Harnos Zsolt:

Konvex zárt halmazok képének a zártságáról

Az jól ismert, hogy egy X Hausdorff-féle topológikus tér M részhalmazának a folytonos képe egy Y Hausdorff-féle topológikus térben általában nem zárt, de ha az M halmaz kompakt - tehát zárt -, akkor a képe is kompakt.

A kompaktság felhasználása nélkül adunk egy feltételt zárt halmazok képének zártságára vonatkozólag.

1. tétel:

Tekintsünk egy lineáris folytonos A operátort, amely definiálva van egy X reflexiv Banach-téren, és az X teret egy Y Banach-térbe képezi.

Az X tér minden korlátos konvex zárt részhalmazának a képe korlátos konvex zárt.

Bizonyitás:

Legyen M az X tér korlátos konvex zárt részhalmaza. Az nyilvánvaló, hogy $A(M)$ - az M halmaz képe - konvex és korlátos.

Legyen y_0 az $A(M)$ halmaz lezárásának egy pontja. Az M-ben létezik olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat, amelyre az Ax_n konvergál erősen az y_0-hoz. Az X tér reflexiv, ezért az M halmaz gyengén kompakt, s igy az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható egy $\{x_{n_i}\}$ részsorozat, amely gyengén konvergál az X tér valamely x_0 eleméhez. Feltehetjük, hogy a kiválasztott $\{x_{n}\}$ sorozat megegyezik az eredeti $\{x_n\}$ sorozattal.

A Mazur-tétel* miatt az x_0 benne van az $\{x_n\}$ sorozat zárt, konvex burkában, tehát $x_0 \in M$.

A Mazur-tétel ismételt alkalmazásával konstruálható egy $\tilde{x}_n$ sorozat az M-ben, amely konvergál erősen az x_0-hoz. Mivel az $\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$ konvergál gyengén az x_0-hoz, ezért a Mazur-tétel szerint minden n természetes számhoz léteznek olyan nemnegativ számok

$$\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{p_n}^{(n)} ; \quad \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} = 1 ,$$

hogy
$$\Big\| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} x_{n+j} - x_0 \Big\| < \frac{1}{n} .$$

Legyen
$$\tilde{x}_n = \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j^{(n)} x_{n+j} .$$

Az nyilvánvaló, hogy $\tilde{x}_n \in M$ és
$$\| \tilde{x}_n - x_0 \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Az A operátor folytonossága miatt elég bizonyitani, hogy $A\tilde{x}_n$ konvergál erősen az y_0-hoz, mert ebben az esetben
$$y_0 = \lim_{n\to\infty} A\tilde{x}_n = Ax_0 \in A(M) .$$

---

* Mazur tétel.

Legyen az X normált térben az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat gyenge limesze x_0. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van az x_n elemeknek olyan konvex kombinációja $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ $\left(\alpha_j \geq 0 ; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$ hogy $\| x_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \| < \varepsilon$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor létezik olyan $N(\varepsilon)$, hogy

$\| Ax_n - y_0 \| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$.

Az nyilvánvaló, hogy

$$\| A\tilde{x}_n - y_0 \| = \| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j A x_{n+j} - y_0 \| =$$

$$= \| \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j (A x_{n+j} - y_0) \| \leq \sum_{j=0}^{p_n} \alpha_j \| A x_{n+j} - y_0 \| < \varepsilon$$

hacsak $n \geq N(\varepsilon)$. Q.E.D.

A három feltétel /reflexivitás, korlátosság és konvexitás/ egyike sem hagyható el még teljesen folytonos operátor esetén sem.

<u>1. példa:</u>

Legyen $X = C[0,1]$, azaz a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények tere.

Ismert, hogy az X nem reflexiv.

Az $M = \{ x(t) : x(t) \in X,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ 0 \leq x(t) \leq 1 \}$

halmaz korlátos, konvex és zárt.

Tekintsük az $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$ lineáris, korlátos, tehát teljesen folytonos funkcionált.

Ebben az esetben $f(M) = (0,1)$ nyilt intervallum, mert

$$x_\alpha(t) = t^{\frac{1}{\alpha}-1} \in M$$

amint $0 < \alpha < 1$, de nem létezik olyan $x \in M$, hogy

$f(x) = 0$, vagy $f(x) = 1$.

2. példa:

Legyen $X = R^2$ az Euklidesi sik.

Az $M = \{z: \ z = (x,y), \ 0 < x \leq 1, \ \frac{1}{x} \leq y\}$ konvex, zárt de nem korlátos.

Az $f(x) = x$ funkcionál lineáris korlátos /teljesen folytonos/ és $f(M) = (0,1]$ balról nyilt, jobbról zárt intervallum.

3. példa:

Legyen X Hilbert-tér és M a $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormált rendszer. X reflexiv, M korlátos zárt, de nem konvex.

Tekintsük az $f(\varphi) = (\varphi, \psi)$ funkcionált, ahol

$$\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \varphi_i \quad .$$

Az $f(\varphi)$ funkcionál lineáris és korlátos /teljesen folytonos/. Mivel $f(\varphi_i) = \frac{1}{i}$, ezért

$$f(M) = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3} \dots \},$$

amely nem zárt, mivel $0 \notin f(M)$.

A fentebb bizonyitott tétel alkalmazásával bizonyitjuk a következő tételt.

2. tétel:

Legyen A egy lineáris folytonos operátor, amely leképezi az X reflexiv Banach-teret az Y Banach-térbe.

Ha M konvex, korlátos és zárt részhalmaza X-nek, és $y \in Y$, akkor létezik olyan $x_y \in M$, -y-tól függő - elem, hogy

$$\inf_{x \in M} \| Ax-y \| = \| Ax_y-y \| = dy \text{ .}$$

Bizonyitás:

Legyen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ olyan sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \| Ax_n-y \| = dy$$

Az előző tétel bizonyitásához hasonlóan konstruálható olyan $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ sorozat, hogy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergál valamilyen $x_y \in M$ elemhez erősen, és

$$\lim_{n\to\infty} \| A\tilde{x}_n-y \| = dy \text{ .}$$

Az $A(M)$ az előző tétel miatt zárt, ezért $Ax_y \in A(M)$, és igy

$$\lim_{n\to\infty} \| Ax_n-y \| = \| Ax_y-y \| = dy \text{ .}$$ Q.E.D.

1. Megjegyzés:

A következő jól ismert tétel triviális következménye a második tételnek.

Legyen X reflexiv Banach-tér és H konvex, zárt részhalmaza X-nek, továbbá $y \in X$.

Ekkor létezik olyan $x_y \in H$, - y-tól függő - elem, hogy

$$\inf_{x \in H} \| x-y \| = \| x_y-y \|$$

Bizonyitás:

Alkalmazzuk a második tételt a következőképpen.

X = Y, és A az identikus operátor. Az M-nek válasszuk a

H-nak és egy y középpontu, elég nagysugaru gömb nem üres metszetét.

2. Megjegyzés:

Az első példa triviális következménye, hogy a $C[0,1]$ nem reflexiv Banach-tér.

S u m m a r y

On closedness of the image of convex closed sets.

Harnos Zsolt

In the paper the proof of the following theorems is given.

Theorem 1.:

Let A be a linear continuous operator which maps a reflexiv Banach space X into a Banach space Y. Then the image of each closed, convex and bounded subset of X is a closed, convex and bounded subset of Y.

Theorem 2.:

Let A be a continuous linear operator which maps a reflexiv Banach space X into a Banach space Y. If M is a bounded, convex and closed subset of X and y an orbitrary element of Y, then there is exist an $x_y \in M$ for which.

$$\inf_{x \in M} \| Ax-y \| = \| Ax_y - y \|$$

Краткое содержание статьи:

" Замкнутость образов выпуклых замкнутых множеств "

В статье дано доказательство следующих двух теорем:

1. Теорема : Пусть A линейный непрерывный оператор, отображающий рефлекторное Банахово пространство X в Банахово пространство У. В этом случае образ каждого замкнутого выпуклого и ограниченного подмножества пространства X будет выпуклым и ограниченным подмножеством пространства У.

2. Теорема : Пусть A линейный непрерывный оператор, отображающий рефлекторное Банахово пространство X в Банахово пространство У. Если M ограниченное выпуклое и замкнутое подмножество пространства X и y любой элемент пространства У, то существует один элемент $x_y \in M$, для которого выполняется

$$\inf_{x \in M} \| Ax - y \| = \| Ax_y - y \|$$