + 1 = 0$ ezért

$$\frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta - \sin\xi} = \frac{1}{\bar\alpha}$$

tehát

$$D = \frac{g(\xi)\cdot g(\eta)}{\bar\alpha} \quad ; \qquad D \neq 0$$

2./ $\eta = \xi$. A /6/ közvetlenül nem alkalmazható, de megkiséreljük $\eta \to \xi$ határátmenet utján eljutni D-hez:

Legyen $\xi - \eta = \delta$, akkor

$$\frac{\sin(\xi-\eta)}{\sin\eta-\sin\xi}=\frac{\sin\delta}{\sin\xi\cos\delta-\cos\xi\sin\delta-\sin\xi}=$$

$$=\frac{1}{\sin\xi\frac{\cos\delta-1}{\sin\delta}-\cos\xi}\longrightarrow-\frac{1}{\cos\xi}\qquad(\text{ha }\delta\to 0)$$

tehát

$$D=-\frac{g^2(\xi)}{\cos\xi}$$

Mivel továbbá $\bar{\alpha}\cos\xi+\bar{\beta}\sin\xi+1=0$, és mivel ξ kétszeres, deriválva $-\bar{\alpha}\sin\xi+\bar{\beta}\cos\xi=0$, e két egyenletből kapjuk

$$\bar{\alpha}=-\cos\xi \quad \text{, tehát}$$

$$D=\frac{g^2(\xi)}{\bar{\alpha}} \qquad D\neq 0$$

Ezzel a bizonyitást befejeztük. A bizonyitásnál felhasználtuk, hogy A és B kétszer folytonosan deriválhatók. Utolsó eredményünk alapján mondhatjuk, hogy a konvergencia akkor is másodrendü, ha $\bar{\alpha}\cos\xi+\bar{\beta}\sin\xi+1$ kétszeres gyökkel rendelkezik. Nem foglalkoztunk azzal az esettel, amikor $\alpha\cos x+\beta\sin x+1$ magasabb hatványa is tényezője $f(x)$-nek.

Megjegyzés: $\bar{\alpha}=0$ esetén /1/-et a következőképpen módositjuk: $f(x)=(\alpha\cos x+\beta\sin x+1)\cdot g(x)+A^*(\alpha,\beta)\cos x+B^*(\alpha,\beta)$.

Az eljárás ettől kezdve hasonló ahhoz, amit $\bar{\alpha}\neq 0$ esetén követtünk, és $D=-\frac{g(\xi)g(\eta)}{\bar{\beta}}$ ill. $D=-\frac{g^2(\xi)}{\bar{\beta}}$ adódik, ha $\bar{\beta}\neq 0$.

A közölt eljárás programja az Ural-2 elektronikus számológépre készült EFT autókódban.

Irodalom:

J.F.Traub: Iterative methods for the solution of equations /Prentice Hall Inc./

G.H.Golub, T.N.Robertson: A generalized Bairstow Algoritm /CACM 1967. junius/

G.M.Birtwistle, D.J.Evans: On the generalisation of Bairstow's method. /BIT 1967. Nr.3./

S u m m a r y

In the paper a generalization of Bairstow's method which makes possible the factorization on factors of the form $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$ of the trigonometric polynoms of form $\sum_{i=0}^{n} p_i \cos i x + q_i \sin i x$ is described. As a result of the procedure the convergence is quadratic even if $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$ has double roots.

Р е з ю м е

В статье дано обобщение метода Берстова, которое даёт возможность разложить тригонометрические многочлены, заданные в виде

$\sum_{i=0}^{n} p_i \cos ix + q_i \sin ix$, на множители $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$.

В качестве результата получено, что сходимость квадратична и в случае $\alpha\cos x + \beta\sin x + 1$ имеется двукратный корень.